ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

IV

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

IV

ГЕОМЕТРИЯ

АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК РСФСР

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ

ГЕОМЕТРИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

Б1
Э 68

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ЭНЦИКЛОПЕДИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКИ:

П. С. АЛЕКСАНДРОВ,
А. И. МАРКУШЕВИЧ,
А. Я. ХИНЧИН

РЕДАКТОРЫ КНИГИ ЧЕТВЕРТОЙ

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ,
И. М. ЯГЛОМ

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции 7

АКСИОМЫ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

(Б. А. Розенфельд)

§ 1. Возникновение основных понятий геометрии 9
§ 2. «Начала» Евклида 12
§ 3. Появление аксиоматического метода 18
§ 4. Модели 21
§ 5. Непротиворечивость и полнота аксиоматики 28
§ 6. Аксиоматика геометрии 32
§ 7. Непротиворечивость и полнота аксиоматики евклидовой геометрии 41
§ 8. Независимость аксиом 44
Литература 47

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

(И. М. Яглом, Л. С. Атанасян)

§ 1. Понятие преобразования. Примеры 50
§ 2. Применение преобразований к решению геометрических задач . . 63
§ 3. Аналитическая запись геометрических преобразований 72
§ 4. Произведение отображений и преобразований 80
§ 5. Обратное преобразование 96
§ 6. Общее определение геометрии. Группы геометрических преобразований 98
§ 7. Группа проективных преобразований 110
§ 8. Неточечные отображения 121
§ 9. Принцип перенесения 140
Литература 157

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

(Н. М. Бескин, В. Г. Болтянский, Г. Г. Маслова, Н. Ф. Четверухин, И. М. Яглом)

§ 1. Некоторые вопросы практического использования геометрических построений 160
§ 2. О решении задач на построение в зависимости от принятых инструментов 167
§ 3. О построениях на ограниченном куске плоскости 177

§ 4. Общие методы решения задач на построение на плоскости . . . 182
§ 5. Использование геометрических преобразований при решении задач на построение на плоскости 189
§ 6. Приближенные методы геометрических построений и их значение для практики 193
§ 7. Геометрические построения в пространстве 200
Литература 203

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

(Ю. И Манин)

Введение 205
§ 1. Геометрическая часть теории 206
§ 2. Перевод задачи на алгебраический язык 210
§ 3. Классические задачи 220
Литература 227

МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

(Н. М. Бескин)

§ 1. Постановка задачи 229
§ 2. Параллельные проекции 234
§ 3. Параллельная аксонометрия 247
§ 4. Метод Монжа 275
§ 5. Центральные проекции 277
§ 6. Построения на изображении 288
Литература 289

ВЕКТОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ

(В. Г Болтянский, И. М. Яглом)

§ 1. Определение вектора 292
§ 2. Сложение векторов и умножение вектора на число 298
§ 3. Скалярное произведение векторов 319
§ 4. Косое произведение векторов плоскости 338
§ 5. Тройное произведение и векторное произведение векторов пространства 351
§ 6 Применения векторного исчисления к сферической геометрии и тригонометрии 366
§ 7. Понятие о векторных пространствах 369
Литература 380

МНОГОУГОЛЬНИКИ И МНОГОГРАННИКИ

(В. Г. Ашкинузе)

§ 1. Основные определения. Теорема Эйлера 382
§ 2. Комбинаторный (топологический) тип многогранника Теорема Штейница 399
§ 3. Развертка многогранника. Теорема Коши 410
§ 4. Правильные многоугольники и многогранники и их обобщения . 420
Литература 446

ОКРУЖНОСТИ

(И. М. Яглом)

Введение 449

А. Окружность как совокупность точек

§ 1 Обобщение понятия окружности 450
§ 2. Радикальная ось и радикальный центр 454
§ 3. Пучки и связки окружностей 461
§ 4. Инверсия 468
§ 5 Точечная геометрия окружностей 476

Б. Окружность как совокупность прямых

§ 6. Направленные окружности 479
§ 7. Центр подобия и ось подобия 485
§ 8. Ряды и сети окружностей 490
§ 9. Осевая инверсия 495
§ 10. Осевая геометрия окружностей 504

В. Окружность как совокупность линейных элементов

§ 11. Новый взгляд на окружность 508
§ 12. Касательная геометрия окружностей 510
Литература 516

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТРИГОНОМЕТРИИ

(Б. А. Розенфельд)

§ 1. Основные понятия сферической геометрии 518
§ 2. Сферические треугольники 530
§ 3. Малые окружности 539
§ 4. Тригонометрические соотношения в сферическом треугольнике. . 545
Литература 557

Именной указатель 558
Предметный указатель 559

ОТ РЕДАКЦИИ

Первые три книги «Энциклопедии элементарной математики» (сокращенно ЭЭМ), посвященные арифметике, алгебре и анализу, вышли свыше десяти лет тому назад. Теперь после долгого перерыва редакция решила завершить этот труд. За эти годы коллектив сотрудников ЭЭМ понес большие потери. В 1959 г. после продолжительной болезни скончался Александр Яковлевич Хинчин; еще раньше мы потеряли Дмитрия Ивановича Перепелкина, участвовавшего в составлении геометрических книг. То, что издание удалось все же возобновить, является результатом большой работы, проделанной Владимиром Григорьевичем Болтянским и Исааком Моисеевичем Ягломом.

Напомним из предисловия к первой книге, что предлагаемый труд «не может служить для первоначального изучения предмета. Он предназначается для людей, изучавших элементарную математику и уже ставших или готовящихся стать преподавателями элементарной математики. Он не следует, как правило, ни порядку, ни способу изложения математики в средней школе, так как то и другое обусловлено возрастными особенностями учащихся и общеобразовательными целями средней школы, т. е. соображениями, которые не играют роли по отношению к подготовленному читателю-профессионалу. Логика нашего издания — это логика систематического, по возможности простого и доступного изложения тех вопросов математической науки, из которых строится школьный курс, а также и тех, которые хотя и не находят в этом курсе прямого выражения, однако необходимы для правильного и сознательного его понимания и создают перспективы для дальнейшего развития содержания и методов школьного курса».

Этот наш первоначальный замысел остается неизменным. Осталось неизменным и намерение посвятить очередные две книги геометрии. Что же касается их фактического содержания, то здесь редакция внесла ряд изменений, продиктованных главным образом желанием учесть некоторые замечания критики и читательские отклики на первые три книги. С принятым ныне отбором материала и порядком его расположения читатель познакомится из оглавления.

Отметим, что четвертая и пятая книги ЭЭМ образуют вместе самостоятельное целое, так что пользование ими, в известном смысле, независимо от ранее выпущенных книг, также составляющих законченный цикл.

В 1951 г., когда вышла в свет первая книга ЭЭМ, никто и не предполагал, что появятся новые математические профессии (вроде программиста-вычислителя), подготовка к которым будет возложена на среднюю школу. В свете новых задач должна быть расширена и пересмотрена сама концепция «элементарной математики». Соответствующим вопросам редакция предполагает отвести место в последних книгах (все издание, рассчитано на семь книг), состав которых, таким образом, будет во многом отличаться от содержания, намеченного в предисловии к первой книге.

Если бы пришлось начинать все сначала, мы внесли бы прежде всего серьезные изменения в структуру и изложение ранее выпущенных книг. Но нам представляется, что в целом они все же оказались полезными. Мы надеемся, что эта и следующая книги ЭЭМ найдут свою читательскую аудиторию и будут полезны и преподавателям математики средней и высшей школы, и студентам педагогических институтов и университетов, а также любителям математики, не связанным с вопросами ее преподавания.

Редакция

АКСИОМЫ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИИ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Возникновение основных понятий геометрии 9
1.1. Понятия геометрии как результат абстракции 9
1.2. Зарождение геометрии в древнем мире 11
§ 2. «Начала» Евклида 12
2.1. Евклид и его предшественники 12
2.2. «Постулаты» Евклида 15
2.3. Непрерывность у Евклида и его предшественников 16
2.4. Движения 17
§ 3. Появление аксиоматического метода 18
3.1. Создание неевклидовой геометрии 18
3.2. Аксиоматический метод в математике 19
§ 4. Модели 21
4.1. Модели евклидовой плоскости 21
4.2. Аксиоматические системы в алгебре 27
§ 5. Непротиворечивость и полнота аксиоматики 28
5.1. Непротиворечивость аксиоматики 28
5.2 Полнота системы аксиом 30
§ 6. Аксиоматика геометрии 32
6.1. Основные понятия геометрии Евклида 32
6.2. Аксиомы принадлежности 32
6.3. Аксиомы порядка 34
6.4. Аксиомы движения 36
6.5. Аксиомы непрерывности 37
6.6. Аксиома параллельности 40
§ 7 Непротиворечивость и полнота аксиоматики евклидовой геометрии 41
7.1. Арифметическая модель геометрии Евклида 41
7.2. Непротиворечивость и полнота аксиоматики евклидовой плоскости 43
§ 8. Независимость аксиом 44
8.1. Независимость системы аксиом 44
8.2. О независимости аксиоматики евклидовой геометрии 45
8.3. Заключение 46
Литература 47

§ 1. Возникновение основных понятий геометрии

1.1. Понятия геометрии как результат абстракции. Геометрия представляет собой общую науку о пространственных формах. С пространственными формами человек столкнулся прежде всего

при измерении участков земли. Греческое слово γεωμετρία, от которого происходит название *геометрия*, как раз и означает «землемерие». С другими пространственными формами человек столкнулся при постройке зданий, выделке сосудов и т. д.

Геометрия, как и вся математика, изучает объекты реального мира. Однако математические науки существенно отличаются от остальных естественных наук, изучающих специфические физические, химические, биологические, экономические и другие закономерности. В отличие от этих наук математика изучает объекты реального мира в наиболее абстрактном виде, существенно отвлекаясь от их конкретного содержания. В частности, геометрия принимает во внимание только форму предметов, отвлекаясь от вещества и физических свойств этих предметов, точно так же как, например, арифметика принимает во внимание только числа предметов и их отношения. Этот абстрактный характер математики и позволяет широко применять в ней дедуктивный метод, т. е. логическое выведение закономерностей из небольшого числа основных положений (определений, аксиом), в то время как упомянутые выше науки применяют главным образом индуктивный метод, т. е. установление общих закономерностей на основе частных эмпирических наблюдений.

Однако эмпирические наблюдения и практический опыт играли важнейшую роль при возникновении математических понятий и основных положений математики. Именно потому, что люди миллионы раз сталкивались с такими арифметическими закономерностями, как независимость результата счета камней или палок от порядка счета, или с такими геометрическими закономерностями, как единственность линии, по которой располагается натянутая веревка, соединяющая два колышка, смогли выработаться такие основные положения арифметики и геометрии, как коммутативный закон сложения и аксиома о единственности прямой линии, соединяющей две точки. Вся терминология, применяемая в геометрии, с исключительной наглядностью свидетельствует о том, что понятия о геометрических образах возникли путем абстракции от реальных предметов различной формы.

Так, например, слово *точка* происходит от глагола «ткнуть» и означает результат мгновенного прикосновения, укола [1]). Тот же смысл имеет и латинское слово punctum, от которого произошли термины Punkt, point (точка) на западно-европейских языках и русский термин «пункт»: эти слова происходят от латинского глагола

---

[1]) Это толкование является сейчас общепринятым. Интересно, однако, отметить, что замечательный русский математик Н. И. Лобачевский придерживался другого взгляда на происхождение термина «точка». Он говорил, что точка происходит «от прикосновения пера, откуда заимствовано самое название» («точка» — отточенное острие гусиного пера, которым писали во времена Лобачевского. См. Н. И. Лобачевский, Избранные труды по геометрии, Изд. АН СССР, Москва, 1956, стр. 108).

pungo — «укалываю». Слово *линия*, от латинского linea, в конечном счете происходит от латинского слова linum — «лен, льняная нить»; это показывает, что понятие линии является абстракцией от тонкой льняной нити. Часто слово «линия» употребляется в значении «прямой линии» (откуда, например, термин «линейка»); понятие прямой линии, очевидно, является абстракцией от натянутой льняной нити.

Такое же конкретное значение имеют и геометрические термины греческого происхождения: слово *сфера* происходит от греческого σφαῖρα — «мяч», *куб* — от κύβος — «игральная кость», *цилиндр* — от κύλινδρος — «валик», *конус* — от κῶνος — «сосновая шишка», *призма* — от πρίσμα — «опиленная», *ромб* — от ῥόμβος — «бубен», *трапеция* — от τραπέζιον — «столик». Отсюда видно, что указанные геометрические фигуры представляют собой понятия, являющиеся абстракциями от форм мяча, игральной кости, круглого валика, сосновой шишки, опиленного бревна, четырехугольного бубна, столика с раздвинутыми ножками. Слово *пирамида*, от греческого πυραμίς, в конечном счете происходит от древнеегипетского слова puramа, которым древние египтяне называли свои пирамиды.

Нить, веревка была не только прообразом геометрической линии, но и первым геометрическим инструментом: натянутая веревка играла роль линейки; закрепляя один конец веревки, другим ее концом описывали как циркулем, окружность; деля веревку со связанными концами на 12 равных частей и придавая этой веревке форму треугольника, стороны которого соответственно равны 3, 4 и 5 частям, получали прямоугольный треугольник; таким образом строился прямой угол. Греки называли древнеегипетских геометров, у которых они обучались геометрии, ἁρπεδόναπται — «натягивателями веревки»; древнейший индийский геометрический трактат, посвященный правилам построения алтарей, назывался Sulva-sutra-«Правила веревки». Циркуль и линейка появились раньше всего в Китае: специальные иероглифы для обозначения циркуля и линейки возникли в китайской письменности в середине II тысячелетия до н. э. Древние греки приписывают изобретение этих инструментов Фалесу (VI век до н. э.); во всяком случае египетские «натягиватели веревки», у которых учился Фалес, по-видимому, не пользовались этими инструментами. С циркулем связано появление слова *центр* — от греческого слова κέντρον, обозначающего палку с заостренным концом, которой подгоняли быков, а позже — ножку циркуля, ставящуюся в центр описываемого круга.

1.2. Зарождение геометрии в древнем мире. Выработка абстрактных геометрических понятий являлась результатом длительного исторического процесса накопления геометрических фактов. Первоначально установление геометрических фактов происходило экспериментальным путем, на огромном числе частных примеров, причем правила, полученные в этих частных случаях, обобщались на другие

случаи. Это видно из дошедших до нас правил вычисления площади четырехугольника у египтян и индийцев, которые точны лишь в частных случаях, а в общих случаях дают только приближенное решение задачи: египтяне определяли площадь произвольного четырехугольника с последовательными сторонами a, b, c, d как произведение $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$, что верно только для прямоугольников, а индийцы определяли площадь произвольного четырехугольника со сторонами a, b, c, d как $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, что верно только для четырехугольников, вписанных в круг.

Упоминавшемуся нами Фалесу приписываются первые доказательства простейших геометрических утверждений; ранее необходимость «доказывать» геометрические факты, видимо, не осознавалась. Доказательства Фалеса до нас не дошли, но ясно, что эти доказательства не могли опираться на другие геометрические утверждения (аксиомы, ранее доказанные теоремы), как это делается в современных геометрических доказательствах. Что представляли собой доказательства Фалеса, видно, однако, из формулировок его теорем: почти во всех теоремах Фалеса требуется доказать равенство каких-нибудь геометрических фигур — равенство частей круга, на которые он делится диаметром; равенство вертикальных углов; равенство углов при основании равнобедренного треугольника; равенство двух сторон в треугольнике с двумя равными углами; равенство двух треугольников, если две стороны и образуемый ими угол в одном из них равны соответственным элементам другого треугольника. Доказательства этих теорем Фалес производил, несомненно, с помощью наложения друг на друга тех фигур, равенство которых требовалось доказать. Известная теорема Фалеса о том, что угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр, — прямой, вероятнее всего доказывалась поворотом фигуры на 180°, после чего возникал четырехугольник, вписанный в круг; далее требовалось установить, что этот четырехугольник является прямоугольником; это, вероятно, доказывалось перегибанием четырехугольника по его средним линиям)[1].

§ 2. «Начала» Евклида

2.1. Евклид и его предшественники. После формулировки и доказательства первых геометрических утверждений становится возможным доказывать одни утверждения (теоремы) с помощью других.

---

[1]) Вариант такого доказательства приведен в статье «Геометрические преобразования»; см. стр. 67 этой книги ЭЭМ.

Доказательство многих геометрических теорем приписывается Пифагору и Демокриту (V в. до н. э.).

Гиппократу Хиосскому (IV в. до н. э.) приписывается составление первого систематического курса геометрии, основанного на определениях и аксиомах. Этот курс и его последующие обработки назывались Στοιχεῖα — «элементы, стихии», так как здание геометрии в этих курсах строилось с помощью определений и аксиом как физическое тело из «элементов» («стихий», т. е. огня, воздуха, воды и земли). Последующее усовершенствование этих курсов привело к появлению в III в. до н. э. в Александрии знаменитой книги Евклида с тем же названием (в русском переводе «Начала»), вытеснившей книгу Гиппократа и остальные ее обработки. Существенную роль в создании «Начал» Евклида сыграло создание в IV в. до н. э. Платоном и особенно Аристотелем теории доказательств, а также разработка ими общих принципов дедуктивного построения науки (т. е. построения науки с помощью выводов, доказательств). От латинского названия «Начал» Евклида (Elementa) происходит термин *элементарная геометрия*, относящийся к совокупности геометрических результатов, изложенных у Евклида или получаемых аналогичными методами.

«Начала» Евклида состоят из 13 «книг», из которых I—VI книги посвящены планиметрии, VII—X книги посвящены арифметике и несоизмеримым величинам, которые можно построить с помощью циркуля и линейки, XI—XIII книги посвящены стереометрии. I книга начинается с изложения 23 определений и 10 аксиом, причем первые пять из этих аксиом называются «общими понятиями», а остальные — «постулатами»; дальнейшие определения содержатся во введениях к другим книгам.

Несмотря на то, что сочинения предшественников Евклида до нас не дошли, мы можем составить некоторое представление об этих сочинениях по «Началам» Евклида: в «Началах» Евклида имеются разделы, логически весьма мало связанные с другими разделами; появление их объясняется только тем, что они внесены по традиции и копируют «Начала» предшественников Евклида. К таким разделам относится прежде всего введение к I книге.

Введение к I книге «Начал» Евклида начинается с определения точки: «Точка — это то, что не имеет частей». Такое определение, нигде не применяющееся в основном тексте «Начал» Евклида, несомненно фигурировало во всех предыдущих вариантах «Начал». Смысл этого определения состоит в том, что точка есть неделимая часть (атом) пространства. Такого представления еще не было у Фалеса, оно появляется у Пифагора и Демокрита. Понятие о точке у этих двух мыслителей имеет существенно различный характер: у Пифагора, идеалиста и мистика, пытающегося объяснить все закономерности мира с помощью числовых соотношений, точки не имеют

размеров, а имеют только положение в пространстве; Пифагор отождествлял точки с числовыми единицами и, в соответствии со своей философской системой, с душами неродившихся или умерших людей. У материалиста Демокрита, творца атомистической теории в физике, точки, напротив, подобно атомам материи, имели конечные, хотя и «сверхчувственно малые» размеры. Но оба ученых считали, что в конечном теле имеется конечное, хотя и очень большое число точек. Измерение площадей и объемов сводилось у Пифагора и Демокрита к подсчету числа точек в фигуре. Эта точка зрения привела пифагорейцев к изучению «фигурных чисел» — «прямоугольных», «квадратных», «треугольных», «многоугольных» «телесных», «кубических», «пирамидальных» и т. д., т. е. чисел точек, расположенных в виде, соответственно, треугольников, квадратов и других фигур (рис. 1). «Прямоугольные числа» — это числа, которые могут быть представлены в виде произведения двух целых множителей, бóльших единицы; «телесные числа» — произведения трех множителей; «квадратные» и «кубические числа» мы и теперь называем квадратами и кубами. Суммируя свои конечные атомы в различных плоских фигурах и телах, Демокрит нашел формулы для площади круга, объема пирамиды, конуса и шара с помощью своеобразного приближенного интегрирования.

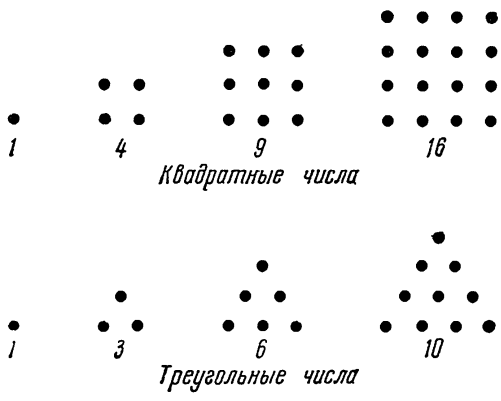


Рис. 1

Следующие определения Евклида: «линия — длина без ширины», «поверхность — длина и ширина без глубины» — также восходят к атомистическим представлениям; линия, которую Пифагор и Демокрит представляли как цепочку точек, считалась делимой в ее направлении, но неделимой «по ширине», так же как поверхность считалась делимой в двух направлениях, но неделимой «по глубине».

Весьма древними являются, по-видимому, и определения прямой линии и плоскости у Евклида: «прямая линия — такая, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам», «плоская поверхность — такая, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым линиям на ней». Далее приводятся определения угла, многоугольника, треугольника и четырехугольника и их видов, круга и его частей, параллельных линий. Параллельные прямые определялись как прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся между собой.

2.2. «Постулаты» Евклида. «Постулаты» Евклида по существу представляют собой правила построений с помощью идеальной линейки и идеального циркуля. Первые два постулата «всякие две точки можно соединить прямой линией» и «ограниченную прямую линию можно неограниченно продолжать» определяют действия с помощью идеальной линейки. Третий постулат «из всякого центра всяким радиусом можно описать окружность» определяют действия с помощью идеального циркуля [1]). Четвертый постулат «все прямые углы равны между собой» является излишним; как было замечено впоследствии, его нетрудно вывести из остальных аксиом. Последний постулат Евклида, его знаменитый V постулат, гласил: «Если прямая падает на две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых».

При формулировке этих постулатов мы встречаемся с равенством двух углов и со случаем, когда сумма двух углов меньше третьего. Эти соотношения определяются «общими понятиями» Евклида, по существу представляющими собой принципы измерения длин, углов, площадей и объемов. Их также пять: «равные одному и тому же равны между собой», «если к равным прибавить равные, суммы равны между собой», «если от равных отнять равные, остатки равны между собой», «совмещающиеся друг с другом равны между собой», «целое больше части». Четвертое из этих «общих понятий» дает критерий равенства прямолинейных отрезков и углов (мы видели, что этот критерий равенства применялся еще Фалесом), а также достаточное, хотя и не необходимое условие равенства площадей более сложных фигур, т. е. в применении к площадям эту четвертую аксиому следует понимать так: «совмещающиеся друг с другом фигуры равны между собой (по площади)». Равенство площадей многоугольников различной формы доказывалось с помощью присоединения к четвертому «общему понятию» первых трех [2]). Пятое «общее понятие» вместе с предыдущими дает критерий того, что одна фигура больше другой; например, чтобы установить, что сумма двух углов больше третьего, надо убедиться, что третий угол можно наложить на часть угла, составленного из двух первых углов.

Евклид понимал под решением задачи только построение с помощью идеального циркуля и идеальной линейки. В частности, для

---

[1]) Полный список «постулатов», на которых основано решение задач на построение с помощью циркуля и линейки, читатель найдет в статье: «О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки», стр. 208—209 настоящей книги ЭЭМ.

[2]) Полный список «постулатов», на которых основано вычисление площадей и изложение современного учения о площадях, читатель найдет в начале статьи «О площадях и объемах» в кн. V ЭЭМ.

Евклида найти площадь или объем означало построить циркулем и линейкой квадрат или куб, равный данной фигуре, т. е., как говорят, произвести «квадратуру» или «кубатуру» этой фигуры. Так как квадратура круга и кубатура круглых тел с помощью циркуля и линейки не удавались (и, как впоследствии было доказано Линдеманом, невозможны), Евклид не рассматривал ни площади круга, ни объемов круглых тел. Решение этих задач для многих плоских фигур и тел было произведено (вскоре после Евклида) Архимедом при помощи методов, восходящих к Демокриту.

«Начала» Евклида завершались построениями с помощью циркуля и линейки ребер пяти правильных многогранников, вписанных в сферу данного радиуса и исследованием полученных несоизмеримых величин.

2.3. Непрерывность у Евклида и его предшественников. Следует отметить, что хотя первые определения Евклида и носят следы атомистических представлений Пифагора и Демокрита, сам Евклид не разделял этих представлений. Евклид считал, что, например, любой отрезок можно с помощью его идеальных инструментов делить пополам неограниченное количество раз. Линии, поверхности и тела Евклид считал непрерывными и, в частности, неоднократно пользовался тем, что две прямые линии или окружности пересекаются, когда две точки одной из этих линий лежат по разные стороны от другой. Пифагор и Демокрит не владели понятием непрерывной величины; для них линии, поверхности и тела были совокупностями отдельных, дискретных точек. Аристотель определил непрерывную величину как такую величину, что если разбить ее на две части, эти части будут иметь общую границу (ср. в связи с этим текст на стр. 31). У Евклида нет этого замечательного определения, так как его определения, как мы отмечали, копируют старые, доаристотелевские образцы. Но Евклид, несомненно, считает линии, поверхности и тела непрерывными в смысле Аристотеля.

Определив непрерывную величину, Аристотель сделал вывод, что если дискретную величину можно рассматривать как множество точек, то непрерывную величину ни в коем случае нельзя рассматривать как множество неделимых элементов. Он, по-видимому, исходил из того, что если точки, как он считал, не имеют размеров, то две точки, непрерывно прилегающие друг к другу, сливаются в одну точку и, значит, тоже не имеют размеров; то же происходит и с тремя и с любым количеством точек, причем это утверждение, верное для конечного числа точек, Аристотель распространял на бесконечные множества точек. Поэтому Аристотель представлял себе линии не как множества точек, как Пифагор и Демокрит, а только как «места», где могут находиться точки. Отсюда и происходит наш термин «геометрическое место точек», который мы применяем к линиям или поверхностям, определенным теми или иными условиями: Аристотель и последующие математики не могли определить

эти линии или поверхности как множества точек, связанных данными условиями[1]). Евклид разделял точку зрения Аристотеля о том, что непрерывная величина не может состоять из неделимых.

Заметим, что если у Пифагора и Демокрита арифметика была слита с геометрией, Евклид всячески подчеркивает, что это принципиально различные науки и, например, изложив теорию пропорций непрерывных величин в V книге, доказывает снова те же теоремы для целочисленных пропорций в VII книге.

2.4. Движения. Движение (жесткое перемещение фигур) и, в частности, наложение, бывшее основным методом доказательства у Фалеса, играет существенную роль и у Евклида. Мы уже видели, что определение равенства фигур у Евклида основано на совмещении фигур. Евклид постоянно производит перенос отрезков с помощью циркуля, да и самое описывание прямых линий и окружностей с помощью линейки и циркуля производится с помощью движения. В XI книге «Начал» при определении сферы Евклид уже прямо определяет сферу как результат вращения полуокружности вокруг диаметра. Однако во всех случаях, когда Евклид может обойтись без использования движений, он так и поступает. Нет также у Евклида ни определения общего движения, ни определения вращения вокруг точки или вокруг оси.

Таким образом, мы видим, что для одних основных понятий геометрии — точки, линии, поверхности — Евклид воспроизводит традиционные определения, по существу, не применяющиеся, так как он не разделял тех представлений, в связи с которыми возникли эти определения; для других основных понятий геометрии, таких, как непрерывность и движение, которыми он постоянно пользуется, он вовсе не дает определений. Тем не менее в геометрии Евклида уже имелись совершенно определенные понятия о точке, не имеющей размеров, но имеющей определенное положение; о линии, являющейся результатом движения точки и, в частности, о прямой линии и окружности как о линиях, образуемых движением, производимым с помощью идеальной линейки или идеального циркуля; наконец, о поверхностях, получающихся в результате движения линий, и, в частности, о поверхностях вращения, получающихся в результате вращения линий.

---

[1]) Эти ошибочные представления Аристотеля и возникший в связи с ними бессодержательный термин «геометрическое место точек» до сих пор лежат тяжелым грузом на методике преподавания математики. В действительности понятие «геометрическое место точек» полностью совпадает с понятием «множества точек» (обладающих тем или иным свойством): любое множество точек является одновременно и «геометрическим местом точек» (а именно геометрическим местом точек, обладающих свойством принадлежать этому множеству). См. в связи с этим § 4 статьи «Общие принципы геометрических построений», стр. 182—183 этой книги ЭЭМ.

§ 3. Появление аксиоматического метода

3.1. Создание неевклидовой геометрии. Дальнейшее развитие геометрии пошло по пути критики Евклида. Одни математики критиковали Евклида за то, что он ограничивался рассмотрением только таких геометрических величин, которые можно построить с помощью циркуля и линейки, и поэтому не решал многих практически важных задач, как, например, определение площади круга и объемов круглых тел. Эти пробелы Евклида, как мы знаем, были восполнены Архимедом. Другие математики критиковали Евклида за то, что он разрывал геометрию и арифметику и понапрасну доказывал для целых чисел снова то, что он уже доказал раньше для геометрических величин. Третьи подвергали критике аксиомы Евклида, т. е. его «постулаты» и «общие понятия» и предлагали исключить некоторые аксиомы или, наоборот, добавить новые. Особенно большие споры вызвал наиболее сложный и наименее наглядный постулат Евклида — его V постулат. Многие математики считали, что этот постулат является лишним и его можно и непременно нужно доказать как теорему с помощью остальных аксиом. Другие считали, что следует заменить постулат Евклида более простым и наглядным постулатом. Одним из таких более простых постулатов, равносильных V постулату, является следующий: «Через точку вне прямой можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей данную прямую».

Критика Евклида, продолжавшаяся свыше двух тысяч лет, привела к двум важнейшим открытиям. Критика того разрыва между геометрией и арифметикой, который имелся у Евклида, привела к расширению понятия числа до действительного числа, которым теперь можно было характеризовать не только отношения соизмеримых геометрических величин, но и отношения несоизмеримых величин. Действительное число можно непрерывно изменять, вследствие чего введение действительных чисел в математику было равносильным введению в математику переменных величин. Этот величайший переворот в математике, связанный в первую очередь с именем Рене Декарта (XVII в.), непосредственно привел к открытию дифференциального и интегрального исчислений, являющихся математическим аппаратом механики и классической физики.

Споры по вопросу о V постулате привели к тому, что в начале XIX века Н. И. Лобачевский, Я. Бойяи и К. Ф. Гаусс построили новую геометрию [1]), в которой выполняются все аксиомы геометрии Евклида, за исключением V постулата, заменяющегося противоположным утверждением: «В плоскости через точку вне прямой можно провести более одной прямой, не пересекающей данную

[1]) См. статью о неевклидовых геометриях в кн. V ЭЭМ.

прямую».Эта геометрия оказалась столь же непротиворечивой, как и геометрия Евклида. Открытие неевклидовой геометрии опровергло мнение многих ученых, уверенных в том, что геометрия Евклида является единственной мыслимой геометрией, чуть ли не заложенной в нашем сознании до всякого знакомства с внешним миром. Появление новой геометрии поставило вопрос о том, какая геометрия имеет место в реальном мире: геометрия Евклида или геометрия Лобачевского. То бесспорное обстоятельство, что геометрия Евклида является отражением реального мира, не решает вопроса, так как отражение всегда является лишь приблизительным: так, например, эксперименты на малых участках земной поверхности согласуются с предположением о том, что поверхность Земли является плоскостью, и нужны эксперименты на больших участках, чтобы доказать, что более правильно представлять себе эту поверхность сферой. Аналогично этому, и геометрия Лобачевского в малых участках почти не отличается от геометрии Евклида, и отличие между ними проявляется только в больших участках пространства; поэтому сразу вслед за созданием геометрии Лобачевского возник вопрос о естественно-научных экспериментах в больших областях реального пространства, которые уточнили бы геометрическое строение мира, в котором мы живем[1]).

3.2. Аксиоматический метод в математике. Если концепция Декарта привела к переходу от математики постоянных величин к математике переменных величин, то открытие Лобачевского привело к переходу от математики постоянных отношений (например, взаимоотношений между точками, прямыми и плоскостями в геометрии Евклида) к математике переменных отношений; например, эти отношения могут быть заменены взаимоотношениями между точками, прямыми и плоскостями другой геометрии — геометрии Лобачевского. За геометрией Лобачевского возникли и другие непротиворечивые геометрии. Затем аналогичное изменение привычных отношений стало производиться и в других математических дисциплинах; например, наряду с обычной алгеброй появилось много новых алгебр. Возник целый ряд совершенно новых математических систем, не имеющих аналогов в классической математике, причем некоторые из этих систем были использованы в качестве математического аппарата различных областей современной физики.

К этим крупнейшим математическим открытиям ученые пришли, распространяя критику, которой Лобачевский, Бойяи и Гаусс подвергли одну из аксиом Евклида, V постулат, на всю систему аксиом

---

[1]) Впоследствии, уже в XX веке, вопрос о геометрических свойствах реального мира привел к появлению теории относительности Эйнштейна, коренным образом ломающей привычные геометрические представления.

евклидовой геометрии, а затем, перенося метод научного изложения с помощью аксиом на другие математические дисциплины. В результате сложился тот аксиоматический метод в математике, который ныне является подлинной основой как геометрии, так и других разделов современной математики.

Для того чтобы понять сущность аксиоматического метода, обратимся снова к геометрии. До открытия Лобачевского, когда было распространено мнение о том, что геометрия Евклида — единственно мыслимая геометрия, считалось, что эта геометрия описывает реальное, физическое пространство точно. Поэтому можно было пытаться определять основные геометрические понятия, указывая реальные прообразы этих понятий. Именно так и поступал Евклид и, по-видимому, его предшественники, начиная с Пифагора и Демокрита. Правда, мы видели, что представления о точках, линиях, поверхностях и их взаимоотношениях были совершенно различными у разных ученых, и даже в одно и то же определение «точка — то, что не имеет частей», разные ученые вкладывали различный смысл; мы видели также, что система определений и аксиом Евклида, воспроизводившая традиционные образцы, не отражала представлений самого Евклида и не охватывала важнейших понятий, которыми он пользовался.

Но после появления геометрии Лобачевского стало ясно, что путь, которым шел Евклид в своих определениях основных понятий, и принципиально невозможен. Если мыслимых геометрий много, то в каждой геометрии должны быть свои основные понятия и поэтому нельзя дать единые общие определения основных понятий. Иначе говоря, определения основных понятий должны зависеть от аксиом геометрической системы. Определения основных понятий той или иной геометрической системы должны относиться только к данной геометрической системе и не должны претендовать на определение основных понятий физического пространства, которое только с различной степенью точности отражается различными схемами геометрических пространств.

Так как единое определение основных понятий для всевозможных геометрий дать невозможно, то основные понятия геометрии следует определить как объекты любой природы, удовлетворяющие аксиомам этой геометрии. Только такое определение основных понятий геометрии соответствует абстрактному характеру этих понятий. В этом случае говорят, что геометрическая система определяется системой аксиом.

Таким образом, при аксиоматическом построении некоторой геометрической системы (или вообще при аксиоматическом построении некоторой математической теории) мы исходим из некоторой *системы аксиом,* или, как говорят, *аксиоматики.* В этих аксиомах описываются свойства основных понятий рассматриваемой геометрической системы, и мы можем представлять себе основные понятия в виде объектов любой природы, обладающих указанными в аксиомах свойствами.

Относительно самих этих основных понятий (вроде геометрических понятий «точка», «прямая линия» и др.) можно сказать, что они косвенно определяются аксиомами. Это — пример *дескриптивного определения* математического объекта, т. е. определения объекта описанием его свойств. Никакие другие определения этих основных понятий геометрической системы невозможны. Из аксиом мы выводим первые *теоремы*, из аксиом и уже доказанных теорем выводим все новые теоремы, которые и составляют здание рассматриваемой геометрической системы. Следовательно, *аксиомы — это первоначальные предложения об основных понятиях геометрии, которые принимаются в данной геометрической системе без доказательства и на основе которых доказываются все теоремы рассматриваемой геометрической системы.* Такую же роль играют аксиомы и в любой другой математической теории.

Евклид и его предшественники примерно так и понимали роль аксиом. Поскольку доказательство всякой теоремы геометрии представляет собой вывод ее из некоторых других (как правило, более простых) предложений, в результате многовекового развития геометрии выкристаллизовались первоначальные предложения, на основании которых доказывались остальные теоремы. Эти первоначальные предложения («основные понятия» и «постулаты» у Евклида) и были приняты за аксиомы. Из сказанного ясно, что аксиомы геометрии имеют опытное происхождение, т. е. отражают некоторые простые свойства реального пространства. Из сказанного ясно также, что в процессе исторического развития геометрии за аксиомы были приняты сравнительно простые, наглядно ясные предложения. Однако не следует считать, что аксиома — это простая истина, не требующая доказательства в силу своей очевидности. «Очевидность» — это понятие, чуждое аксиоматическому методу; простота же аксиом — это результат исторического развития науки и вопрос удобства. К тому же некоторые теоремы могут показаться «проще» некоторых аксиом. Например, V постулат Евклида, несомненно «сложнее» для понимания, чем некоторые первые теоремы геометрии.

§ 4. Модели

4.1. Модели евклидовой плоскости. Предположим, что некоторая геометрическая система (скажем, геометрия Евклида) задана с помощью аксиоматики (т. е. системы аксиом). Объекты, удовлетворяющие аксиомам такой геометрической системы, допускают различные конкретные истолкования; эти истолкования называются *интерпретациями* или *моделями* рассматриваемой геометрической системы.

Приведем некоторые простые примеры интерпретаций. Предположим, что мы уже имеем некоторую интерпретацию геометрии Евклида, например понимаем под геометрией Евклида то, что мы узнаем о ней

в школе. С помощью этой интерпретации мы сейчас построим другие интерпретации евклидовой геометрии.

Пусть r — некоторый отрезок. Условимся называть «точкой» всякий шар радиуса r, «прямой» — всякий бесконечный круговой цилиндр радиуса r и «плоскостью» — всякую полосу толщины $2r$, т. е. часть пространства, заключенную между двумя параллельными плоскостями, отстоящими друг от друга на расстоянии $2r$. Будем, далее, говорить, что «точка» лежит на «прямой», если соответствующий шар целиком заключается в цилиндре. Расстоянием между двумя «точками» будем называть расстояние между центрами соответствующих шаров. Очевидным образом можно определить теперь «углы», «отрезки», «треугольники», и т. д. Легко понять, что мы получаем таким образом новую интерпретацию евклидовой геометрии: все аксиомы (а значит, и теоремы) остаются в этой интерпретации справедливыми. Например, через любые две различные «точки» можно провести «прямую» и притом только одну (рис. 2).

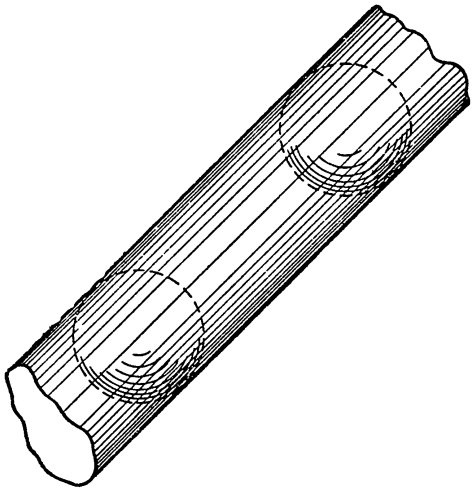


Рис. 2.

Другую интерпретацию евклидовой геометрии [1]) мы получим с помощью так называемой *стереографической проекции*. Мы ограничимся случаем геометрии на плоскости. Пусть Π — некоторая плоскость и S — не пересекающая ее сфера. Обозначим через N наиболее удаленную от плоскости Π точку сферы S. Если теперь A — произвольная точка плоскости Π, то мы обозначим через A' ту точку сферы S, в которой отрезок AN пересекает сферу S (рис. 3). Переход от точек A, B, ... плоскости Π к соответствующим точкам A', B', ... сферы S и называется стереографической проекцией. При стереографической проекции плоскость Π переходит в множество Π', которое получается, если из сферы S удалить («выколоть») точку N.

Если теперь l — некоторая прямая на плоскости Π, то при стереографической проекции она переходит в проходящую через точку N окружность l' (из которой удалена точка N). Действительно, если точка A пробегает прямую l, то все отрезки AN лежат в одной плоскости (рис. 4), которая в пересечении со сферой S и определяет окружность l'.

---

[1]) Еще две модели, связанные с начертательной геометрией, читатель найдет в статье «Методы изображений» (см. стр. 228—290 этой книги ЭЭМ).

Будем теперь называть множество Π' «плоскостью», каждую его точку (т. е. отличную от N точку сферы S) — «точкой», а каждую проходящую через точку N окружность на сфере S (с удаленной

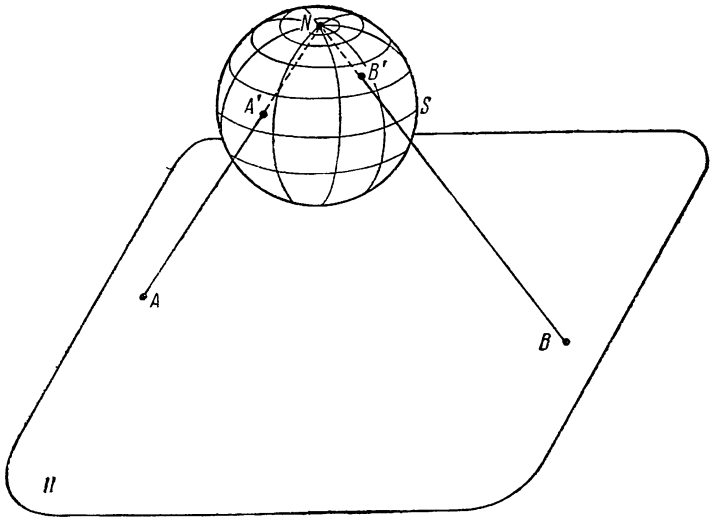


Рис. 3

точкой N) — «прямой линией». «Расстоянием» между «точками» A' и B' будем называть обычное расстояние между соответствующими им

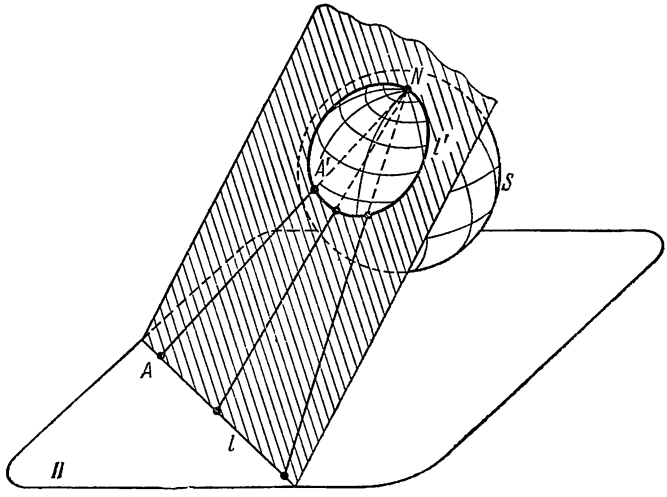


Рис. 4.

точками A и B на плоскости Π. Иначе говоря, все геометрические объекты плоскости Π мы перенесем с помощью стереографической проекции на «плоскость» Π'. Ясно, что при этом сохранятся все

аксиомы и теоремы евклидовой геометрии, т. е. «плоскость» Π' представляет собой модель (или интерпретацию) евклидовой плоскости. Можно доказать, что в этой интерпретации «угол» между двумя пересекающимися «прямыми» l'_1 и l'_2 равен обычному углу между касательными, проведенными к окружностям l_1 и l_2 в точке их пересечения (рис. 5). Далее, две «прямые» в том и только в том случае параллельны, если изображающие их окружности не имеют общих точек, отличных от N, т. е. касаются друг друга в точке N. Из этого наглядно ясно, что на нашей модели выполняется V постулат Евклида.

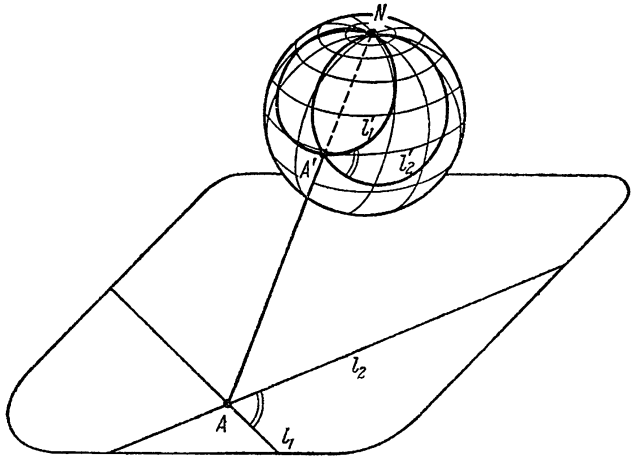


Рис. 5.

Из построенной модели легко получить еще одну модель евклидовой плоскости. Именно, обозначим через P точку сферы S (рис. 6), ближайшую к плоскости Π. Далее, для любой «точки» A' «плоскости» Π' мы обозначим через A'' точку пересечения плоскости Π с прямой PA'. Эта точка пересечения однозначно определяется, если точка A' отлична от P. Если же точка A' совпадает с P, то мы будем считать, что соответствующая точка A'' «находится в бесконечности», считая таким образом, что к плоскости Π присоединена одна «бесконечно удаленная» точка [1]).

Обозначим через O точку пересечения прямой NP с плоскостью Π. Обозначим, далее, через Π'' плоскость Π, из которой удалена точка O, но присоединена «бесконечно удаленная» точка. Далее, когда «точка» A' пробегает на «плоскости» Π' некоторую «прямую» l', соответствующая точка A'' описывает на плоскости Π некоторую проходящую через точку O окружность (рис. 6), из которой удалена точка O. Если «прямая» l' проходит через точку P (рис. 7), то окружность, описываемая точкой A'', пре-

[1]) Получающийся образ (плоскость с присоединенной к ней «бесконечно удаленной» точкой) называется *расширенной* или *круговой плоскостью*; она рассматривается в статье «Геометрические преобразования» (см. стр. 57—59 этой книги ЭЭМ) и в статье «Окружности» (стр. 448—517).

вращается в прямую линию, проходящую через точку O (рис. 7; из этой прямой удалена точка O, но присоединена «бесконечно удаленная» точка).

Из сказанного ясно, что мы получаем следующую интерпретацию евклидовой плоскости. Будем называть «плоскостью» множество Π'', все его точки

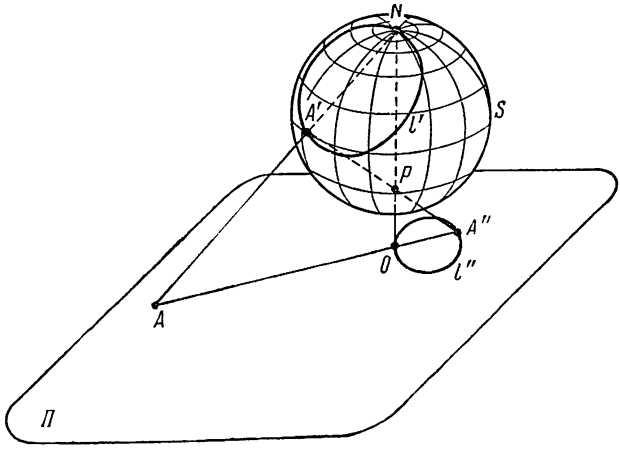


Рис. 6.

(включая «бесконечно удаленную») — «точками», а «прямыми» будем называть все окружности, проходящие через точку O (из которых удалена точка O, а также все прямые, проходящие через O (из этих прямых удаляется

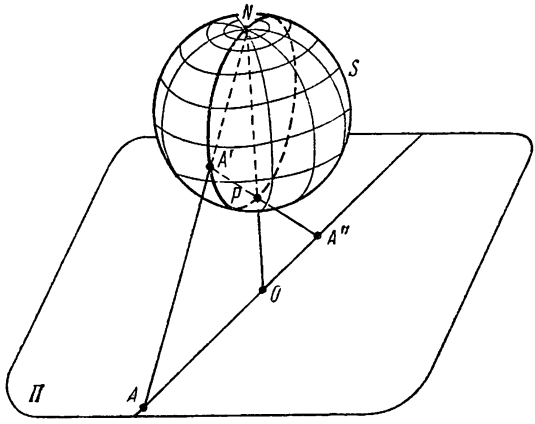


Рис. 7.

точка O, но присоединяется «бесконечно удаленная» точка). На рис. 8 показаны «прямые» в этой модели. Можно доказать, что в этой модели «угол» между двумя пересекающимися «прямыми» равен обычному углу между касательными, проведенными к окружностям в точке их пересечения (рис. 9). Далее, «прямые» в том и только в том случае «параллельны»,

если изображающие их окружности касаются в точке O (рис. 10). Из этого наглядно ясно, что на рассматриваемой модели выполняется V постулат. Справедливы на этой модели также и другие аксиомы

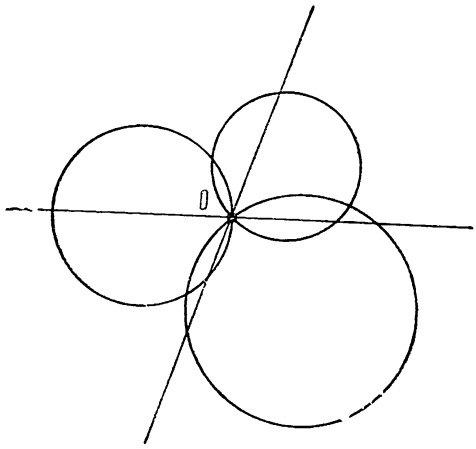


Рис. 8.

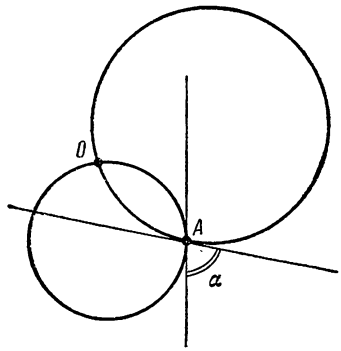


Рис. 9.

и теоремы евклидовой планиметрии. Например, сумма «углов» любого «треугольника» (рис. 11) равна $2d$ (что можно доказать и непосредственно).

Читатель, знакомый с преобразованием, называемым *инверсией* [1]), может легко понять, как связаны между собой модель Π'' и плоскость Π. Инверсия с центром в точке O переводит прямые линии плоскости Π в окружности, проходящие через точку O, т. е. в «прямые на модели Π''. Этим и устанавливается связь между указанными двумя моделями.

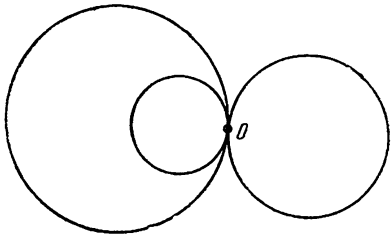


Рис. 10.

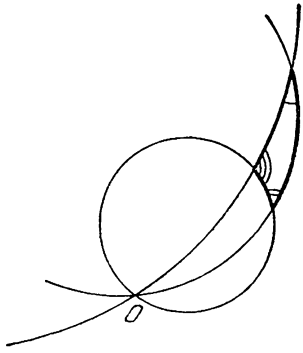


Рис. 11.

Еще две модели евклидовой плоскости можно получить с использованием комплексных чисел.

Очевидно, что все аксиомы и теоремы евклидовой геометрии на плоскости выполняются, если считать «точками» комплексные числа («точки

---

[1]) См. в этой книге ЭЭМ статьи «Геометрические преобразования», стр. 56—59, 74—75, и «Окружности», стр. 468—474.

плоскости комплексного переменного»), «прямыми» — множества комплексных чисел вида $z=z_0+lt$, где z_0 и l — фиксированные комплексные числа, а t — действительный параметр ($l\neq 0$), а «расстояние» между «точками», изображаемыми комплексными числами z и w, положить равным $|z-w|$. Нетрудно проверить также, что все аксиомы и теоремы планиметрии Евклида выполняются на «плоскости комплексного переменного», расширенной введением «комплексного числа» ∞ (бесконечность), если считать «точками» все комплексные числа, кроме числа 0 (но включая «число» ∞), а «прямыми» — все окружности и прямые плоскости комплексного переменного, проходящие через точку O. Например, через всякие две «точки» A и B проходит единственная «прямая»: если A и B — обычные точки, то эта «прямая» — окружность, проходящая через точки A, B и O, а если точка B — бесконечно удаленная, то эта «прямая» — обычная прямая, соединяющая точки O и A. «Расстояние» между «точками», изображаемыми комплексными числами z и w, в этом случае равно $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{w}\right|$. Очевидно, что эта модель (по существу совпадающая с описанной выше моделью П″) получается из обычной плоскости комплексного переменного, если заменить каждое комплексное число z числом $\frac{1}{z}$.

4.2. Аксиоматические системы в алгебре. С примерами аксиоматик и их интерпретаций мы встречаемся не только в геометрии, но и в других разделах математики. В тех областях математики, где рассматриваются алгебраические операции, одним из важнейших понятий является понятие «группы». *Группой* называется система объектов любой природы, называемых «элементами группы», в которой с каждыми двумя элементами a, b, взятыми в определенном порядке, сопоставлен некоторый элемент $c=ab$, называемый их *произведением.* При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы:

1°. Операция умножения подчиняется ассоциативному закону, т. е. $a(bc)=(ab)c$ для любых трех элементов a, b, c.

2°. Для любых элементов a, b уравнения $ax=b$, $ya=b$ разрешимы, т. е. существуют такие элементы c и d, что $ac=b$ и $da=b$ (закон обратимости).

Таким образом, каждая конкретная группа является интерпретацией (или моделью) для этой аксиоматики. Группа называется *коммутативной,* если выполнена следующая дополнительная аксиома:

3°. Умножение коммутативно, т. е. $ab=ba$ для любых двух элементов a, b.

В коммутативной группе операцию часто называют не умножением, а *сложением* (т. е. вместо ab пишут $a+b$).

Примером группы может служить множество всех целых чисел. Другими примерами являются: множество всех действительных чисел, множество всех комплексных чисел, множество всех векторов[1]). Все

[1]) См. в этой книге ЭЭМ статью «Векторы и их применения в геометрии».

эти группы коммутативны (операция — сложение). Другие примеры групп, а также простейшие теоремы о группах (выводимые из перечисленных выше аксиом) читатель может найти в кн. I ЭЭМ (стр. 100—108).

Рациональные, действительные и комплексные числа дают нам пример более сложной алгебраической системы, — *поля*. В поле со всякими двумя элементами a и b, взятыми в определенном порядке, сопоставлены два элемента $c=a+b$ и $d=ab$ той же системы, причем удовлетворяются следующие аксиомы (см. ЭЭМ, кн. I, стр. 113—120):

1°. Элементы системы образуют коммутативную группу, если групповой операцией считать сложение.

2°. Элементы системы без нуля [1]) образуют коммутативную группу, если групповой операцией считать умножение.

3°. Сложение и умножение элементов связаны *дистрибутивным законом:* $a(b+c)=ab+ac$.

Аксиомы поля также допускают большое число самых разнообразных интерпретаций.

В первых томах настоящего издания читатель может найти и ряд других аксиоматик: аксиомы натуральных чисел (ЭЭМ, кн. I, стр. 133—135), аксиомы метрического пространства (ЭЭМ, кн. III, стр. 266) и др.

§ 5. Непротиворечивость и полнота аксиоматики

5.1. Непротиворечивость аксиоматики. При рассмотрении аксиоматики весьма важным вопросом является выяснение ее *непротиворечивости*. Поясним, что под этим понимается. Пусть мы имеем некоторую систему аксиом, например аксиомы группы. Из этих аксиом мы можем выводить все новые и новые теоремы. Если при этом могут быть получены две теоремы, противоречащие друг другу, то аксиоматика называется *противоречивой*. Разумеется, аксиоматика только в том случае может быть положена в основу некоторой содержательной математической теории, если она не является противоречивой. Возникает естественный вопрос: каким образом можно убедиться в том, что некоторая аксиоматика непротиворечива? Например, является ли непротиворечивой аксиоматика группы? Тот факт, что аксиомы группы сформулированы много десятилетий назад и до сих пор не обнаружено противоречий, конечно, не может нас убедить в непротиворечивости этой аксиоматики — кто знает, может быть такие противоречия будут обнаружены через несколько лет! Иначе говоря, сколько бы мы ни развивали теорию на основе выбранной аксиоматики, мы, строго говоря, никогда не можем до конца быть уверенными в том, что выбранная аксиоматика непротиворечива. Внутри самой теории

---

[1]) Напомним, что *нулем* коммутативной руппы называется такой элемент 0, что $a+0=a$ для любого элемента a.

обнаружить отсутствие в ней «внутренних противоречий» невозможно (строгое доказательство этого утверждения было дано не так давно видным американским логиком Куртом Гёделем).

Однако существует прием, позволяющий до некоторой степени судить о непротиворечивости аксиоматики. Этот прием заключается в следующем. Предположим, что в нашем распоряжении имеется некоторая математическая теория — назовем ее «теория *А*», — в истинности которой мы не сомневаемся. Предположим далее, что нам задана некоторая аксиоматика, на основе которой мы должны построить другую математическую теорию — «теорию *Б*». Ясно, что если мы сможем, пользуясь понятиями, имеющимися в «теории *А*», построить некоторую модель, в которой выполняются все заданные аксиомы, лежащие в основе «теории *Б*», то тем самым непротиворечивость лежащей в основе «теории *Б*» аксиоматики будет установлена. Иначе говоря, *если мы условимся считать «теорию А» «истинной» и если, пользуясь «материалом» «теории А», мы сможем построить модель (интерпретацию) для аксиоматики «теории Б», то непротиворечивость этой аксиоматики будет тем самым установлена.*

Выше (стр. 19) мы говорили о том, что геометрия Лобачевского «столь же непротиворечива, как и геометрия Евклида». Какой смысл имеет это утверждение? Оказывается, что, пользуясь «материалом» геометрии Евклида, можно построить модель геометрии Лобачевского (впервые такая модель была построена итальянским геометром Э. Бельтрами и немецким математиком Ф. Клейном уже после смерти самого Лобачевского), и наоборот, пользуясь «материалом» геометрии Лобачевского, можно построить модель геометрии Евклида (такая модель была построена Лобачевским). Следовательно, из непротиворечивости одной из этих геометрий вытекает непротиворечивость второй, и обратно [1]).

Из сказанного видно, что непротиворечивость может иметь только *условный* смысл: для доказательства непротиворечивости аксиоматики мы должны построить модель, а для возможности построения модели нужно иметь какой-то «строительный материал», т. е. нужно иметь некоторую теорию, в истинности которой мы не сомневаемся. Наиболее простой математической теорией является *арифметика рациональных* [2]) *чисел* (т. е. чисел целых и дробных, положительных и

[1]) См. статью о неевклидовых геометриях в кн. V ЭЭМ.

[2]) Непротиворечивость аксиоматики поля рациональных чисел сводится к непротиворечивости аксиоматики натуральных чисел (так как каждое положительное рациональное число $\frac{m}{n}$ изображается парой натуральных чисел m, n). Непротиворечивость системы аксиом натуральных чисел уже нельзя доказать таким же образом. Впрочем, в этой непротиворечивости нас достаточно убеждает многовековой опыт человечества, постоянно пользующегося натуральными числами.

отрицательных). На «истинность» (т. е. непротиворечивость) этой теории мы будем безоговорочно ссылаться, и с ее помощью будем строить модели других теорий. Итак, *мы будем считать аксиоматику непротиворечивой, если для нее можно построить модель, исходя из арифметики рациональных чисел.*

Теперь ясно, например, что аксиоматика группы непротиворечива: множество всех целых чисел представляет собой модель группы. Другой моделью может служить множество всех рациональных чисел. Непротиворечивой является и аксиоматика поля: моделью поля может служить множество всех рациональных чисел.

5.2. Полнота системы аксиом. Весьма важным является и другое свойство аксиоматики — свойство *полноты*. Для объяснения того, что такое полнота системы аксиом, нужно ввести понятие *изоморфизма* двух моделей. Предположим, что задана некоторая аксиоматика, в которой указываются основные понятия и перечисляются их свойства. Предположим далее, что для этой аксиоматики построены две модели. Эти модели называются *изоморфными*, если между элементами (т. е. основными понятиями) одной модели и элементами другой модели можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором сохраняются фигурирующие в аксиомах основные отношения элементов. Например, множество всех целых чисел и множество всех рациональных чисел представляют собой две модели группы. Эти модели не изоморфны между собой. Если же мы возьмем группу всех целых чисел и группу всех целых чисел, делящихся на 10 (операция — сложение), то эти группы оказываются изоморфными между собой. Действительно, ставя в соответствие каждому числу n число $10n$, мы получаем взаимно однозначное соответствие между этими моделями, при котором сохраняются фигурирующие в аксиомах группы отношения (т. е. сумма элементов переходит в сумму). Изоморфными между собой являются также приведенные в предыдущем параграфе модели евклидовой плоскости[1]).

Система аксиом называется *полной*, если всякие две ее интерпретации изоморфны между собой. Например, аксиоматика группы не является полной (так как существуют не изоморфные между собой группы). Не является полной также и аксиоматика поля.

В качестве примера полной системы аксиом мы приведем аксиоматику поля действительных чисел. Именно поле действительных чисел можно определить как множество объектов любой природы, называемых «числами» и удовлетворяющих следующим аксиомам:

1° (аксиома поля). Во множестве определены операции сложения и умножения чисел, по отношению к которым это множество является полем.

2° (аксиома порядка). Для всяких двух различных чисел a и b справедливо одно из двух отношений $a>b$, $b>a$, причем если $a>b$

[1]) О понятии изоформизма см. также ЭЭМ, кн. I., стр. 120—125.

и $b>c$, то $a>c$ (отношение «>» транзитивно), и если $a>b$, то $a+c>b+c$ при любом c, а при $c>0$ имеем $ac>bc$.

3° (аксиома непрерывности). Если все числа разделены на два класса таким образом, что всякое число II класса больше всякого числа I класса, то существует или такое число I класса, которое больше всех остальных чисел этого класса, или такое число II класса, что все остальные числа этого класса больше его.

Заметим, что приведенная нами аксиома непрерывности является точной математической формулировкой определения непрерывности Аристотеля (см. § 1); однако, вопреки запрету Аристотеля, непрерывное поле действительных чисел состоит из неделимых элементов — чисел, составляющих бесконечное множество. Аксиома непрерывности в этой формулировке была предложена Р. Дедекиндом.

Можно было бы доказать, что аксиома Дедекинда может быть заменена (при наличии первых двух аксиом) аксиомой Архимеда (ЭЭМ, кн. I, стр. 131) и аксиомой полноты (ЭЭМ, кн. I, стр. 198). Аксиома непрерывности (в любой форме) делает возможным построение теории пределов, изучение непрерывных функций и т. д.

Непротиворечивость аксиом поля действительных чисел можно было бы доказать с помощью модели этого поля, построенной из «материала» поля рациональных чисел. Обычно это делается с помощью *сечений* в поле рациональных чисел. Мы не будем проводить здесь это построение, отсылая читателя к курсам математического анализа.

Отметим, что аксиоматика поля действительных чисел является *полной*: всякие две модели поля действительных чисел изоморфны между собой. Именно, всякую модель поля действительных чисел можно поставить во взаимно однозначное соответствие, например, с бесконечными десятичными дробями, причем при этом соответствии сохраняются арифметические действия, отношение «>» (отношение «больше») и непрерывность. В самом деле, в произвольной модели поля действительных чисел определены числа 0 и 1. С помощью сложения мы можем определить все натуральные числа, а числа, противоположные натуральным, представят собой отрицательные целые числа; определенные нами целые числа попарно различны. Рассмотрим теперь произвольное число x из рассматриваемой модели. Если число x совпадает с целым числом n_0, то мы поставим в соответствие числу x бесконечную десятичную дробь $(n_0-1),999\ldots$ Если же число x не является целым, то в силу аксиомы 2° и аксиомы Архимеда (вытекающей из аксиомы 3°) найдется такое целое число n_0, что $n_0+1>x>n_0$. Далее, деля 1 на 10, мы получим число $\frac{1}{10}$ и с помощью сложения построим числа $n_0+\frac{1}{10}$, $n_0+\frac{2}{10}$, $\ldots, n_0+\frac{9}{10}$. Если число x не совпадает ни с одним из этих чисел, то в силу аксиомы 2° найдется такое натуральное число $n_1<10$, что $n_0+\frac{n_1+1}{10}>x>n_0+\frac{n_1}{10}$. Продолжая таким образом, мы получим, что наше число x либо совпадет с некоторой конечной десятичной дробью $n_0, n_1 n_2 \ldots n_k$ — тогда поставим в соответствие числу x бесконечную десятичную дробь

$$n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k-1}(n_k-1)\,999\ldots,$$

либо же существует такая бесконечная десятичная дробь $n_0, n_1 n_2 n_3 \ldots$, что при любом k

$$n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k-1}(n_k+1) > x > n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k-1} n_k;$$

в этом случае в силу аксиомы 3° число x должно быть поставлено в соответствие указанной бесконечной десятичной дроби. Это соответствие устанавливает изоморфизм рассматриваемой модели и модели, построенной из бесконечных десятичных дробей.

§ 6. Аксиоматика геометрии

6.1. Основные понятия геометрии Евклида. Теперь мы можем дать точное определение «пространства Евклида», т. е. той математической схемы, которая является отражением реального, физического пространства и по существу была разработана в «Началах» Евклида.

Дать определение пространства Евклида — это значит, как мы теперь знаем, дать систему его аксиом, т. е. основных предложений, которые справедливы в геометрии Евклида и из которых можно логически вывести все остальные предложения этой геометрии. Система этих аксиом должна быть непротиворечивой и полной (т. е. все модели, на которых выполняется эта система аксиом, должны быть изоморфными между собой).

Пространство Евклида можно определить как совокупность объектов трех родов, называемых «точками», «прямыми» и «плоскостями», и преобразований, переводящих совокупность всех точек в себя, называемых «движениями»; между этими объектами определены соотношения «точка лежит на прямой» (или «прямая проходит через точку»), «точка лежит на плоскости», «прямая лежит на плоскости», «точка лежит между двумя другими точками», причем указанные объекты и соотношения удовлетворяют перечисленным ниже аксиомам. Одновременно с изложением аксиоматики мы будем формулировать некоторые новые понятия и доказывать простые теоремы — без этого изложение аксиоматики было бы затруднительным.

6.2. Аксиомы принадлежности.

1°. *Через каждые две различные точки проходит прямая и притом только одна.*

2°. *На каждой прямой имеются по крайней мере две точки.*

3°. *Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

4°. *Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость и притом только одна.*

5°. *На каждой плоскости имеется по крайней мере одна точка.*

6°. *Если две точки лежат на плоскости, то и проходящая через них прямая лежит на этой плоскости.*

7°. *Если две плоскости имеют общую точку, они имеют по крайней мере еще одну общую точку.*

8°. *Существуют четыре точки, не лежащие на одной плоскости.*

В дальнейшем прямая, проходящая через точки A и B, называется прямой AB, а плоскость, проходящая через точки A, B и C, называется плоскостью ABC.

Из сформулированных аксиом уже вытекают некоторые первые теоремы геометрии. Приведем пример.

Теорема 1. *На каждой плоскости можно найти три точки, не лежащие на одной прямой.*

Доказательство. Пусть α — некоторая плоскость и A — лежащая в этой плоскости точка (аксиома 5°). Пусть, далее, M, N, P — три точки, не лежащие на одной прямой (аксиома 3°). Так как все точки M, N, P различны, то среди них найдется точка, отличная от A. Пусть, например, $M \neq A$. Так как точки M, N, P не лежат на одной прямой, то хотя бы одна из точек N, P не лежит на прямой MA. Пусть, например, точка N не лежит на прямой MA. Тогда точки A, M, N не лежат на одной прямой. Действительно, если бы A, M, N лежали на одной прямой, то этой прямой являлась бы прямая MA (в силу аксиомы 1°); но точка N не лежит на этой прямой.

Так как точки A, M, N не лежат на одной прямой, то в силу аксиомы 4° через них проходит (единственная) плоскость. Если плоскость AMN совпадает с α, то тем самым в плоскости α найдены три точки A, M, N, не лежащие на одной прямой. Если же плоскость AMN не совпадает с α, то эти плоскости имеют отличную от A общую точку B (аксиома 7°). Таким образом, в плоскости α существуют *две* различные точки A, B.

Пусть теперь T, U, V, W — четыре точки, не лежащие в одной плоскости (аксиома 8°). Среди них обязательно найдется точка, не лежащая на прямой AB. Действительно, если бы точки T, U, V, W лежали на прямой AB, то все они лежали бы в плоскости α (аксиома 6°), чего не может быть. Пусть T не лежит на прямой AB. Тогда три точки A, B, T лежат в одной плоскости. Среди точек U, V, W хотя бы одна не лежит в плоскости ABT (иначе T, U, V, W лежали бы в одной плоскости ABT). Пусть, например, U не лежит в плоскости ABT. Тогда точки A, B, T, U не лежат в одной плоскости. Действительно, если бы A, B, T, U лежали в одной плоскости, то этой плоскостью могла бы быть только плоскость ABT (в силу аксиомы 4°); но точка U не лежит в плоскости ABT.

Заметим еще, что точки A, T, U не лежат на одной прямой. Действительно, если бы точки A, T, U лежали на одной прямой, то эта прямая совпадала бы с прямой AT (аксиома 1°), и потому точка U лежала бы в плоскости ABT (аксиома 6°), что места не имеет.

Так как точки A, T, U не лежат на одной прямой, то через них проходит плоскость (аксиома 4°). Плоскость ATU не может совпадать с плоскостью α, так как иначе все четыре точки A, B, T, U

лежали бы в одной плоскости α. В силу аксиомы 7° плоскости α и ATU имеют общую точку, отличную от A. Обозначим эту общую точку через C. Таким образом, точки A, B, C лежат в плоскости α. Покажем, что эти точки не лежат на одной прямой. В самом деле, если бы точки A, B, C лежали на одной прямой, то эта прямая совпадала бы с AC (аксиома 1°), и потому в силу аксиомы 6° лежала бы в плоскости ATU (ибо эта плоскость содержит точки A и C), т. е. точка B лежала бы в плоскости ATU. Но это противоречит тому, что точки A, B, T, U не лежат в одной плоскости. Полученное противоречие доказывает, что точки A, B, C не лежат на одной прямой.

6.3. Аксиомы порядка.

9°. *Из любых трех различных точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.*

10°. *Для всяких двух точек прямой существует на этой прямой такая третья точка, что вторая точка лежит между первой и третьей.*

Прежде чем сформулировать третью аксиому порядка (аксиома 11°) мы введем понятие *отрезка*. Именно, если A и B — две различные точки, то *отрезком с концами A и B* (или, коротко, отрезком AB) называется множество, состоящее из точек A, B и всех точек прямой AB, расположенных между A и B.

11°. *Если прямая l, лежащая в плоскости ABC, не проходит ни через одну из точек A, B, C и содержит одну точку отрезка AB, то она имеет общую точку хотя бы с одним из отрезков AC, BC.*

Эта аксиома называется *аксиомой Паша* — по имени немецкого ученого, впервые сформулировавшего эту аксиому.

Пользуясь аксиомами порядка, можно доказать некоторые дальнейшие теоремы.

Теорема 2. *Для всяких двух различных точек A, B существует точка, лежащая между ними.*

Доказательство. Пусть C — точка, не лежащая на прямой AB (такая существует в силу аксиомы 3°). В силу аксиомы 10° существует на прямой AC такая точка D, что C лежит между A и D. Точка D не совпадает с B, так как иначе две различные прямые AB, AC имели две общие точки A, B, что невозможно (аксиома 1°). В силу аксиомы 10° существует на прямой BD такая точка E, что B лежит между D и E. Прямая CE не проходит ни через одну из точек A, B, D. (Если бы, например, прямая CE проходила через A, то она совпадала бы с прямой AC; следовательно, точки A, C, D, E лежали бы на одной прямой; на этой же прямой DE лежала бы и точка B, т. е. точки A, B, C лежали бы на одной прямой, что невозможно.) Так как прямая CE имеет с отрезком AD общую точку C, то она имеет общую точку с одним из отрезков AB, BD

(аксиома 11°). Так как точка B лежит между D и E, то точка E не лежит на отрезке BD (аксиома 9°). Если мы допустим, что прямая CE имеет общую точку F с отрезком BD, то $F \neq E$ (ибо E не лежит на отрезке BD), и потому прямые CE и BD имеют две общие точки E, F. Но тогда прямые CE и BD совпадают (аксиома 1°), что невозможно. Итак, прямая CE не может иметь общие точки с отрезком BD, и потому в силу сказанного выше она должна иметь общую точку H с отрезком AB. Эта точка H отлична от A и B (так как прямая CE не проходит через точки A, B). Таким образом, на отрезке AB существует точка H, отличная от A и B, т. е. существует точка H, лежащая между A и B.

Из приведенных доказательств теорем 1 и 2 ясно видно, что собой представляют доказательства с помощью аксиом. Эти доказательства не нуждаются в пояснительном чертеже и не предполагают, что мы представляем себе некоторую модель геометрии Евклида. Это и понятно, ведь в аксиомах перечисляется все, что мы должны знать об основных понятиях геометрии. Ясно также, что перечень аксиом у Евклида является далеко не полным (помимо того, что смысл его первых определений весьма туманный): Евклид существенно пользовался чертежом при доказательствах, и такое предложение, как аксиома 11°, для него было очевидным (прямая, входящая в треугольник через одну его сторону, должна выйти из треугольника через вторую или третью сторону). Таким образом, хотя у Евклида имеются начала аксиоматического метода, но при доказательствах Евклид неявно пользуется «очевидными» свойствами, не перечисленными в его аксиомах.

Имея в виду, что читатель ясно представил себе характер доказательств, проводимых на основании аксиом, мы не будем утруждать его дальнейшими доказательствами, а ограничимся формулировками теорем, которые можно доказать с помощью аксиом 1°—11° и уже доказанных теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Если прямая l, лежащая в плоскости ABC, не проходит ни через одну из точек A, B, C, то хотя бы с одним из отрезков AB, BC, AC она не имеет общих точек.*

Теорема 4. *Любые n различных точек прямой можно так занумеровать числами* 1, 2, 3, ..., n, *что если $i<j<k$ (или $i>j>k$), то j-я точка лежит между i-й и k-й точками.*

Для того чтобы сформулировать теорему 5, определим *луч*. Пусть O и A — две различные точки. Лучом $\overrightarrow{OA}$ мы будем называть множество, состоящее из всех точек M прямой OA, для которых O не лежит между A и M (точки O и A также принадлежат лучу $\overrightarrow{OA}$).

Теорема 5. *Всякая точка O, взятая на прямой l, разбивает эту прямую на два луча. Более подробно: существуют на прямой l такие точки A и B, что лучи $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют*

единственную общую точку O, а взятые вместе составляют всю прямую l.

Определим теперь понятие *полуплоскости*. Пусть l — прямая, расположенная на плоскости α, и A — точка плоскости α, не лежащая на прямой l. Полуплоскостью lA мы будем называть множество, состоящее из всех точек прямой l, точки A и всех тех точек M плоскости α, для которых отрезок AM не имеет общих точек с прямой l.

Теорема 6. *Всякая прямая l, лежащая на плоскости* α, *разбивает эту плоскость на две полуплоскости. Более подробно: существуют на плоскости* α *такие точки A и B (не лежащие на прямой l), что полуплоскости lA и lB составляют, вместе взятые, всю плоскость* α, *и имеют своим пересечением прямую l (т. е. точка N в том и только в том случае принадлежит обеим плоскостям lA, lB, если она лежит на прямой l).*

Совершенно аналогично определяется *полупространство* и устанавливается, что всякая плоскость разбивает пространство (т. е. множество всех вообще точек) на два полупространства.

Наконец, введем еще понятие *репера* (от французского слова repère — метка, ориентир), необходимое для формулировки следующих аксиом. Пусть O — произвольная точка, l — проходящая через нее прямая и α — плоскость, содержащая прямую l. Выберем один из двух лучей, определяемых на прямой l точкой O (теорема 5); обозначим его через l'. Выберем, далее, одну из двух полуплоскостей, определяемых на плоскости α прямой l (теорема 6); обозначим ее через α'. Наконец, выберем одно из двух полупространств, определяемых плоскостью α; его обозначим через Γ'. Совокупность $(O, l', \alpha', \Gamma')$ мы и будем называть репером.

Легко видеть, что задание упорядоченной четверки точек (O, A, B, C), не лежащих в одной плоскости, определяет однозначно некоторый репер. Именно, обозначим через l прямую OA, а через l' — луч $\overrightarrow{OA}$. Далее обозначим через α плоскость OAB, а через α' — полуплоскость lB. Наконец, через Γ' обозначим то из двух полупространств, определяемых плоскостью α, которое содержит точку C. Полученный репер $(O, l', \alpha', \Gamma')$ мы будем называть репером, *определяемым* упорядоченной четверкой точек (O, A, B, C).

6.4. Аксиомы движения [1]).

12°. *Всякое движение является взаимно однозначным отображением пространства на себя. Более подробно: если f — произвольное движение, то любые различные точки переводятся движением f в различные точки (т. е. если* $A \neq B$, *то* $f(A) \neq f(B)$*); кроме того, для любой точки M найдется такая точка N, что* $f(N) = M$.

---

[1]) О роли движений в геометрии см. также статью «Геометрические преобразования» в этой книге ЭЭМ (стр. 98 и след).

13°. *Пусть f — произвольное движение. Тогда, если точки A, B, C расположены на одной прямой, причем C лежит между A и B, то точки $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ также расположены на одной прямой, причем точка $f(C)$ лежит между $f(A)$ и $f(B)$.*

С помощью этих аксиом доказываются следующие теоремы:

Теорема 7. *Если f — произвольное движение и A, B, C, D — четыре произвольные точки, то точки $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$, $f(D)$ в том и только в том случае лежат в одной плоскости, если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.*

Теорема 8. *Если f — произвольное движение и A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, то точки $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ не лежат на одной прямой.*

Теорема 9. *При всяком движении прямая переходит в прямую, плоскость — в плоскость, луч — в луч, полуплоскость — в полуплоскость, полупространство — в полупространство и, следовательно, репер переходит в репер.*

Теперь мы сформулируем еще две аксиомы.

14°. *Два движения, произведенные одно за другим, равносильны некоторому одному движению.*

15°. *Для всяких двух реперов, взятых в определенном порядке, существует одно и только одно движение, переводящее первый репер во второй.*

Рассмотрение движений позволяет говорить о «равенстве» геометрических фигур: две фигуры *равны*, если одну из них можно перевести в другую с помощью некоторого движения. Таким образом, мы получаем возможность говорить о равных отрезках, равных треугольниках и т. д.

6.5. Аксиомы непрерывности.

16° (аксиома Архимеда). *Пусть A_0, A_1, B — три точки, лежащие на одной прямой, причем точка A_1 находится между A_0 и B. Пусть, далее, f — движение, переводящее точку A_0 в A_1 и луч $\overrightarrow{A_0B}$ — в луч $\overrightarrow{A_1B}$. Положим*

$$f(A_1)=A_2,\ f(A_2)=A_3,\ \ldots$$

Тогда существует такое натуральное число n, что точка B находится на отрезке $A_{n-1}A_n$.

17° (аксиома Кантора). *Пусть $A_1, A_2, \ldots$ и $B_1, B_2, \ldots$ — такие две последовательности точек, расположенных на одной прямой l, что для любого n точки A_n и B_n различны между собой и находятся на отрезке $A_{n-1}B_{n-1}$. Тогда на прямой l существует такая точка C, которая находится на отрезке A_nB_n при всех значениях n.*

Аксиома 16° (вместе с перечисленными ранее аксиомами) позволяет доказать следующую важную теорему:

Теорема 10. *Пусть MN — произвольный отрезок и $\overrightarrow{OA}$ — произвольный луч. Тогда на луче $\overrightarrow{OA}$ существует одна и только одна точка P, обладающая тем свойством, что отрезок MN равен отрезку OP.*

Эта теорема позволяет «откладывать» отрезки. Кроме того, она позволяет ввести понятия «больше» и «меньше» для отрезков, причем для любых двух отрезков AB и CD выполнено одно и только одно из соотношений

$$AB<CD, \quad AB=CD, \quad AB>CD.$$

Следующую теорему мы назовем теоремой Дедекинда. Ввиду ее важности мы приведем не только формулировку, но и доказательство этой теоремы.

Теорема 11. *Если все точки прямой l разбиты на два (непустые) класса таким образом, что между двумя точками одного и того же класса не лежит ни одной точки другого класса, то существует точка и притом единственная, принадлежащая любому отрезку, концы которого принадлежат разным классам.*

Доказательство. Пусть A_1 и B_1 — две точки прямой l, принадлежащие разным классам; класс, содержащий точку A_1, обозначим символом I, а класс, содержащий точку B_1 — символом II. Пусть C — произвольная точка, лежащая между A_1 и B_1 (теорема 2). Отложим на луче $\overrightarrow{B_1A_1}$ отрезок B_1D, равный отрезку A_1C (теорема 10). Так как $A_1C<A_1B_1$, то и $B_1D<A_1B_1$, и потому точка D лежит на отрезке A_1B_1. Возможны три случая: точка C совпадает с D, точка C лежит между A_1 и D, точка D лежит между A_1 и C. В первом случае $A_1C=CB_1$, т. е. отрезок A_1C два раза откладывается на отрезке A_1B_1. Во втором случае мы имеем: $A_1C=DB_1<CB_1$, и потому отрезок A_1C не менее чем два раза откладывается на отрезке A_1B_1. В третьем случае отрезок A_1D не менее чем два раза откладывается на отрезке A_1B_1. Итак, в любом случае *существует такой отрезок, который не менее чем два раза откладывается на отрезке* A_1B_1.

Выберем такой отрезок и будем откладывать на луче $\overrightarrow{A_1B_1}$ от точки A_1 отрезки A_1M_1, M_1M_2, M_2M_3, ..., равные этому отрезку. В силу аксиомы 16° найдется такое число k, что точка B_1 лежит на отрезке $M_{k-1}M_k$, т. е.

$$A_1M_1=M_1M_2=M_2M_3=\ldots=M_{k-2}M_{k-1}\geqslant M_{k-1}B_1.$$

Каждый из отрезков A_1M_1, M_1M_2, ..., $M_{k-2}M_{k-1}$, а тем более «остаток» $M_{k-1}B_1$ откладывается на отрезке A_1B_1 не менее чем два раза.

Из условия теоремы легко вытекает, что в последовательности точек A_1, M_1, M_2, ..., M_{k-1}, B_1 несколько первых (подряд) принадлежат классу I, а остальные — классу II. Пусть, например, точка M_l

лежит в классе I, а точка M_{i+1} — в классе II; тогда мы обозначим точку M_i через A_2, а точку M_{i+1} — через B_2. (Если точка M_1 принадлежит классу II, то за A_2 мы примем точку A_1, а за B_2 — точку M_1; аналогично, если точка M_{k-1} принадлежит классу I, то за A_2 мы примем точку M_{k-1}, а за B_2 — точку B_1.)

Итак, мы получили такие две точки A_2, B_2, лежащие на отрезке A_1B_1, что точка A_2 принадлежит классу I, точка B_2 принадлежит классу II и отрезок A_2B_2 откладывается на отрезке A_1B_1 не менее чем 2 раза.

Исходя из точек A_2, B_2, мы аналогичным образом сможем построить такие две точки A_3, B_3, лежащие на отрезке A_2B_2, что точка A_3 принадлежит классу I, точка B_2 принадлежит классу II и отрезок A_2B_2 откладывается на отрезке A_2B_2 не менее чем 2 раза. Следовательно, отрезок A_3B_3 откладывается на отрезке A_1B_1 не менее чем 4 раза, т. е. более чем 3 раза.

Продолжая это построение, мы найдем такие точки A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., что при любом n точка A_n принадлежит классу I, точка B_n принадлежит классу II; кроме того, точки A_n и B_n расположены на отрезке $A_{n-1}B_{n-1}$, и отрезок A_nB_n откладывается на отрезке A_1B_1 не менее чем n раз.

В силу аксиомы 17° существует такая точка C, которая принадлежит отрезку A_nB_n при любом n. Мы докажем, что точка C является искомой. Прежде всего докажем, что для любой отличной от C точки D, взятой на прямой l, найдется такое n, для которого отрезок A_nB_n не содержит точки D (а значит, при $m \geqslant n$ отрезок A_mB_m не содержит точки D). Для этого обозначим через n такое натуральное число, что отрезок CD откладывается менее n раз на отрезке A_1B_1 (т. е. при откладывании на отрезке A_1B_1 отрезков $A_1P_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots$, равных отрезку CD, мы получим, что точка B_1 лежит между A_1 и P_n; существование такого n вытекает из аксиомы 16°). Если бы теперь отрезок A_nB_n содержал точку D, то (так как этот отрезок содержит и точку C) мы получили бы $CD < A_nB_n$, и потому отрезок A_nB_n не мог бы n раз откладываться на отрезке A_1B_1, а это противоречит выбору точек A_n и B_n. Полученное противоречие показывает, что точка D не принадлежит отрезку A_nB_n.

Пусть теперь M — произвольная, отличная от C точка класса I, а N — произвольная, отличная от C точка класса II. Выберем настолько большое число n, что ни одна из точек M, N не содержится на отрезке A_nB_n. Точка M не расположена между A_n и B_n в силу выбора числа n. Точка B_n не расположена между A_n и M, так как обе точки A_n, M принадлежат классу I, а точка B_n — классу II. Следовательно, точка A_n расположена между M и B_n (см. аксиому 9°). Аналогично, точка B_n расположена между A_n и N. Из этого следует, что обе точки A_n, B_n расположены на отрезке MN, и потому точка C лежит на отрезке MN (см. теорему 4), т. е. C лежит между M и N.

Итак, если M и N — отличные от C точки, принадлежащие различным классам, то C лежит между M и N. Покажем, наконец, что C — единственная точка, обладающая этим свойством. Пусть D — точка, отличная от C. Пусть, далее, M — произвольная точка, лежащая между D и C, а N — точка, лежащая не в том классе, в котором лежит точка M. Так как точка M лежит между D и C, то отрезок MN не может содержать обе точки C, D. Точку C этот отрезок содержит (ибо M и N принадлежат различным классам); следовательно, отрезок MN не содержит точки D. Таким образом, точка D не обладает указанным свойством.

Итак, существует одна и только одна точка C, обладающая тем свойством, что всякий отрезок, концы которого принадлежат различным классам, содержит точку C. Отсюда и вытекает справедливость теоремы.

Теорему 11 иногда принимают за аксиому вместо аксиом Архимеда и Кантора, которые в этом случае выводятся из этой аксиомы как теоремы; в этом случае эту аксиому называют *аксиомой Дедекинда*, так как она по существу совпадает с предложенной Дедекиндом аксиомой непрерывности поля действительных чисел (см. стр. 31).

6.6. Аксиома параллельности.

18°. *Через точку A, не лежащую на прямой l, можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей прямую l.*

Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, условимся называть *параллельными*. С помощью других аксиом доказывается

Теорема 12. *Через точку A, не лежащую на прямой l, всегда можно провести хотя бы одну прямую, параллельную l.*

Поэтому из аксиомы параллельности следует, что *через точку, не лежащую на прямой, можно провести единственную прямую, параллельную этой прямой.*

Аксиома параллельности уже встречалась нам в § 3 как аксиома, эквивалентная V постулату Евклида.

Аксиомой параллельности и завершается список аксиом евклидовой геометрии. С помощью этих аксиом и сформулированных выше теорем можно теперь доказывать все теоремы евклидовой геометрии: признаки равенства треугольников (угол определяется как совокупность двух лучей, исходящих из одной точки), соотношения между сторонами и углами в треугольнике, теорему о сумме углов треугольника и т. д., и т. д. Доказательства будут по существу те же, что и в школьном курсе геометрии, но более последовательно проведенные (так как школьные доказательства используют не только аксиомы и указанные выше теоремы, но и нередко используют ссылки на чертеж).

Изложенная система аксиом пространства Евклида представляет собой модификацию системы аксиом, предложенной в конце XIX века немецким математиком Д. Гильбертом. Система Гильберта, за исключением некоторых частностей, отличается от изложенной системы тем, что вместо понятия «движение» Гильберт считает основным понятием «конгруэнтность» («равенство»), т. е. то, что с нашей точки зрения можно определить как совместимость с помощью движения, а аксиому Кантора Гильберт формулировал как «аксиому полноты», в силу которой к пространству нельзя добавить новые точки, так чтобы продолжали выполняться все аксиомы. Аксиомы движения были предложены в начале XX века Ф. Шуром.

Таким образом, в изложенной нами системе аксиом основными понятиями геометрии являются точка, прямая, плоскость и движение, которые не определяются, но взаимоотношения между которыми выясняются из аксиом. Возможны и другие системы аксиом пространства Евклида, в которых за основные понятия принимаются другие объекты; так, у Гильберта вместо понятия «движение» неопределяемым считалось понятие «конгруэнтности»; в аксиоматике известного русского геометра В. Ф. Кагана за основу бралось понятие «расстояния» и т. д. Пример одной из аксиоматик евклидовой геометрии, отличной от изложенной здесь, приведен в статье о векторах в этой книге ЭЭМ (стр. 369—370). Разумеется, различные аксиоматики евклидовой геометрии эквивалентны друг другу, т. е., исходя из одной аксиоматики, можно доказать аксиомы другой аксиоматики, как теоремы, и наоборот.

Отметим в заключение, что вычеркивая в приведенном выше списке аксиом аксиомы 4°—8°, относящиеся к пространству, мы получим систему аксиом евклидовой плоскости (при этом в некоторых аксиомах надо произвести очевидные изменения; например, следует изменить понятие «репера», выбросив из него полупространство).

§ 7. Непротиворечивость и полнота аксиоматики евклидовой геометрии

7.1. Арифметическая модель геометрии Евклида. Теперь, когда мы имеем полный список аксиом геометрии, можно поставить вопрос о непротиворечивости геометрии Евклида и о полноте приведенной аксиоматики. Для доказательства непротиворечивости мы должны средствами арифметики (ничего другого у нас пока нет) построить *модель* евклидовой геометрии; для доказательства полноты следует установить, что любые две модели евклидовой геометрии *изоморфны*. И непротиворечивость, и полнота доказываются с помощью одного и того же приема — построения системы координат. Для простоты мы проведем эти построения не в пространстве, а только на евклидовой плоскости, и притом очень схематично.

Прежде всего мы установим взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами. Пусть O и A_1 — две различные точки прямой. Отложим на луче $\overrightarrow{OA_1}$ отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., равные отрезку OA_1. На втором луче, определяемом точкой O на прямой OA_1 (см. теорему 5) отложим отрезки OB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., равные отрезку OA_1. Разделив теперь отрезок OA_1 на 10 равных частей[1]) точками O, C_1, C_2, ..., C_9, A_1, мы сможем на каждом из отрезков

$$\ldots B_3B_2,\ B_2B_1,\ B_1O,\ OA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3\ldots \qquad (*)$$

отложить десять отрезков, равных OC_1. Затем можно каждую десятую часть разделить еще на 10 частей и т. д. Точке A_i мы поставим в соответствие целое число $i\,(=1, 2, \ldots)$; точке O поставим в соответствие число 0, точке B_i поставим в соответствие число $-i\,(i=1, 2, \ldots)$. Далее, точкам C_1, C_2, ..., C_9, делящим отрезок OA_1 на 10 равных частей, мы поставим в соответствие числа $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots \frac{9}{10}$. Деля остальные отрезки (*) на 10 равных частей, мы получим точки, соответствующие числам $\frac{n}{10}$, где n — любое целое число. Точно таким же образом мы можем построить точки, соответствующие любым дробям вида $\frac{n}{10^k}$.

Если теперь M — произвольная точка нашей прямой, то при помощи аксиомы Архимеда мы можем найти такое целое число n, что точка M находится на отрезке с концами в точках, соответствующих числам n и $n+1$, но не совпадает с точкой, соответствующей числу $n+1$. Затем мы можем найти такое число $a_1\,(=0,1,2,\ldots,9)$, что точка M находится на отрезке с концами в точках, соответствующих числам $n+\frac{a_1}{10}$ и $n+\frac{a_1+1}{10}$, но не совпадает с второй из этих точек. Затем мы найдем такое число $a_2\,(=0,1,2,\ldots,9)$, что точка M находится на отрезке с концами в точках, соответствующих числам $n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}$ и $n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}$, и т. д. Теперь точке M мы поставим в соответствие действительное число $n+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+\ldots$

Построенное соответствие между точками прямой линии и действительными числами является взаимно однозначным. Кроме того, оно обладает следующими двумя важными свойствами: а) если x, y, z —

[1]) Напомним, что для этого используется следующая теорема: если на одной прямой отложены равные между собой отрезки и через их концы проведены параллельные между собой прямые до пересечения с другой прямой, то на этой прямой при пересечении с параллельными также образуются равные между собой отрезки. Доказательство этой теоремы проводится так же, как в школьных учебниках.

три действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $x<y<z$ (или $x>y>z$), а M, N, P—точки, соответствующие числам x, y, z, то точка N находится между M и P; б) если $x-x'=y-y'$, то точки M, M', N, N', соответствующие числам x, x', y, y', обладают тем свойством, что отрезок MM' равен отрезку NN'. Из существования этого соответствия ясна аналогия между аксиомами порядка и непрерывности поля действительных чисел и пространства Евклида.

Мы видим, что если Евклид понимал под «прямой линией» прямолинейный отрезок, для которого он требовал только возможности неограниченного продолжения, здесь под «прямой» имеется в виду сразу вся прямая; аналогично обстоит дело с понятием плоскости.

Введем теперь на плоскости *систему координат*, т. е. рассмотрим две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O, выберем из них равные отрезки OA_1 и OA_1' и для каждой из этих прямых установим указанным выше способом взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами. Введение координатной системы позволяет обычным способом сопоставить с каждой точкой плоскости пару чисел x, y—координат этой точки. Таким путем устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и парами (x, y) действительных чисел.

Точки, лежащие на одной прямой, удовлетворяют уравнению первой степени

$$Ax+By+C=0, \qquad (**)$$

в котором хотя бы один из коэффициентов A, B отличен от нуля. Если три точки M, N, P лежат на одной прямой, то точка M лежит между N и P в том и только в том случае, если она не совпадает ни с одной из точек N, P и координаты x этих точек связаны одним из соотношений

$$x_N \leqslant x_M \leqslant x_P \quad \text{или} \quad x_N \geqslant x_M \geqslant x_P$$

и аналогично для координат y. Наконец, каждое движение плоскости изображается преобразованием вида

$$x' = a_1x+b_1y+c_1,$$
$$y' = a_2x+b_2y+c_2,$$

для которого векторы (a_1, a_2) и (b_1, b_2) являются единичными и взаимно перпендикулярными (т. е. $a_1^2+a_2^2=1$, $b_1^2+b_2^2=1$ $a_1b_1+a_2b_2=0$).

7.2. Непротиворечивость и полнота аксиоматики евклидовой плоскости. Изложенные факты позволяют доказать и непротиворечивость, и полноту аксиоматики геометрии. В самом деле, все аксиомы евклидовой плоскости выполняются, как нетрудно проверить, на *арифметической модели*, в которой точкой считается каждая пара (x, y) действительных чисел, прямой называется множество всех точек, удовлетворяющих некоторому уравнению вида (**), понятие

«между» и движения определяются указанным выше способом. Мы не будем проверять выполнение всех аксиом на арифметической модели. Укажем лишь для примера, что если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — две различные точки, то существует единственная прямая, проходящая через эти две точки, а именно прямая

$$(x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0.$$

(Заметим, что от умножения всех коэффициентов уравнения (**) на одно и то же число прямая не меняется.) Этим проверяется аксиома 1°. Весьма просто проверяются и остальные аксиомы.

Существование арифметической модели показывает непротиворечивость аксиом евклидовой геометрии. Далее, рассуждения, проведенные в начале параграфа, доказывают, что любая модель евклидовой плоскости изоморфна арифметической модели (изоморфизм устанавливается введением системы координат). Таким образом, любые две модели евклидовой плоскости изоморфны арифметической модели и потому изоморфны между собой. Тем самым установлена полнота аксиоматики.

Отметим в заключение, что арифметическая модель пространства (а не плоскости) Евклида строится аналогично, только точками считаются *тройки* (x, y, z) действительных чисел.

§ 8. Независимость аксиом

8.1. Независимость системы аксиом. Открытие Лобачевского, приведшее к развитию аксиоматического метода, непосредственно связано с вопросом о *независимости аксиом*. Некоторая аксиома считается *независимой* от остальных аксиом некоторой аксиоматики, если ее нельзя доказать, как теорему, исходя из остальных аксиом.

При аксиоматическом построении любой математической теории естественно стремиться к тому, чтобы среди аксиом не было «лишних», т. е. таких, которые могут быть выведены, как теоремы, из остальных аксиом. Исторически одним из первых проявлений этого стремления явилось исключение четвертого постулата Евклида (о равенстве всех прямых углов, см. стр. 15) из числа аксиом. Последовательное проведение этой точки зрения приводит в конце концов к построению «минимальной» аксиоматики, т. е. такой, что каждая из ее аксиом не зависит от остальных. Следует, однако, иметь в виду, что требование независимости аксиоматики, совершенно естественное логически и эстетически, совсем не играет сколько-нибудь существенной роли. Более того, с точки зрения удобства изложения аксиоматической теории часто бывает удобно принять за основу заведомо избыточную аксиоматику, позволяющую проще и быстрее получать необходимые следствия.

Для доказательства независимости какой-нибудь аксиомы от остальных достаточно построить новую систему аксиом, отличаю-

щуюся от старой только заменой этой аксиомы на противоположную, и доказать непротиворечивость полученной системы; непротиворечивость системы аксиом, как всегда, доказывается с помощью построения модели, в которой выполняются все аксиомы системы. Так, например, аксиоматика группы (аксиомы 1° и 2° на стр. 27) является независимой. Моделью, в которой выполняется аксиома 1°, но не выполняется аксиома 2°, может служить, например, множество всех целых чисел с обычной операцией умножения: уравнение $mx=n$, где m и n—целые числа, не всегда имеет целочисленное решение. Модель, в которой выполняется аксиома 2°, но не выполняется аксиома 1°, можно построить, например, из трех элементов a, b, c со следующей «таблицей умножения»:

$$aa=bb=cc=a, \quad ab=bc=ca=b, \quad ac=ba=cb=c.$$

Легко проверить, что в этой модели аксиома 2° действительно выполняется; например, уравнения

$$ax=b, \quad ya=b$$

имеют решения $x=b$, $y=c$. В то же время аксиома 1° не выполняется:

$$(bb)\,b=ab=b, \quad b\,(bb)=ba=c.$$

8.2. О независимости аксиоматики евклидовой геометрии. Разумеется, ввиду большого числа аксиом геометрии вопрос о независимости приведенной выше аксиоматики геометрии весьма сложен. Существование неевклидовой геометрии Лобачевского доказывает независимость аксиомы параллельности от остальных аксиом геометрии Евклида. Системой аксиом геометрии Лобачевского и является та система аксиом, которая получается из приведенной нами аксиоматики геометрии Евклида заменой аксиомы 18° аксиомой Лобачевского: «Через точку вне прямой можно провести в ее плоскости более одной прямой, не пересекающей данную прямую». Непротиворечивость геометрии Лобачевского доказывается с помощью моделей, наиболее важные из которых были построены во второй половине XIX века Э. Бельтрами, Ф. Клейном и А. Пуанкаре (см. статью о неевклидовых геометриях в пятой книге ЭЭМ).

Аналогичным приемом можно доказать независимость аксиом непрерывности. Независимость аксиомы Архимеда доказывается при помощи построения «неархимедовой геометрии», моделью которой может служить совокупность троек чисел (x, y, z), являющихся уже не действительными, а комплексными числами, причем соотношение «больше» в поле комплексных чисел устанавливается следующим образом: число $a+bi$ считается *бóльшим* числа $a'+b'i$, если $b>b'$, или в случае, когда $b=b'$, если $a>a'$. Поэтому, если в поле действительных чисел для всяких двух чисел a и b, из которых $a>b$,

существует такое натуральное число n, что $nb>a$ (это свойство действительных чисел и обеспечивает выполнение аксиомы Архимеда на прямой), то в поле комплексных чисел существуют такие числа α и β, для которых $\alpha>\beta$, но не существует натурального числа n, для которого имело бы место неравенство $n\beta>\alpha$. Такими числами являются, например, i и 1, так как при всех n произведение $n\cdot 1$ меньше i. Это свойство комплексных чисел и обеспечивает невыполнение аксиомы Архимеда на прямой в указанной модели неархимедовой геометрии.

Независимость аксиомы Кантора доказывается при помощи «некантоpовой геометрии», моделью которой является совокупность троек чисел x, y, z, являющихся действительными числами, но не произвольными, а принадлежащими к полю, элементы которого получаются из единицы применением конечного числа сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений квадратного корня [1]). Поэтому, если на прямой $y=z=0$ заданы отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., удовлетворяющие условию аксиомы Кантора, причем значения x для точек A_1, B_1, A_2, B_2, ... — рациональные числа, стремящиеся при $n\longrightarrow\infty$ к действительному числу, не входящему в указанное поле, то точки C, существование которой утверждается аксиомой Кантора, в этой модели не существует. По существу сам Евклид рассматривал не то, что мы называем «пространством Евклида», а именно это некантоpово пространство (см. выше, текст на стр. 15—16).

Особую роль в аксиоматике геометрии играет аксиома 8°, содержание которой по существу сводится к утверждению, что *пространство имеет три измерения*. Независимость этой аксиомы от остальных доказывается, например, построением модели *четырехмерного пространства Евклида*. В статье «Многомерные пространства» в книге V ЭЭМ читатель найдет описание и четырехмерного пространства и пространств любого (конечного) числа измерений. В математике рассматриваются также «бесконечномерные» пространства. Они играют весьма важную роль в современной математике и физике.

8.3. Заключение. Как мы видим, вопрос о независимости системы аксиом евклидовой геометрии приводит к рассмотрению многих новых «геометрических пространств», весьма сильно отличающихся по своим свойствам от привычного нам пространства Евклида.

Весьма интересно, например, «конечное пространство», которое получается при замене поля действительных чисел конечным полем, скажем, полем вычетов целых чисел по простому числу. В «конечном пространстве» имеется лишь конечное число точек на каждой прямой, на каждой плоскости и во всем пространстве, а также конечное число прямых и плоскостей. «Конечные пространства» являются простейшими

[1]) Эта модель тесно связана с геометрическими построениями. См. в этой книге ЭЭМ статью: «О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки», стр. 203—227.

примерами «дискретных пространств», в которых отсутствуют предельные точки и непрерывность.

Определенные таким образом абстрактные пространства, которые можно строить самыми разнообразными способами, позволяют создавать такие пространственные схемы, с помощью которых мы получаем возможность более точно отражать реальное, физическое пространство, чем с помощью схемы пространства Евклида. Кроме того, эти абстрактные пространства широко применяются в математике, а через нее имеют новые приложения к реальному миру.

Еще Лобачевский (а также и К. Ф. Гаусс) поставил задачу об экспериментальной проверке того, какая геометрия действительно имеет место в реальном мире: геометрия Евклида или Лобачевского. Как доказано в общей теории относительности, пространство (и время) реального мира с весьма большим приближением выражается так называемой римановой геометрией, открытой в середине XIX века немецким математиком Б. Риманом (см. статью о неевклидовых геометриях в книге V ЭЭМ).

Однако и эта пространственная схема является далеко не последним приближением. Многие физики считают, что целый ряд затруднений и противоречий в математическом аппарате современной квантовой физики объясняется тем, что квантовые, дискретные явления описываются в непрерывном пространстве, и для преодоления этих затруднений следует перейти к дискретному, квантованному пространству. Тот факт, что непрерывное пространство вполне удовлетворяет требованиям классической физики, нисколько не противоречит этому, так же как требованиям классической гидродинамики и электродинамики удовлетворяет представление о жидкости и электромагнитном поле как о непрерывных средах, в то время как на самом деле жидкость состоит из дискретных молекул, а электромагнитное поле состоит из дискретных квантов. Таким образом, вполне возможно, что геометрия вернется к представлениям Демокрита о дискретных атомах пространства, разумеется, не в столь наивной форме. В этом случае примут существенно новый вид и основные понятия геометрии.

Мы видели, что представления об основных понятиях геометрии и их взаимоотношениях неоднократно изменялись в ходе развития науки. Новые научные открытия будущего, несомненно, приведут к дальнейшим изменениям и в наших геометрических представлениях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Гильберт, Основания геометрии, перев. с нем., М.—Л., Гостехиздат, 948.

Классическое сочинение замечательного немецкого математика, содержащее одно из первых аксиоматических построений геометрии, а также тщательный логический анализ предложенной аксиоматики. В русском издании перевод замечательной книги Гильберта сопровождается комментариями редактора П К. Рашевского, заметно облегчающими чтение этого нелегкого сочинения, и содержательной вводной

статьей того же автора, в которой обсуждаются общие вопросы аксиоматического построения геометрии и разбирается аксиоматика Гильберта

[2] П. К. Рашевский, Геометрия и ее аксиоматика, Сборник «Математическое просвещение», вып. 5, М., Физматгиз, 1960, стр. 73—98.
Научно-популярная статья, близкая к вступительному очерку, предваряющему русское издание «Оснований геометрии» Д. Гильберта.

[3] В. Ф. Каган, Очерки по геометрии, М., Изд. Московского университета, 1963.
Первый раздел этой книги замечательного ученого и популяризатора математики целиком посвящен вопросам логического обоснования геометрии. В конце книги содержится «Приложение», дающее представление об оригинальной аксиоматике евклидовой геометрии, разработанной автором.

[4] Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, изд 4-е, М., Физматгиз, 1961.
Учебник для студентов университетов по курсу высшей геометрии, включающий учение об основаниях геометрии, проективную и неевклидову геометрии. Вопросам, примыкающим к рассматриваемым в настоящей статье, посвящены главы I, II и IV книги.

[5] В. И. Костин, Основания геометрии, М., Учпедгиз, 1948.

[6] Я. Л. Трайнин, Основания геометрии, М., Учпедгиз, 1961.
Книги 5 и 6 представляют собой учебники для студентов педагогических институтов по курсу оснований геометрии, включающие учение об аксиоматическом построении геометрии и элементы неевклидовой геометрии Лобачевского.

[7] «Начала» Евклида, тт. I—III, перев. с греч., М., Гостехиздат, 1948—1950.
Классическое сочинение, содержащее первый дошедший до нас опыт дедуктивного построения геометрии.

[8] Б. Л. ван дер Варден, Пробуждающаяся наука, перев. с голланд. М., Физматгиз, 1959.
Историко-математическое сочинение видного голландского математика, в котором, в частности, прослежено зарождение учения об основаниях геометрии в древнем мире.

См. также указанный в конце статьи «Геометрические построения» учебник Д. И. Перепелкина, содержащий полный курс геометрии, базирующийся на удачно выбранной, заведомо не независимой системе аксиом.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Понятие преобразования. Примеры 50
1.1. Геометрические отображения 50
1.2. Геометрические преобразования 52
1.3 Некоторые типы геометрических преобразований 60
§ 2. Применение преобразований к решению геометрических задач . . 63
2.1. Некоторые примеры 63
2.2. Применение симметрии 66
2.3. Использование геометрических преобразований для «симметризации» чертежа 68
§ 3. Аналитическая запись геометрических преобразований 72
3.1. Запись геометрических отображений в координатах 72
3.2. Аналитические методы изучения преобразований 74
3.3. Линейные преобразования 75
3.4. Комплексные координаты точек круговой плоскости 77
3.5. Бирациональные преобразования 79
§ 4. Произведение отображений и преобразований 80
4.1. Определение произведения отображений; примеры 80
4.2. Некоторые общие свойства произведения преобразований . . . 85
4.3. Произведения движений; классификация движений 86
4.4. Применения 89
4.5. Дальнейшие примеры произведения преобразований 92
§ 5. Обратное преобразование 96
5.1. Определение обратного преобразования 96
5.2. Инволюции 97
§ 6. Общее определение геометрии. Группы геометрических преобразований 98
6.1. Предмет геометрии 98
6.2. Геометрия и группы преобразований 101
6.3. Различные геометрии. Аффинная геометрия 102
6.4. Группы преобразований в физике 108
§ 7. Группа проективных преобразований 110
7.1. Гомология 110
7.2. Проективная плоскость 112
7.3. Применения гомологии к решению задач 114
7.4. Проективные преобразования и проективная геометрия . . . 117
7.5. Координаты в проективной плоскости 117
7.6. Бирациональные преобразования проективной плоскости . . . 119
§ 8. Неточечные отображения 121
8.1. Примеры неточечных преобразований 121
8.2. Неточечные преобразования в геометрии окружностей 124

8.3. Полярное отображение. Принцип двойственности в проективной геометрии 128
8.4. Подерное преобразование 134
8.5. Группы неточечных преобразований 136
§ 9. Принцип перенесения 140
9.1. Введение 140
9.2. Принцип перенесения, отвечающий сжатию к прямой 141
9.3. Принцип перенесения, отвечающий инверсии 143
9.4. Принцип перенесения, отвечающий полярному отображению 146
9.5. Принцип перенесения и модели геометрических систем 156
Литература 157

§ 1. Понятие преобразования. Примеры

1.1. Геометрические отображения. Одним из основных понятий современной математики является понятие функции[1]). Переменная y называется *функцией* переменной величины x (записывается: $y=f(x)$), если каждому значению x, взятому из какого-то допустимого множества значений (область определения функции) отвечает единственное значение y. При этом правило, позволяющее определить y по данному значению x, может быть задано аналитическими формулами или просто таблицей, в которой перечислены все значения x и отвечающие им y (этот способ задания функции особенно удобен в том случае, если x может принимать лишь конечное число значений), или каким-либо другим способом (например, словесным описанием, как в случае известной функции Дирихле: *каждому рациональному значению x отвечает значение $y=1$, а иррациональному x — значение $y=0$*).

Заметим, что в определении функции вовсе не требуется, чтобы переменные x и y обязательно представляли собой действительные числа. Напротив, в современной математике принимают, что x и y могут быть элементами совершенно произвольной (возможно различной!) природы — комплексными числами[2]), точками плоскости или пространства, какими-либо геометрическими фигурами, прямыми или произвольными линиями и т. д. Так можно сказать, что центр, а также радиус окружности являются функциями этой окружности (здесь область определения функции состоит из всех окружностей, а ее значения являются точками или числами). В последнее время большое место в математике заняло изучение функций $y=f(x)$, где x или даже и x, и y сами являются функциями в старом смысле этого слова, т. е. числовыми функциями[3]).

---

[1]) Ср. ЭЭМ, кн. III, статью «Элементарные функции действительного переменного Примеры последовательностей функций. Общее понятие функции», §§ 46 и 54.

[2]) Функциям комплексного переменного посвящена специальная статья в кн III ЭЭМ («Элементарные функции комплексного переменного»)

[3]) Изучением функций такого рода занимается в современной математике специальная большая наука — функциональный анализ. Функции $y=f(x)$, где $x=x(t)$ есть функция какого-то переменного t,

В геометрии особо важную роль играют функции $y=\Phi(x)$, где как x, так и y являются точками плоскости или пространства. В таком случае слово «функция» заменяют обычно выражением «геометрическое (точечное) отображение». Таким образом, геометрическое отображение представляет собой не что иное, как определенный вид функциональной зависимости $y=f(x)$, где как «аргумент» x, так и «значение функции» y являются точками.

Итак, *для задания геометрического (точечного) отображения* Φ *надо указать:* 1) *некоторую фигуру (точечное множество)* $\mathcal{A}$, *называемую областью определения отображения* Φ; 2) *некоторую фигуру* $\mathcal{A}'$, *называемую областью значений отображения* Φ, *и* 3) *некоторое правило, сопоставляющее с каждой точкой* A *области* $\mathcal{A}$ *определенную точку* $A'=\Phi(A)$ *области* $\mathcal{A}'$. Если данное отображение Φ переводит точку A в точку A' (т. е. $\Phi(A)=A'$), то точку A' называют образом точки A при отображении Φ. Пусть теперь L — некоторая линия (или фигура), целиком расположенная в области $\mathcal{A}$. Если точка A пробегает линию (или фигуру) L, то образ $A'=\Phi(A)$ этой точки также пробегает некоторое множество точек L', расположенное в области $\mathcal{A}'$. Это множество L' называется образом множества L при отображении Φ, что записывается так: $L'=\Phi(L)$.

Пример 1. Отображение Φ определим следующим образом. Примем за область определения $\mathcal{A}$ всю плоскость, а за область значений $\mathcal{A}'$ — некоторую прямую плоскости $\mathcal{A}$. Условимся, наконец, с каждой точкой A плоскости $\mathcal{A}$ сопоставлять точку A', являющуюся ортогональной проекцией точки A на прямую $\mathcal{A}'$ (рис. 1). Очевидно, что если L — прямая, не перпендикулярная $\mathcal{A}'$, то ее образ $L'=\Phi(L)$ совпадает со всей прямой $\mathcal{A}'$; образ $\Phi(L_1)$ прямой L_1, которая перпендикулярна $\mathcal{A}'$, представляет собой одну точку на прямой $\mathcal{A}'$; образ $\Phi(S)$ любой окружности S (или любого треугольника T, рис. 2) является отрезком.

Пример 2. Введем на плоскости некоторую (прямоугольную) систему координат XOY. Отображение Φ определим, принимая за

а y — число $\left(\text{например, } y=\int_a^b x(t)\,dt\right)$, называются функционалами, а функции $y=F(x)$, где и $x=x(t)$ и $y=y(t)$ есть числовые функции $\left(\text{например, } y(t)=x'(t) \text{ или } y(t)=\int_a^t x(t)\,dt\right)$, называются функциональными операторами. В функциональном анализе функционалы играют ту же роль, которую в обыкновенном анализе играют числовые функции (одного или нескольких переменных); роль функциональных операторов близка к роли геометрических преобразований.

область определения и за область значений всю плоскость $\mathcal{A}$ и сопоставляя с произвольной точкой A с координатами (x, y) точку $A'=\Phi(A)$, имеющую координаты $(\sin x, \sin y)$.

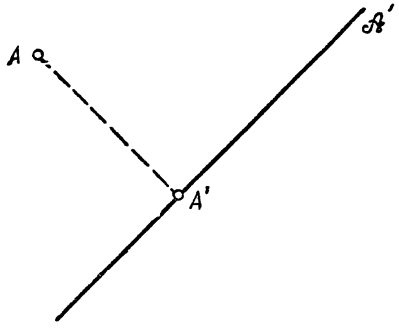


Рис. 1.

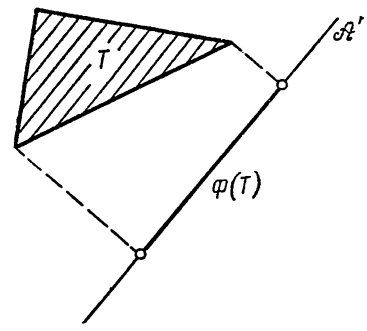


Рис. 2.

Пример 3. В качестве последнего примера укажем на **вращение (поворот)** плоскости $\mathcal{A}$ вокруг точки O на угол α. Для этого отображения и область определения, и область значений совпадают со всей плоскостью $\mathcal{A}$; образ точки A определяется как такая точка A' плоскости, что $OA'=OA$ и $\angle AOA'=\alpha$, причем направление вращения от OA к OA' на угол α (по часовой стрелке или обратное ее движению) указано заранее (рис. 3).

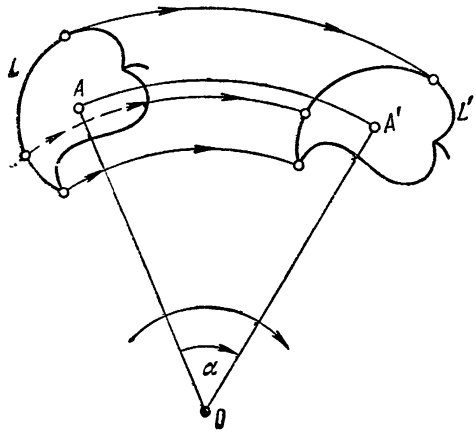


Рис. 3.

1.2. Геометрические преобразования. Между рассмотренными выше примерами 1, 2, с одной стороны, и примером 3 — с другой стороны, имеется существенное различие. Отображения, рассматриваемые в примерах 1 и 2, таковы, что существуют две различные точки, образы которых совпадают, т. е. точки $A\neq B$, для которых $\Phi(A)=\Phi(B)$. Например, если в качестве B взять любую точку прямой AA' (рис. 1), то для отображения Φ, рассмотренного в примере 1, мы имеем $\Phi(A)=\Phi(B)$. Аналогично две точки

$$A(x, y) \quad \text{и} \quad B(x+2\pi, y-4\pi)$$

переводятся отображением Φ примера 2 в одну и ту же точку. Кроме того, отображение Φ, рассмотренное в примере 2, таково, что не каждая точка выбранной нами области значений $\mathcal{A}'$ $(\equiv\mathcal{A})$ является

образом какой-либо точки при отображении Ф. Например, точка с координатами $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ не является образом никакой точки (ибо не существует действительного числа x, для которого $\sin x = 2$). Эти обстоятельства выражаются следующим образом: отображения, рассмотренные в примерах 1 и 2, *не являются взаимно однозначными*.

Отображение Ф *с областью определения* A *и областью значений* A' *называется взаимно однозначным, если, во-первых, ни для каких двух различных точек* A *и* B *области* A *их образы* $\Phi(A)$ *и* $\Phi(B)$ *не совпадают и, во-вторых, каждая точка области* A' *является образом некоторой точки при отображении* Ф

Грубо говоря, взаимно однозначное отображение Ф можно охарактеризовать тем, что никакие две различные точки не «склеиваются» в результате отображения Ф и, кроме того, Ф отображает область A не на часть области A', а на всю эту область.

Наибольшую роль в геометрии играют такие взаимно однозначные отображения, для которых область определения A совпадает с областью значений. Такие отображения называются **преобразованиями** множества A. Само множество A мы будем при этом называть *областью действия* преобразования Ф. Итак, *преобразованием множества* A (или, иначе, *преобразованием с областью действия* A) *называется всякое взаимно однозначное отображение* Ф, *для которого область определения и область значений совпадают с* A.

Отображение Ф, рассмотренное в примере 3 (вращение плоскости A на угол α вокруг точки O), является, очевидно, примером *преобразования плоскости* (т. е. преобразования, областью действия которого является вся плоскость).

В дальнейшем мы ограничимся в этой статье рассмотрением только преобразований [1]), причем таких преобразований, областью действия которых служит плоскость или «почти плоскость» [2]). Точнее говоря, мы вынуждены будем в ряде случаев считать областью действия преобразования Ф не всю плоскость, а плоскость с «выколотыми» (т. е. удаленными) точками или линиями. Иногда, напротив, мы будем присоединять к плоскости новые («несобственные», т. е. не существующие с точки зрения школьного курса геометрии) точки или линии. Так как во всех случаях основой для конструирования области действия преобразования Ф будет служить плоскость, то,

---

[1]) Отображения, не являющиеся преобразованиями, также играют в некоторых вопросах геометрии заметную роль. Например, разного вида *проекции* трехмерного пространства на плоскость, подробно изученные в статье «Методы изображений» (стр. 233—234 этой книги ЭЭМ), очевидно, преобразованиями не являются.

[2]) В настоящей статье мы почти не будем говорить о преобразованиях пространства, поскольку более простого случая плоскости достаточно, для того чтобы осветить все принципиальные моменты теории геометрических преобразований.

допуская некоторую неточность, мы будем объединять все рассматриваемые преобразования одним общим названием — **преобразования плоскости.**

Приведем еще несколько примеров преобразований плоскости.

Пример 4. Выберем на плоскости какое-либо направление MM' (его можно задать, например, прямой со стрелкой); зададим также определенный отрезок a (рис. 4). Каждой точке A плоскости мы поставим в соответствие такую точку A', что отрезок AA' имеет направление MM' и длину a. Построенное преобразование Ф называется **параллельным переносом** плоскости в направлении MM' на величину a (или переносом на вектор $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$[1])).

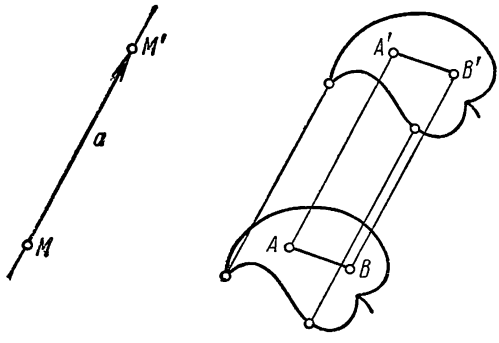


Рис. 4.

Пример 5. Выберем на плоскости определенную точку O и с каждой точкой A сопоставим такую точку A', что отрезок AA' проходит через точку O и делится в ней пополам (рис. 5); если точка A совпадает с O, то и A' не отличается от O. Определенное таким образом преобразование

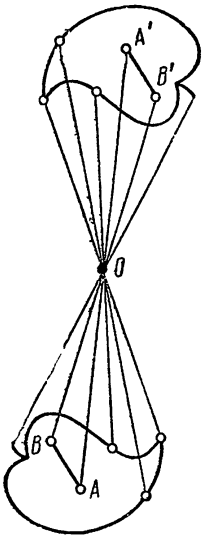


Рис. 5.

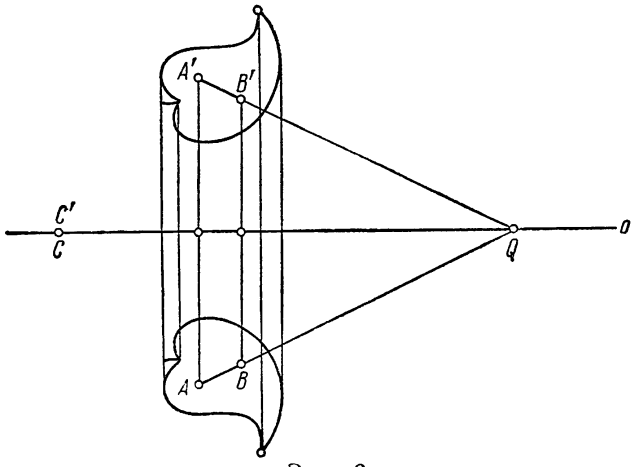


Рис. 6.

плоскости называется **симметрией относительно точки** O. Легко видеть, что симметрия относительно точки O есть частный случай вращения — она совпадает с вращением вокруг точки O на угол 180°.

[1]) См статью «Векторы и их применения в геометрии» (стр. 291—381 этой книги ЭЭМ).

Пример 6. Зададим на плоскости некоторую прямую o и сопоставим с каждой точкой A такую точку A', что отрезок AA' перпендикулярен прямой o и делится этой прямой пополам (рис. 6); точкам прямой o мы поставим в соответствие те же самые точки. Полученное преобразование плоскости называется **симметрией относительно прямой** o.

Пример 7. Выберем на плоскости точку O и сопоставим с каждой точкой A такую точку A' луча OA, что $\frac{OA'}{OA}=k$, где k — заданное положительное число (рис. 7); точке O поставим в соответствие эту же самую точку. Это преобразование называется **сжатием к точке** O[1]) или **центрально-подобным преобразованием** или, наконец, **гомотетией**[2]) (с центром O и коэффициентом k).

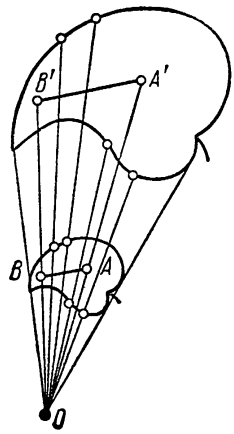


Рис. 7.

Часто считают, что коэффициент k гомотетии может быть также и отрицательным числом; в этом случае за A' принимают такую точку прямой OA, что $\frac{OA'}{OA}=|k|$ и направления отрезков OA' и OA (от O к A' и от O к A) противоположны. Если стать на такую точку зрения, то надо будет считать, что симметрия относительно точки (пример 5) представляет собой частный случай гомотетии — это есть не что иное, как гомотетия с коэффициентом $k=-1$.

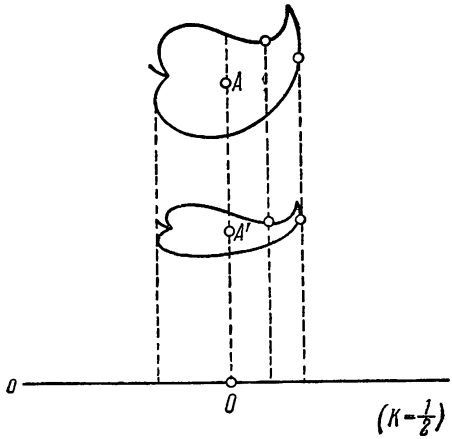


Рис. 8.

Пример 8. Зададим некоторую прямую o плоскости и сопоставим с каждой точкой A такую точку A', что точки A и A' лежат по одну сторону от прямой o, прямая AA' перпендикулярна o и расстояния AO и $A'O$ точек A и A' от o связаны соотношением $\frac{OA'}{OA}=k$, где k — фиксированное положительное число (рис. 8); если точка A принадлежит прямой o, то будем считать, что A' совпадает с A. Преобразование, определенное таким образом, естественно назвать **сжатием к прямой** o[1]);

[1]) Если коэффициент $k>1$ и, следовательно, $OA'>OA$, то преобразование уместнее было бы назвать растяжением, а не сжатием

[2]) От греческих слов ὁμός — одинаковый (или ὅμοιος — подобный) и θετος — расположенный.

прямую o называют осью сжатия, а число k — его коэффициентом.

Можно считать, что коэффициент k сжатия может быть и отрицательным (причем в этом случае отрезки OA' и OA имеют противоположное направление, т. е. точки A и A' лежат по разные стороны прямой o). Сжатие к прямой o с коэффициентом сжатия $k=-1$ представляет собой, очевидно, симметрию относительно прямой o (пример 6).

Пример 9. Гомотетия с центром O и коэффициентом k (пример 7) определяется как преобразование, переводящее точку A в такую точку A' прямой OA, что отношение $\frac{OA'}{OA}$ равно k. Рассмотрим теперь преобразование, переводящее точку A в такую точку A' луча OA, что произведение $OA\cdot OA'$ имеет заданную величину: $OA'\cdot OA=k$, где k — некоторое заданное положительное число (рис. 9). Это преобразование называется **инверсией**[1]) (с центром O и степенью k). Если $k=a^2$, то точки окружности S с центром O и радиусом a переходят при инверсии сами в себя, внешние по отношению к S точки переходят во внутренние, а внутренние точки — во внешние; это обстоятельство оправдывает другое название рассматриваемого преобразования — **симметрия относительно окружности** S. Симметрию относительно окружности S можно также описать геометрически: при этом преобразовании внешняя по отношению к S точка A переходит в точку A' пересечения прямой OA (где O — центр окружности S) с прямой PQ, соединяющей точки P и Q прикосновения с S проведенных к ней из A касательных, а A' переходит в A; это следует из того, что в прямоугольном треугольнике OPA (рис. 9) PA' есть высота, и потому $OA\cdot OA'=OP^2=a^2=k$.

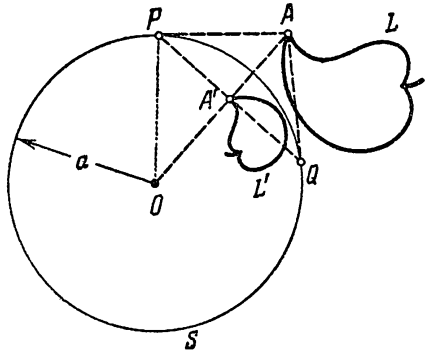


Рис. 9.

Можно также считать, что степень k инверсии может быть и отрицательной, причем в этом последнем случае отрезки OA' и OA противоположно направлены и $OA'\cdot OA=|k|$.

Заметим теперь, что, строго говоря, мы не дали точного определения инверсии, ибо отображение, определенное выше, не определено в точке O — ей не соответствует при инверсии никакая точка плоскости. Один из приемов, применяющихся для устранения этой некорректности, — считать, что область действия инверсии не сов-

[1]) От латинского слова inversio — обращение.

падает со всей плоскостью; эта область действия $\mathcal{A}$ представляет собой плоскость с исключенной («выколотой») точкой O, поскольку эта точка не имеет образа при инверсии. Ясно, что инверсия представляет собой взаимно однозначное отображение этой области $\mathcal{A}$ (плоскости с выколотой точкой). Таким образом, мы здесь впервые встречаемся с преобразованием «плоскости», область действия которого отличается от всей плоскости.

Можно встать также на другую точку зрения. Поскольку точка O не имеет образа при инверсии, можно условно считать, что точка O переходит при инверсии в «несобственную» (т. е. не существующую на обычной плоскости) точку Ω. Наоборот, точка Ω переходит при инверсии в точку O. При таком соглашении инверсия становится взаимно однозначным отображением («преобразованием») «расширенной» плоскости $\mathcal{A}^*$, получающейся из обыкновенной плоскости присоединением к ней еще одной точки Ω. Так как при приближении точки A к O ее образ A' при инверсии неограниченно удаляется от O $\left(\text{ибо } OA' = \frac{k}{OA}\right)$, то образ Ω точки O иногда называют *бесконечно удаленной точкой* «расширенной» плоскости A^*. Плоскость A^*, полученную присоединением к обыкновенной плоскости одной «бесконечно удаленной» точки Ω, часто называют *расширенной плоскостью*[1]). Так как мы в дальнейшем встретимся с иными способами «расширения» обычной плоскости, то нам будет более удобен термин *круговая плоскость*. Причины, обусловливающие такое название, будут раскрыты ниже[2]).

Итак, мы можем принять за область действия инверсии либо плоскость с одной выколотой точкой, либо «расширенную» плоскость, получающуюся добавлением одной «несобственной» точки. Впоследствии мы увидим, что считать областью действия инверсии «расширенную» плоскость в ряде отношений значительно удобнее.

Подчеркнем, что утверждение типа «инверсия переводит точку O в бесконечно удаленную точку Ω» не является содержательной теоремой — оно представляет собой лишь иную формулировку того, что точка O не имеет образа при инверсии. Однако введение понятия круговой плоскости уже выходит за рамки чисто терминологических соглашений: здесь мы делаем новый шаг по пути математической абстракции, рассматривая совершенно новое образование — плоскость, которая, кроме точек, фигурирующих в школьном курсе геометрии,

[1]) Это название принято, например, в теории функций комплексного переменного.

[2]) Заметим еще, что «расширенная» (т. е. круговая) плоскость $\mathcal{A}^*$, являющаяся областью действия инверсии, может быть взаимно однозначно отображена (при помощи стереографической проекции, см стр 22 и след. этой книги) на поверхность сферы S, так что поверхность сферы можно рассматривать как модель (см. стр 21 и след. этой книги) круговой плоскости. Точка Ω переходит при стереографической проекции в «север-

содержит еще новую (равноправную с остальными!) «бесконечно удаленную» точку. При этом круговая плоскость является не менее законным математическим понятием, чем обычная, «евклидова» плоскость. Ведь и представление о (безграничной!) плоскости, на которой каждая прямая может быть неограниченно продолжена в обе стороны, является лишь математической абстракцией и не имеет реального смысла; точное описание плоскости доставляется лишь набором аксиом, характеризующих геометрию на плоскости [1]). Разное понимание слова «плоскость» приводит к разным наборам аксиом; так, на круговой плоскости будет несправедлива аксиома: «через две точки проходит единственная прямая», поскольку через «обыкновенную» точку A и «бесконечно удаленную» точку Ω проходит бесконечно много прямых (следует считать, что все прямые круговой плоскости проходят через «бесконечно удаленную» точку Ω, поскольку образы всех прямых при инверсии проходят через центр инверсии O, являю-

---

ный полюс» N сферы S. Если при этом радиус сферы S выбран так, что окружность инверсии переходит при стереографической проекции в экватор сферы S, то инверсии круговой плоскости $\mathcal{A}^*$ будет соответствовать симметрия сферы S относительно экваториальной плоскости. Иначе говоря,

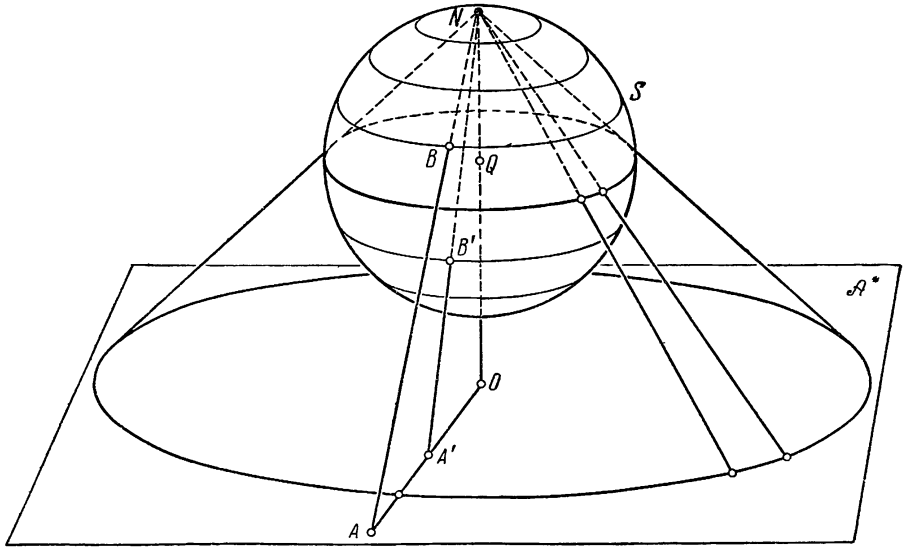


Рис. 10

если B и B' — две точки сферы S, симметричные относительно плоскости экватора, а A, A' — проекции точек B и B' из точки N на плоскость $\mathcal{A}^*$ (рис. 10), то A переходит в A' при инверсии относительно окружности, в которую проектируется экватор сферы (см. в связи с этим стр. 468—472 этой книги ЭЭМ)

[1]) См. в этой книге ЭЭМ статью «Аксиомы и основные понятия геометрии».

щийся образом точки Ω — см. ниже, стр. 75). Разные подходы к понятию плоскости, характеризуемые разными наборами аксиом, являются одинаково допустимыми; в одних задачах нам может понадобиться толковать слово «плоскость» в одном, а в других — в другом смысле. И, разумеется, совершенно беспредметным явился бы спор, скажем, о том, имеет ли плоскость одну или много «бесконечно удаленных» точек: это полностью зависит от принятой точки зрения, диктуемой теми задачами, которые перед нами стоят. В иных случаях (например, в связи с рассмотрением гомологии — см. ниже § 7, или гиперболической инверсии — см. пример 10) мы можем прийти к необходимости совсем иного пополнения плоскости «идеальными» или «бесконечно удаленными» элементами — и полученная на таком пути «плоскость» будет отличаться от обычной и от круговой плоскости, но не будет ни «хуже», ни «лучше» их.

Пример 10. Пусть преобразование Ф переводит каждую точку A в такую точку A', что точки A и A' лежат по одну сторону от прямой o, прямая AA' перпендикулярна заданной прямой o и $OA' \cdot OA = k$, где O — точка пересечения прямой AA' с o и k — фиксированное положительное число (рис. 11). Это преобразование можно назвать **гиперболической инверсией** [1]) с осью o и степенью k. Если $k = a^2$, то точки прямых l и l_1, параллельных o и удаленных от o на расстояние a, переходят при нашем преобразовании в себя, внутренние точки ограниченной l и l_1 полосы переходят во внешние точки, а внешние точки полосы — во внутренние точки; с этим связано название **симметрия относительно пары параллельных прямых**, которое также дают иногда рассматриваемому преобразованию. Ясно, что преобразование точек прямой $n \perp l$ при симметрии относительно пары параллельных прямых l и l_1 совпадает с преобразованием точек этой прямой при симметрии относительно окружности S с центром в точке O пересечения n и o и радиусом a; это может быть использова о для построения образа A' точки A при гиперболической инверсии (рис. 11). Часто также считают, что степень k гиперболической инверсии может быть

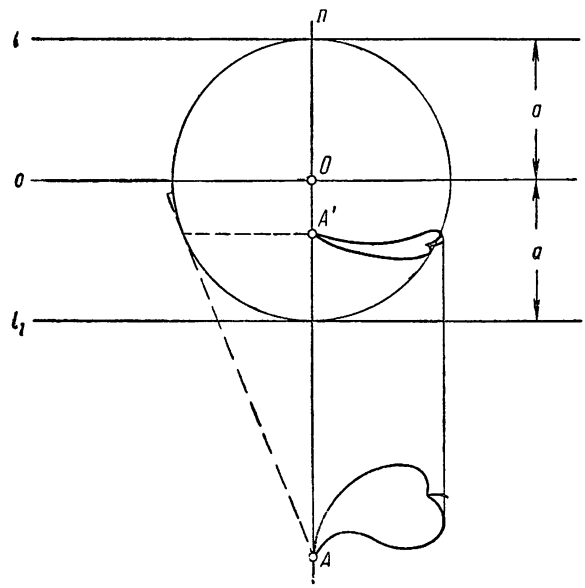


Рис. 11.

[1]) Причины, обусловливающие такое название, будут объяснены ниже (см. стр. 75).

и отрицательной; в этом последнем случае $OA' \cdot OA = |k|$ и направления отрезков OA' и OA противоположны.

За область действия гиперболической инверсии можно принять плоскость с выброшенной из нее прямой o, поскольку точки этой прямой не переходят при нашем преобразовании ни в какие точки плоскости. Можно также построить и другую область действия гиперболической инверсии, не выбрасывая из плоскости «лишние» точки, а наоборот, добавляя к плоскости новые «несобственные» точки, на чем мы здесь останавливаться не будем.

Заметим, что все рассмотренные точечные преобразования являются непрерывными, т. е. обладают следующим свойством: если переменная точка A_n, оставаясь все время в области действия преобразования Ф, стремится к некоторой точке A, также принадлежащей области действия преобразования (т. е. если расстояние A_nA стремится к нулю при неограниченном возрастании номера n), то отвечающая точке A_n точка $A'_n = \Phi(A_n)$ стремится к точке $A' = \Phi(A)$, отвечающей точке A. Легко привести и сколько угодно примеров не непрерывных преобразований (таким будет, например, преобразование, при котором все параллельные заданной прямой l прямые плоскости претерпевают параллельный перенос в направлении прямой l, но прямые, расстояние которых от l рационально, сдвигаются на величину $a \neq 0$, а прямые, расстояние которых от l иррационально,— на величину $2a$). Однако, так как в геометрии используются почти исключительно непрерывные преобразования, то мы здесь ограничимся рассмотрением только таких преобразований. Впрочем, свойства непрерывности рассматриваемых преобразований мы нигде использовать не будем.

1.3. Некоторые типы геометрических преобразований. Нетрудно видеть, что преобразования, описанные в примерах 3, 4, 5, 6, обладают следующим замечательным свойством: *любые две точки A и B они переводят в такие точки A' и B', что расстояние $A'B'$ равно расстоянию AB* (рис. 12—15). Преобразования,

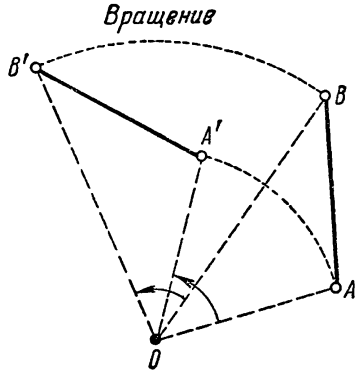


Рис. 12.

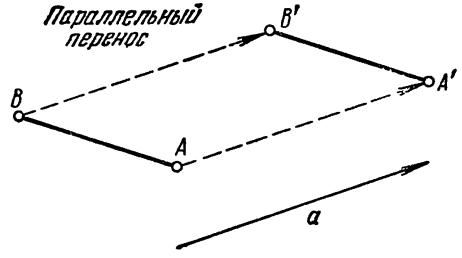


Рис. 13.

сохраняющие расстояния между точками, называются **движениями**; таким образом, *вращение, параллельный перенос, симметрия относительно точки и симметрия относительно прямой являются движениями плоскости.*

Преобразование, описанное в примере 7 (гомотетия) обладает тем свойством, что *расстояние между образами A' и B' точек A и B про-*

порционально расстоянию между этими точками (где коэффициент пропорциональности k зависит лишь от преобразования, но не от выбора точек A и B); это вытекает из подобия треугольников $OA'B'$ и OAB (рис. 16). Преобразования, изменяющие все расстояния между точками в одном и том же отношении k (иначе говоря, *сохраняющие отношения расстояний между точками*: если точки A, B, C и D переходят в точки A', B', C' и D', то $\frac{A'B'}{C'D'}=\frac{AB}{CD}$), называются

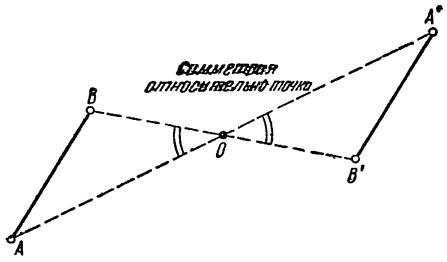


Рис. 14.

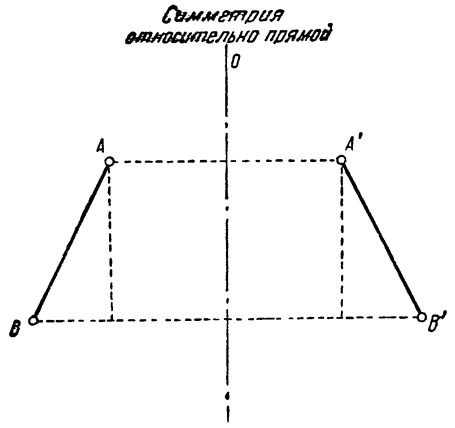


Рис. 15.

преобразованиями подобия (с коэффициентом подобия k); движения можно также рассматривать как *преобразования подобия с коэффициентом подобия* 1. Таким образом, гомотетия является преобразованием подобия [1]).

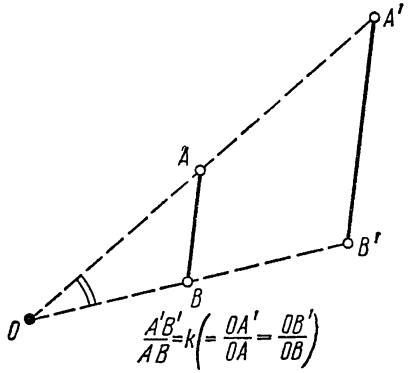


Рис. 16.

Преобразование, описанное в примере 8 (сжатие к прямой), обладает следующим важным свойством — оно *переводит каждую прямую линию l снова в некоторую прямую линию l'*. Это утверждение является очевидным, если l есть прямая, параллельная или перпендикулярная оси сжатия o (в частности, перпендикулярную к оси o прямую сжатие переводит в себя). Прямая же l, образующая с o острый угол α, переходит в прямую l', пересекающую ось сжатия o в той же точке Q, что и l, и образующую с прямой o такой угол α', что $\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha}=k$. В самом деле, если перпендикуляр к прямой o в точке O пересекает прямую l в точке A и если A' — такая

[1]) Нетрудно понять, что гомотетия с (положительным или отрицательным!) коэффициентом гомотетии k представляет собой преобразование подобия с коэффициентом подобия $|k|$.

точка этого перпендикуляра, что $\operatorname{tg}(\angle A'QO) = k \operatorname{tg}\alpha$, то $\frac{OA'}{OA} = \frac{OQ \operatorname{tg}\angle A'QO}{OQ \operatorname{tg}\alpha} = k$ (рис. 17), откуда и следует, что точка A переходит в A'. Преобразования плоскости, переводящие каждую прямую линию снова в прямую, называются **аффинными преобразованиями**[1]); таким образом, *сжатие к прямой является аффинным преобразованием.* Заметим еще, что сжатие к прямой обладает также следующими свойствами: оно *переводит параллельные прямые в параллельные и сохраняет отношение любых двух отрезков, принадлежащих одной прямой l.* Эти свойства сжатия к прямой нетрудно вывести из его определения. Мы, однако, не будем этого делать, так как впоследствии мы увидим, что этими же свойствами обладает к а ж д о е аффинное преобразование (ср. ниже, стр. 76—77).

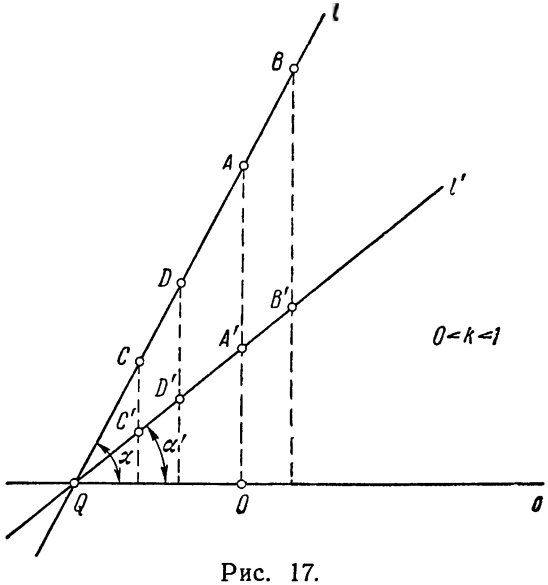


Рис. 17.

Преобразование, указанное в примере 9 (инверсия), не является аффинным; как мы увидим ниже (см. стр. 75), прямую линию оно переводит в прямую линию или в окружность; окружность также переводится инверсией в окружность или прямую линию. *Преобразование, переводящее каждую окружность или прямую снова в окружность или в прямую, называется* **круговым преобразованием;** таким образом, *инверсия есть круговое преобразование*[2]).

Легко понять, что всякое движение и всякое преобразование подобия переводит каждую прямую линию снова в прямую и каждую окружность снова в окружность — таким образом, *движения и преобразования подобия являются как аффинными, так и круговыми*

[1]) От латинского слова affinitas — родство по мужу или жене, свойство; это название подчеркивает, что аффинные преобразования переводят каждую фигуру M в фигуру M′, достаточно близкую («родственную») первоначальной (хоть и не столь близкую, как фигура, получающаяся из M движением или преобразованием подобия).

[2]) Более подробно теория круговых преобразований излагается в статье «Окружности», напечатанной в этой книге ЭЭМ, где, в частности, имеется отличное от приведенного на стр. 74—75 доказательство того, что инверсия является круговым преобразованием.

преобразованиями. В самом деле, окружность есть геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки O; прямая же полностью характеризуется тем, что для каждых трех ее точек A, B и C, где B лежит между A и B, имеет место равенство $AB+BC=AC$. Но так как движения вовсе не меняют расстояний, а преобразования подобия умножают все расстояния на одно и то же число, то движение или преобразование подобия переводит окружность в окружность, а прямую — в прямую. Можно доказать, что и обратно всякое преобразование плоскости, переводящее прямую линию снова в прямую линию и окружность — в окружность, является преобразованием подобия (в частном случае — движением); на доказательстве этого мы здесь не остановимся [1]).

§ 2. Применение преобразований к решению геометрических задач

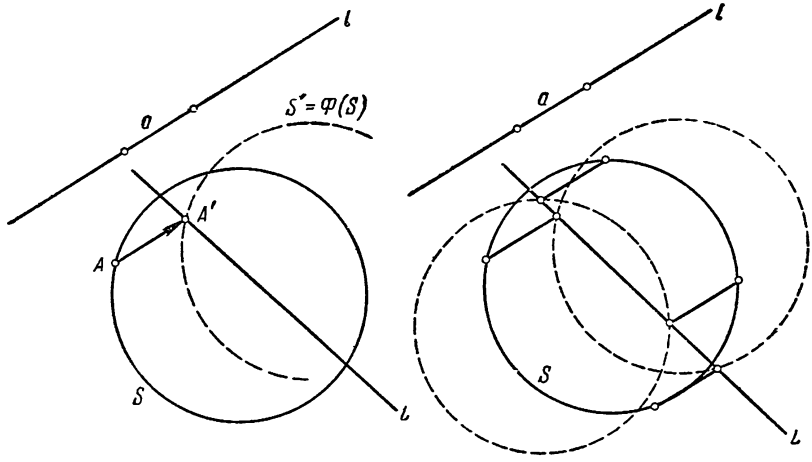
2.1. Некоторые примеры. Уже перечисленные выше простые геометрические преобразования могут быть эффективно использованы для решения содержательных геометрических задач. Широко известны, например, применения геометрических преобразований к решению задач на построение. Так, решение задачи о построении отрезка AA', заключенного между заданными окружностью S и прямой L и имеющего данные длину a и направление l, непосредственно получается с помощью параллельного переноса Φ окружности S на отрезок a в направлении l. При таком переносе один конец A искомого отрезка переходит в другой, откуда ясно, что одним из концов искомого отрезка является точка пересечения окружности $S'=\Phi(S)$ и прямой L (рис. 18, *а*). [Задача может иметь до четырех решений (рис. 18, *б*), ибо перенос окружности S можно осуществлять в двух противоположных направлениях.] Далее, задача о построении отрезка AA', заключенного между данными прямыми l и l_1 и делящегося пополам в данной точке O, решается с помощью симметрии относительно точки O (рис. 19; задача имеет, вообще говоря, единственное решение). Задача о построении в данной окружности S такой хорды AB, которая проходит через данную точку A и делится пополам второй данной окружностью S_1, решается с помощью гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{1}{2}$ (рис. 20; задача может иметь два решения) [2]). Но наиболее интересны применения геометрических преобразований к доказательству теорем.

---

[1]) См., например, т. II книги И. М. Яглома [2], указанной в списке литературы в конце статьи.

[2]) Другие примеры применения геометрических преобразований к решению задач на построение читатель может найти в статье «Общие принципы геометрических построений», стр. 189—193 этой книги.

Так, из того, что средняя линия C_1A_1 треугольника ABC гомотетична основанию AC с центром гомотетии B и коэффициентом $\frac{1}{2}$



т. е. C_1A_1 получается из AC гомотетией с центром B и коэффициентом $\frac{1}{2}$; рис. 21), следует, что

$$C_1A_1 \| AC \quad \text{и} \quad C_1A_1 = \frac{1}{2} AC.$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что гомотетия с коэффициентом $-\frac{1}{2}$, переводящая A в A_1, переводит $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$, образованный средними линиями треугольника ABC; но это означает, что *прямые* AA_1, BB_1 *и* CC_1 (*медианы*

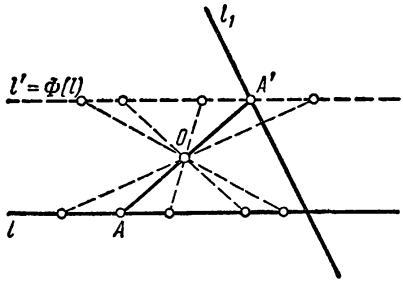


Рис. 19.

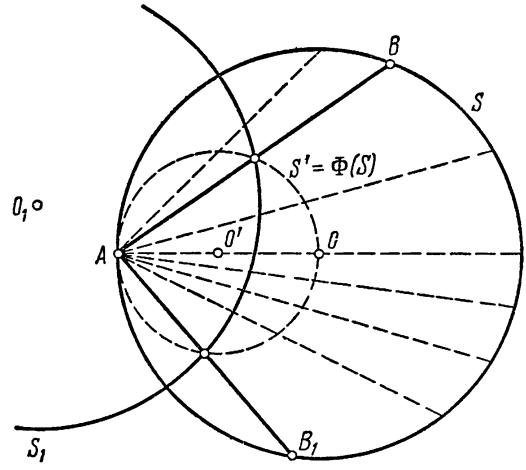


Рис. 20

треугольника) *пересекаются в одной точке* M (центре рассматрива-

емой гомотетии) *и делятся в ней в отношении* 2 : 1, *считая от вершины*. Далее, при той же гомотетии высоты треугольника ABC переходят в высоты треугольника $A_1B_1C_1$. Но высоты треугольника ABC — это перпендикуляры, восставленные к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$ в их серединах; поэтому они пересекаются в центре O описанной вокруг ABC окружности S. Отсюда следует, что *высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке H, причем точки H, O и точка пересечения медиан M* (центр гомотетии треугольников ABC и $A_1B_1C_1$) *лежат на одной прямой* [1]), *и* $HM : MO = 2$. Можно также заметить, что окружность S переходит при рассматриваемой гомотетии в описанную вокруг треугольника $A_1B_1C_1$ окружность S_1 (т. е. в окружность, проходящую через середины сторон треугольника ABC), радиус R_1 которой, очевидно, равен половине радиуса R окружности S, а центр O_1 лежит на прямой MO, причем $OM : MO_1 = 2$ (ибо M — центр гомотетии с коэффициентом $-\frac{1}{2}$, переводящей S в S_1). Отсюда следует, что *точка* O_1 *является серединой отрезка HO*, а значит, окружность S_1 гомотетична окружности S также с центром гомотетии H и коэффициентом гомотетии $+\frac{1}{2}$; поэтому окружность S_1 *проходит через середины* A', B' *и* C' *отрезков HA, HB и HC высот треугольника ABC* [2]).

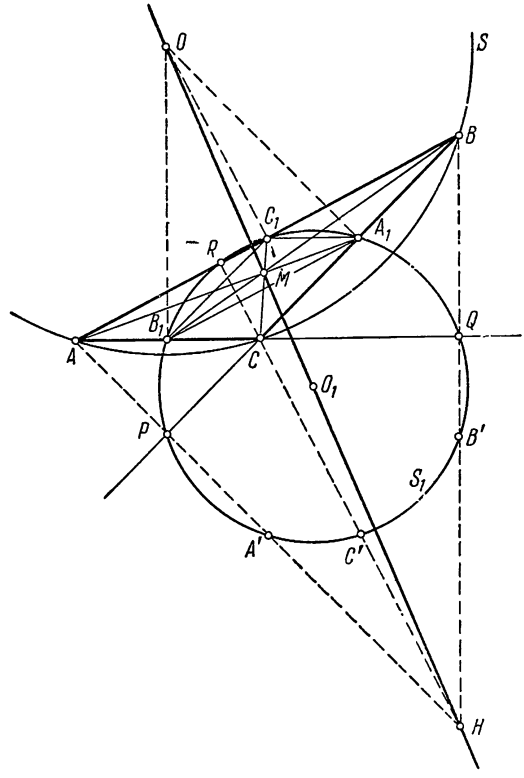


Рис. 21.

---

[1]) Прямая HMO называется прямой Эйлера треугольника ABC.

[2]) Окружность S_1 называется окружностью Эйлера треугольника ABC. Часто эту окружность называют также окружностью девяти точек, поскольку она проходит через 9 «замечательных» точек треугольника: через середины A_1, B_1, C_1 сторон, через середины A', B', C' отрезков высот и через основания P, Q, R высот. Последнее вытекает из того, что точки, скажем, A_1 и A' окружности S_1 являются диаметрально противоположными (ибо касательные к S_1 в точках A_1 и A' получаются из касательной к S в точке A при помощи гомотетии с центром M и коэф-

2.2. Применение симметрии. В первую очередь, говоря о применениях геометрических преобразований к доказательству теорем, следует указать на использование соображений симметрии для вывода свойств «симметричных» фигур. Чаще всего прилагательное «симметричный» указывает на наличие у геометрической фигуры оси симметрии, т. е. такой прямой l, что симметрия относительно l переводит фигуру саму в себя (рис. 22). Симметричными фигурами являются: отрезок (у него две оси симметрии — перпендикуляр, восставленный к отрезку в его середине, и прямая, на которой этот отрезок расположен); угол (ось симметрии — биссектриса угла); равнобедренный треугольник (ось симметрии — биссектриса угла при вершине); равнобедренная трапеция (ось симметрии — прямая, делящая пополам основания трапеции); ромб (оси симметрии — диагонали ромба); прямоугольник (оси симметрии — средние линии); окружность (оси симметрии — диаметры окружности) и т. д.

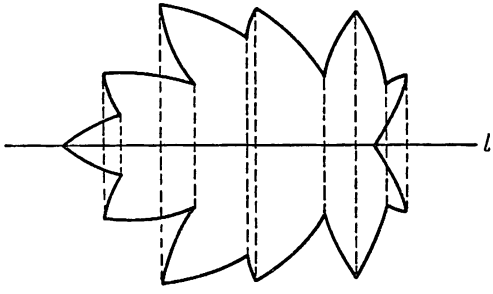


Рис. 22.

Иногда прилагательное «симметричный» указывает также на наличие у фигуры центра симметрии, т. е. точки O, симметрия относительно которой переводит фигуру в себя (рис. 23). Центрально-симметричными фигурами являются, например, параллелограмм (центр симметрии — точка пересечения диагоналей) или окружность (центр симметрии — центр окружности). Можно также заметить, что центральная симметрия с центром O совпадает с вращением вокруг точки O на угол $180° = \frac{360°}{2}$.

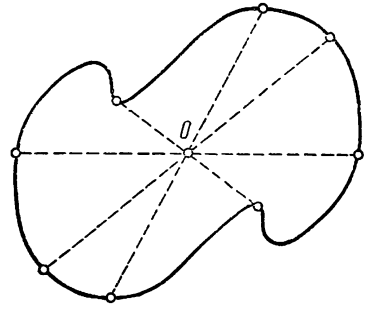


Рис. 23.

Это позволяет обобщить понятие центральной симметрии, считая, что некоторая фигура M обладает симметрией порядка k с центром O, если она переходит в себя при вращении вокруг точки O (центра симметрии k-го порядка) на угол

фициентом $-\frac{1}{2}$, соответственно при помощи гомотетии с центром H и коэффициентом $+\frac{1}{2}$; значит, эти касательные параллельны между собой). Поэтому прямой угол A_1PA' — вписанный в окружность S_1 и точка p принадлежит S_1.

$\frac{360°}{k}$ (рис. 24); так, правильный треугольник обладает симметрией третьего порядка (относительно центра треугольника), а правильный n-угольник — симметрией n-го порядка.

Ясно, что известные свойства перпендикуляра, восставленного к отрезку в его середине, или свойства биссектрисы угла непосредственно следуют из того, что рассматриваемая прямая является осью симметрии соответствующей фигуры. Точно так же все свойства равнобедренного треугольника вытекают из его симметричности; из симметричности окружности следует, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам. Из наличия у окружности S центра симметрии O вытекает, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, можно рассматривать как угол вписанного в S параллелограмма (рис. 25). С другой стороны, из наличия у окружности S осей симметрии следует, что перпендикуляры, опущенные из центра окружности на стороны параллелограмма, являются его осями симметрии, т. е. что этот параллелограмм представляет собой прямоугольник; таким образом, мы приходим к выводу, что *вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности — прямой*. Из того, что линия центров q двух окружностей S_1 и S_2 является осью симметрии фигуры, образованной этими двумя окружностями, вытекает, что точка пересечения общих внешних касательных m_1 и m_2 (или общих внутренних касательных n_1 и n_2) окружностей S_1 и S_2, принадлежит прямой q (рис. 26). Центр O правильного треугольника T (или квадрата K) является центром симметрии 3-го (соответственно 4-го) порядка. Отсюда вытекает, например, что прямые, проведенные через вершины правильного треугольника T и отсекающие $\frac{1}{3}$ противоположной стороны (рис. 27, *а*), сами образуют правильный треугольник с тем же центром. Аналогично этому прямые, проходящие через вершины квадрата K и делящие противоположные стороны пополам (рис. 27, *б*), образуют квадрат с тем же центром.

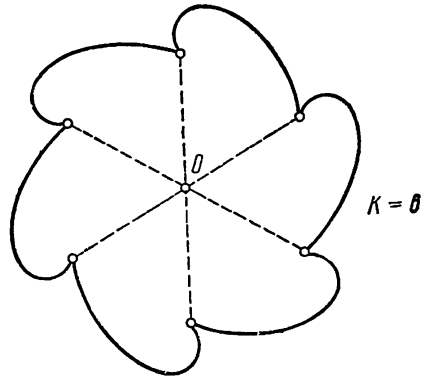


Рис. 24.

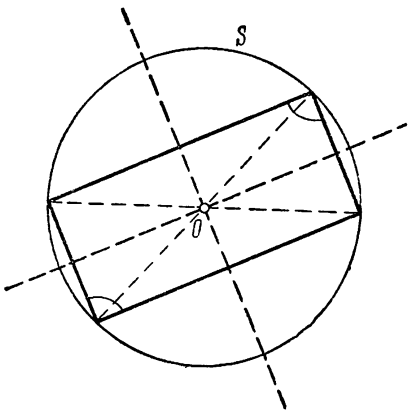


Рис. 25.

Все эти предложения доказываются почти одинаково. Так, из того, что симметрия относительно линии центров q окружностей S_1 и S_2, изображенных на рис. 26, переводит их в себя, следует, что также и совокупность общих касательных m_1 и m_2 окружностей переходит при этой симметрии в себя (точнее m_1 переходит в m_2, а m_2 — в m_1).

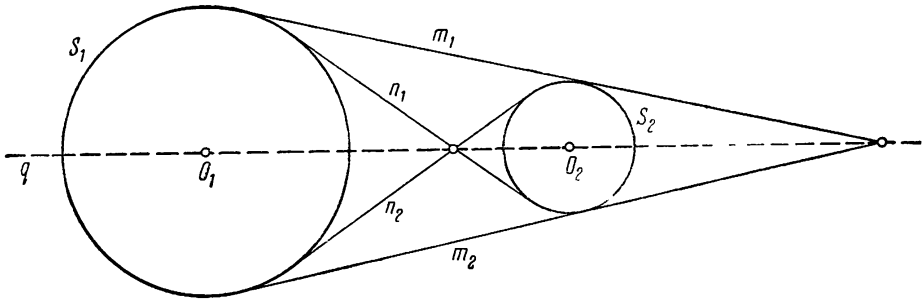


Рис. 26.

Но отсюда вытекает, что прямая q является осью симметрии образованного прямыми m_1 и m_2 угла, т. е. совпадает с биссектрисой этого угла. Точно так же из того, что вращение вокруг центра O правильного треугольника T на угол 120° переводит треугольник T в себя, вытекает, что и изображенный на рис. 27, *а* «внутренний»

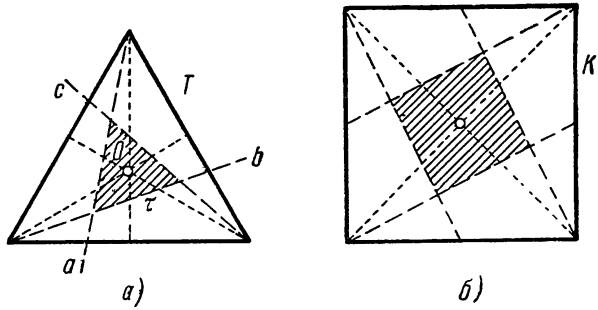


Рис. 27.

треугольник τ переходит при этом вращении в себя (прямая a переходит в b, b — в c, и c — в a); поэтому треугольник τ также имеет точку O своим центром вращения 3-го порядка, что возможно лишь в том случае, если этот треугольник правильный.

2.3. Использование геометрических преобразований для «симметризации» чертежа. Употребление преобразований, отличных от движений и от преобразований подобия, может иногда позволить использовать простые соображения симметрии в новых, более сложных условиях. Заметим, например, что сжатие к прямой (пример 8 на стр. 55) позволяет перевести каждый треугольник ABC в равно-

бедренный треугольник $A'BC$,— этого легко добиться с помощью сжатия к стороне BC, подобрав коэффициент сжатия так, чтобы было $A'B = BC$ (рис. 28; за BC можно, например, принять бóльшую из двух сторон AB, BC). Отсюда и из того, что параллельные прямые сжатие переводит в параллельные (стр. 62), вытекает, что каждую трапецию $ABCD$ можно сжатием перевести в равнобедренную трапецию $AB'C'D$ (рис. 29; достаточно перевести треугольник ABF в равнобедренный треугольник $AB'F$). А так как равнобедренная трапеция $AB'C'D$ обладает осью симметрии $E'F$,

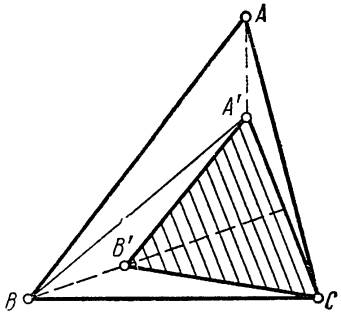


Рис. 28.

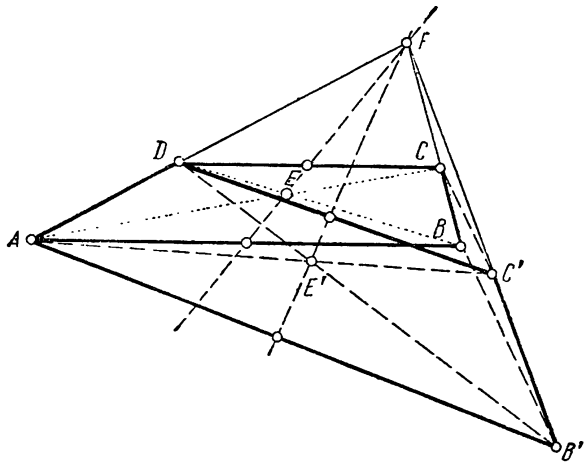


Рис. 29.

проходящей через середины оснований AB' и $C'D$, через точку пересечения диагоналей E' и через точку пересечения продолжений боковых сторон F, то можно заключить, что и *в произвольной трапеции $ABCD$ точка пересечения диагоналей, точка пересечения боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой* (здесь используется то, что сжатие к прямой сохраняет отношение отрезков одной прямой, стр. 62). Иначе говоря, прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

Два сжатия позволяют перевести любой треугольник в равносторонний. В самом деле, равнобедренный треугольник $A'BC$ (рис. 28) можно сжатием к прямой $A'C$ перевести в равносторонний треугольник $A'B'C$. Поэтому для доказательства того, что медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке, достаточно показать, что пересекаются в одной точке медианы равностороннего треугольника. Но последнее сразу следует из соображений симметрии (или из того, что медианы равностороннего треугольника одновременно

являются его биссектрисами). Отсюда же следует, что если соединить вершины произвольного треугольника ABC с точками, делящими противоположные стороны в отношении 2:1 (рис. 30), то точка пересечения медиан образованного проведенными прямыми треугольника совпадает с точкой пересечения медиан исходного треугольника (ибо совпадают точки пересечения медиан — центры — изображенных на рис. 27, *а* правильных треугольников T и τ); доказательство этого, не использующее соображений симметрии и свойств сжатия к прямой, достаточно сложно.

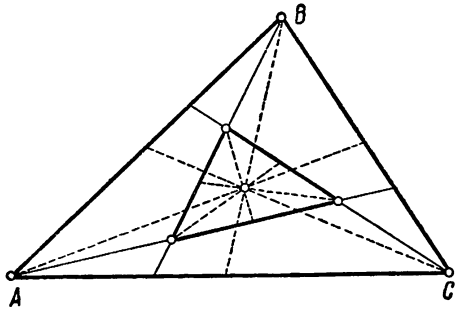


Рис. 30.

Аналогичное применение допускает и инверсия (см. выше, пример 9, стр. 56). Так, например, можно показать, что каждые две непересекающиеся окружности можно некоторой инверсией перевести в две равные окружности. Рассмотрим теперь изображенные ни рис. 31, *а* четыре окружности S_1, S_2, S_3 и S_4, где S_1 касается S_2, S_2—S_3, S_3—S_4 и S_4—снова S_1; точки касания окружностей обозначим через A, B, C и D. Переведем инверсией две «противоположные» окружности S_1 и S_3 в равные окружности S_1' и S_3'; при этом рис. 31, *а* перейдет в симметричный рис. 31, *б* (осью симметрии которого является линия центров p окружностей S_2' и S_4'). Ясно, что прямая $O_2'O_4'$ будет являться осью симметрии и образованного точками касания преобразованных окружностей четырехугольника $A'B'C'D'$, откуда следует, что этот четырехугольник является равнобочной трапецией. Таким образом, мы убеждаемся, что точки A', B', C' и D' принадлежат одной окружности [1]). А так как инверсия переводит окружность в окружность, то и *точки A, B, C и D принадлежат одной окружности*!

Наличие на плоскости «особой» точки O (центра инверсии), переводимой инверсией в «бесконечно удаленную» (с точки зрения элементарной геометрии — несуществующую!) точку, открывает новые возможности применения этого преобразования в элементарной геометрии. Выше мы говорили о пользе, которую можно извлечь из того, что чертеж геометрической теоремы часто можно при помощи, скажем, сжатия к прямой перевести в «более симметричный» чертеж (ср. стр. 69). Но инверсия значительно больше изменяет чертежи, чем сжатие к прямой, что делает это преобразование еще более ценным для приложений.

В качестве примера рассмотрим снова теорему: *«если окр жность S_1 касается S_2, S_2 касается S_3, S_3 касается S_4 и S_4 касается S_1* (рис. 31,*а*), *то четыре точки касания принадлежат одной окружности (или прямой)*». Выше мы доказывали эту теорему, преобразовав ее чертеж в более сим-

---

[1]) Или прямой (см. рис. 31, *в*). Вообще в вопросах, связанных с использованием инверсии, мы вынуждены считать окружности и прямые равноправными (ибо окружность инверсия может перевести в прямую); поэтому в таких случаях слово «окружность» обычно означает «окружность или прямая».

метричный чертеж такого же рода. Но еще сильнее можно изменить этот чертеж, подвергнув его инверсии с центром в точке A касания окружностей S_1 и S_2. При этом точка A перейдет в «бесконечно удаленную» точку Ω;

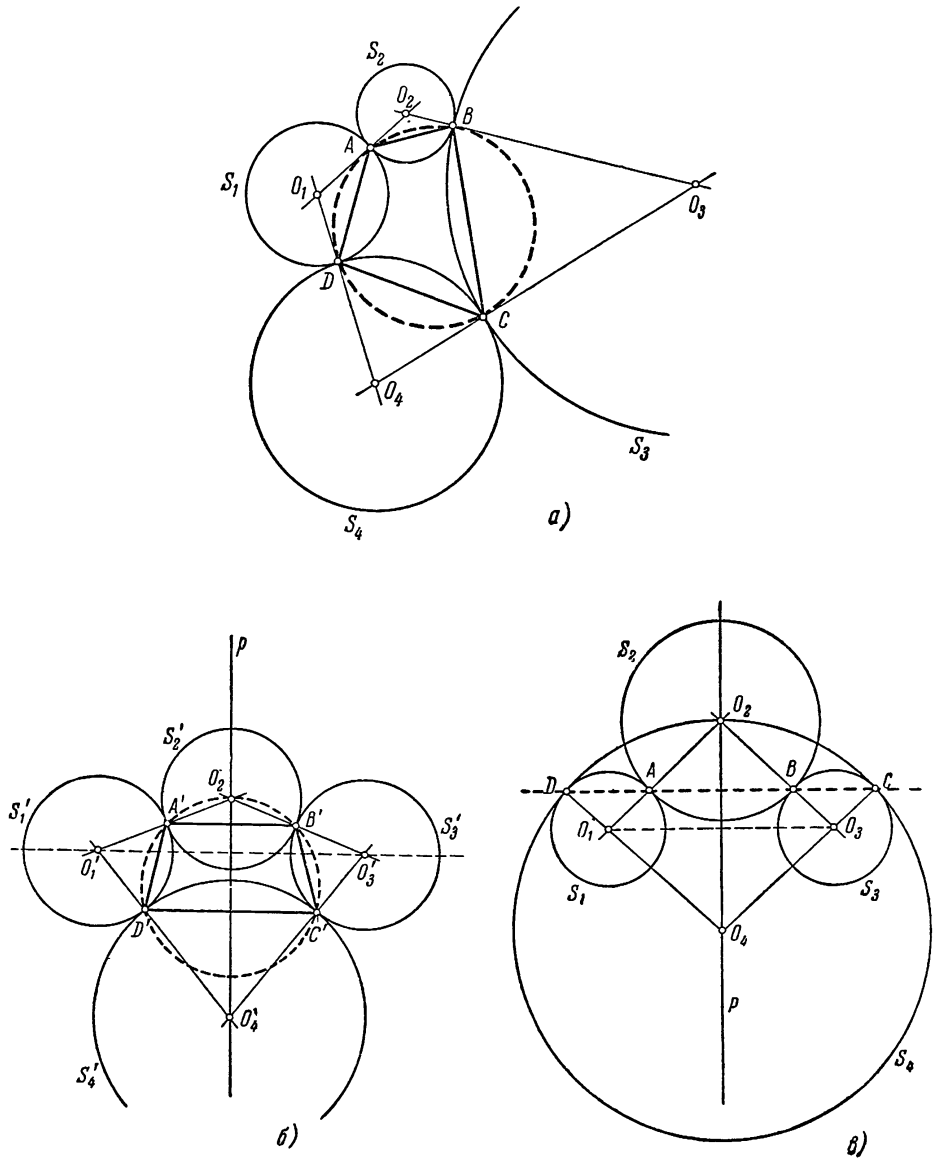


Рис. 31.

окружности S_1 и S_2 перейдут в прямые S_1' и S_2', которые должны быть параллельны, так как они не имеют (отличных от Ω) общих точек (ведь S_1 и S_2 имеют единственную общую точку A!). В результате исходный

чертеж перейдет в совсем иной (см. рис. 32). Но так как точки B', C' и D' на рис. 32 принадлежат одной прямой (это следует, например, из того, что $\angle 1 = \angle 4$, как накрест лежащие, и $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 4 = \angle 3$; следовательно, $\angle 2 = \angle 3$), то точки B, C и D, образами которых они являются, лежат на одной окружности (или на одной прямой) с точкой A (центром инверсии), что и требовалось доказать.

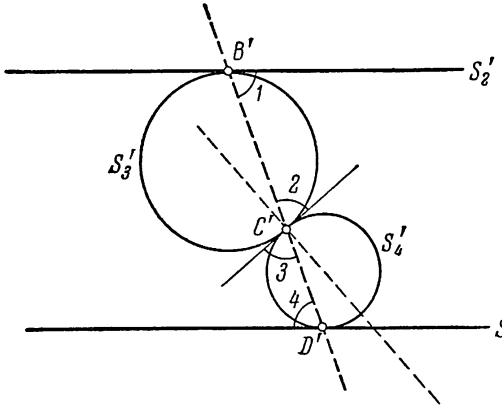


Рис. 32.

§ 3. Аналитическая запись геометрических преобразований

3.1. Запись геометрических отображений в координатах. Большую пользу при изучении точечных преобразований и отображений может принести метод координат. Предположим, что плоскость отнесена к некоторой системе координат x, y; для простоты мы будем иметь в виду декартову систему координат, хотя принципиально ничего не изменилось бы при использовании, скажем, полярных координат. Пусть Φ — некоторое отображение, областью определения которого служит некоторая область $\mathcal{A}$ на плоскости (возможно, вся плоскость), а областью значений — некоторая область $\mathcal{A}'$ той же плоскости. Каждая точка A области $\mathcal{A}$ характеризуется парой чисел (x, y), и преобразование Φ сопоставляет с каждой парой чисел (x, y) (выбранной из некоторой области допустимых значений координат, характеризующих область $\mathcal{A}$) некоторую новую пару чисел (x', y') — координаты точки $A' = \Phi(A)$. Другими словами, координаты (x', y') преобразованной точки A' являются функциями пары чисел x, y:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \varphi(x, y), \\ y' &= \psi(x, y). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Таким образом, *задание точечного отображения равносильно заданию пары числовых функций двух переменных;* обратно, *каждую пару функций двух переменных можно представлять себе как запись определенного отображения* [1]). В частности, формулами вида (1) можно записывать преобразования плоскости.

Выпишем аналитические формулы для некоторых из рассмотренных выше преобразований. Прежде всего совершенно ясно, что в декар-

[1]) При этом непрерывным отображениям (см. выше, стр. 60) отвечают непрерывные функции.

товой системе координат *параллельный перенос* записывается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

здесь (x, y) — координаты точки A; (x', y') — координаты преобразованной точки A' и (a, b) — координаты постоянного вектора $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$ (вектора переноса)[1]). Далее, *симметрия относительно начала координат* $O(0, 0)$ записывается формулами:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

а *симметрия относительно оси* x — формулами:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -y. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Обобщением формул (3) и (4) являются формулы, записывающие *гомотетию* с центром O и коэффициентом k:

$$\left.\begin{aligned} x' &= kx, \\ y' &= ky, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

и формулы, выражающие *сжатие к оси* x с коэффициентом сжатия k:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= ky; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

при $k = -1$ формулы (5), (6), как и следовало ожидать, переходят соответственно в формулы (3) и (4).

Во всех рассмотренных выше случаях функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ (см. (1)) имели очень простой вид — они являлись линейными функциями. В других случаях эти функции оказываются более сложными; так, например, *инверсия* с центром в начале координат O и степенью k записывается формулами:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{kx}{x^2 + y^2}, \\ y' &= \frac{ky}{x^2 + y^2}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

а *гиперболическая инверсия* со степенью k (см. стр. 59), осью которой является ось x, — формулами:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= \frac{k}{y} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

[1]) Ср. ниже, стр. 81.

В самом деле, например, формулы (7) показывают, что $x' : y' = x : y$, т. е. что преобразованная точка A' и исходная точка A лежат на одной прямой с началом координат O и что $x'^2 + y'^2 = \frac{k^2}{x^2+y^2}$, т. е. $OA'^2 = \frac{k^2}{OA^2}$.

3.2. Аналитические методы изучения преобразований. Аналитическое задание геометрических преобразований позволяет изучать их свойства методами аналитической геометрии. Докажем, например, что *инверсия переводит каждую окружность или прямую снова в окружность или прямую.* Нетрудно видеть, что уравнение окружности с центром в начале координат $O(0, 0)$ и радиусом r имеет вид

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

уравнение окружности с центром в точке $Q(a, b)$ и радиусом r записывается так:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

или

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0, \tag{9}$$

где

$$\frac{B}{A} = -a, \quad \frac{C}{A} = -b, \quad \frac{D}{A} = a^2 + b^2 - r^2; \quad A \neq 0. \tag{9a}$$

При этом окружность проходит или не проходит через начало координат в зависимости от того, равен ли коэффициент D уравнения (9) нулю или отличен от нуля (в первом случае точка с координатами (0, 0) удовлетворяет уравнению (9), во втором случае — не удовлетворяет). Уравнение (9) охватывает также и прямые линии; прямую мы получим, положив в этом уравнении $A = 0$. Если же в уравнении (9) и $A = 0$, и $D = 0$, то мы будем иметь прямую, проходящую через начало координат.

Выясним теперь, во что переходит при инверсии геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (9) (т. е. окружность или прямая). Заметим прежде всего, что формулы (7) можно записать также в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{kx}{x'^2 + y'^2}, \\ y &= \frac{ky}{x'^2 + y'^2}. \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Если подставить в уравнение (9) вместо x и y их выражения из формул (7а), то получим

$$Ak^2 + 2Bkx' + 2Cky' + D(x'^2 + y'^2) = 0. \tag{9'}$$

Отсюда непосредственно следует:

А. *Прямая, проходящая через центр инверсии* (случай $A=0$, $D=0$), *переходит при инверсии сама в себя*;

Б. *Прямая, не проходящая через центр инверсии* ($A=0$, $D\neq 0$), *переходит в окружность, проходящую через центр инверсии*;

В. *Окружность, проходящая через центр инверсии* ($A\neq 0$, $D=0$), *переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии*;

Г. *Окружность, не проходящая через центр инверсии* ($A\neq 0$, $D\neq 0$), *переходит в окружность, также не проходящую через центр инверсии.*

Аналогично этому доказывается, что гиперболическая инверсия (8) переводит:

А. *Прямую* $y=a$, *параллельную оси* $y=0$ *гиперболической инверсии,— в прям ю* $\frac{k}{y'}=a$ $\left(\text{или } y'=\frac{k}{a}\right)$, *также параллельную оси инверсии*;

Б. *Прямую* $x=b$, *перпендикулярную оси инверсии,— в ту же прямую*;

В. *Прямую* l *с уравнением*

$$x=ay+b \qquad (a\neq 0), \quad (10)$$

пересекающую ось $y=0$ *инверсии под углом, отличным от* 90°, *— в гиперболу*

$$x'=\frac{ak}{y'}+b,$$

или

$$(x'-b)\,y'=ak, \quad (10')$$

асимптотами которой являются ось о инверсии и перпендикуляр q, *восставленный к о в точке пересечения прямой* l *с о* (рис. 33; в декартовой системе координат с осями o и q уравнение (10′) записывается в виде $XY=ak$; график этой обратно пропорциональной зависимости является, как известно, гиперболой).

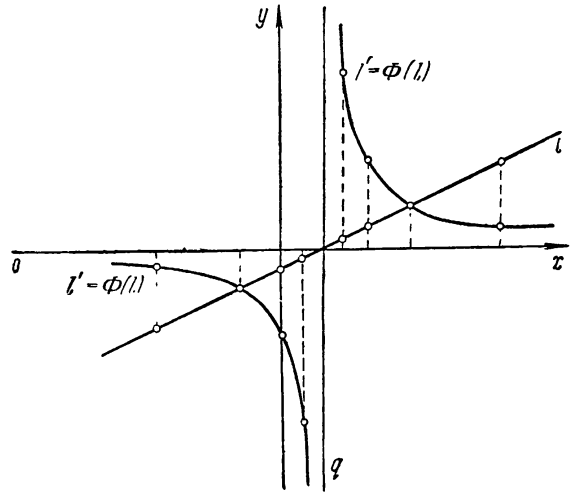


Рис. 33.

Обратно, в прямые линии при гиперболической инверсии переходят прямые, параллельные и перпендикулярные оси o инверсии, и равнобочные гиперболы (10′), одна из асимптот которых совпадает с осью o инверсии; именно этим объясняется прилагательное «гиперболическая» в названии самого преобразования.

3.3. Линейные преобразования. Иногда аналитическое задание преобразования кладут в основу его определения. В этих случаях уже неизбежно приходится выводить геометрические свойства преобразования из аналитических формул.

Рассмотрим следующий пример. **Линейными отображениями** плоскости называют отображения, записываемые в какой-либо декартовой системе координат формулами (1), где функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ линейные:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Частными случаями линейных отображений являются, как мы видели, параллельный перенос (2), симметрия относительно точки (3) или относительно прямой (4), сжатие к точке (гомотетия) (5) или сжатие к прямой (6).

Если в формулах (11) $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, то, очевидно, отображение переводит все точки плоскости в одну точку (c_1, c_2). Если коэффициенты при x и при y в двух уравнениях (11) пропорциональны, т. е. $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$, то при любых x и y имеем

$$y' = \lambda x' + c, \quad \text{где} \quad c = c_2 - \lambda c_1, \tag{12}$$

и, значит, все точки плоскости переходят в точки прямой (12). Наконец, если коэффициенты a_2, b_2 не пропорциональны a_1, b_1, т. е. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то уравнения (11) можно переписать в виде

$$x = \alpha_1x' + \beta_1y' + \gamma_1, \quad y = \alpha_2x' + \beta_2y' + \gamma_2, \tag{11'}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, & \beta_1 &= \frac{-b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, & \gamma_1 &= \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ \alpha_2 &= \frac{-a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}, & \beta_2 &= \frac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, & \gamma_2 &= \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned}\right\} \tag{11''}$$

(для этого достаточно решить уравнения (11) относительно неизвестных x', y'). Таким образом, отображение (11) переводит в каждую точку (x', y') плоскости единственную точку (x, y) (определенную по формулам (11')), т. е. является **линейным преобразованием.**

Покажем, что *всякое линейное преобразование переводит каждую прямую плоскости снова в прямую линию*, т. е. является аффинным преобразованием [1]). Действительно, для того чтобы найти линию, в которую преобразование (11) переводит прямую

$$Ax + By + C = 0, \tag{13}$$

---

[1]) Можно доказать, что и, обратно, *каждое аффинное преобразование плоскости является линейным преобразованием*, т. е. записывается в координатах линейными уравнениями, однако доказательство этого факта довольно сложно (см., например, Б. Н. Делоне и Д. А. Райков, Аналитическая геометрия, ч. I, М.—Л., Гостехиздат, 1948, стр. 152, или И. М. Яглом и В. Г. Ашкинузе, Идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч. I, М., Учпедгиз, 1962, стр. 78).

достаточно подставить в уравнение (13) значения x и y из (11′). При этом мы получим

$$(A\alpha_1 + B\alpha_2)\,x' + (A\beta_1 + B\beta_2)\,y' + (A\gamma_1 + B\gamma_2 + C) = 0 \qquad (13')$$

(где оба коэффициента $A\alpha_1 + B\alpha_2$ и $A\beta_1 + B\beta_2$ не равны одновременно нулю, ибо отображение (11′) тоже является преобразованием и $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$), т. е. снова уравнение прямой!

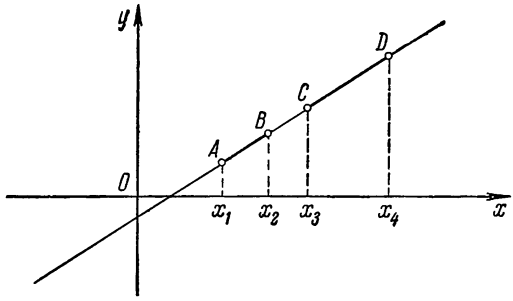


Рис. 34.

Столь же просто убедиться, скажем, что *линейное преобразование сохраняет отношение отрезков одной прямой.* Для этого заметим, что если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ — четыре точки одной прямой $y = kx + b$, то $\frac{AB}{CD} = \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3}$ (рис. 34). Но точки $A(x_1, y_1), \ldots, D(x_4, y_4)$ переходят в точки $A'(x_1', y_1'), \ldots, D'(x_4', y_4')$, где

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' &= (a_1x_2 + b_1y_2 + c_1) - (a_1x_1 + b_1y_1 + c_1) = \\ &= a_1(x_2 - x_1) + b_1(y_2 - y_1) = \\ &= a_1(x_2 - x_1) + b_1[(kx_2 + b) - (kx_1 + b)] = \\ &= (a_1 + b_1k)(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

и

$$x_4' - x_3' = (a_1 + b_1k)(x_4 - x_3),$$

откуда следует, что

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{x_2' - x_1'}{x_4' - x_3'} = \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_3} = \frac{AB}{CD}.$$

Предоставляем читателю проверить самостоятельно, что *каждое линейное преобразование плоскости переводит параллельные прямые снова в параллельные прямые.*

3.4. Комплексные координаты точек круговой плоскости. Поскольку круговая плоскость представляет собой совершенно новое геометрическое понятие, отличное от обычной плоскости, то для него становятся неприемлемыми принятые способы введения координат, сопоставляющие с каждой точкой плоскости определенную систему чисел — координаты этой точки. Тем самым становится невозможным аналитический подход к инверсии (и другим круговым преобразованиям), рассматриваемой как преобразование круговой плоскости. Между тем большой интерес, который представляет для геометрии понятие круговой плоскости, делает весьма важной задачу построения

такой системы координат, которая охватывала бы и «бесконечно удаленную» точку круговой плоскости. Не вдаваясь в детали, мы наметим здесь один путь решения этой задачи.

Заметим прежде всего, что в качестве координат точки обыкновенной плоскости часто оказывается удобным принимать не пару чисел x, y, а одно комплексное число $z=x+iy$ («комплексная координата» точки). В таком случае геометрические преобразования плоскости будут описываться не парой функций двух переменных (см. формулы (1), стр. 72), а одной функцией комплексного переменного [1]):

$$z'=F(z). \tag{14}$$

Расширим теперь область комплексных чисел, присоединив к «обыкновенным» числам еще одно «идеальное» (несуществующее) число ∞ («бесконечность»), определяемое как результат деления (любого, отличного от нуля) комплексного числа на нуль (невозможного в области обыкновенных чисел!). Такая «расширенная» комплексная плоскость по существу совпадает с круговой плоскостью (причем «идеальное» число ∞ отвечает «несобственной» точке Ω).

Инверсия со степенью k и с центром в точке O, имеющей комплексную координату 0, аналитически записывается, как мы сейчас увидим, следующей формулой:

$$z'=\frac{k}{\bar{z}}, \tag{15}$$

где $\bar{z}=x-iy$ есть комплексное число, сопряженное с числом $z=x+iy$. Из (15) сразу следует, что центр O инверсии переходит в «идеальную» точку ∞, и наоборот; что же касается отличной от центра («обыкновенной») точки $z=x+iy$, то она переходит в точку

$$z'=x'+iy'=\frac{k}{x-iy}=\frac{k(x+iy)}{x^2+y^2}=\frac{kx}{x^2+y^2}+\frac{ky}{x^2+y^2}\,i, \tag{15a}$$

что и доказывает совпадение преобразования (15) с инверсией (ср. формулу (15а) с формулами (7), стр. 73). Аналогично этому взаимно однозначными преобразованиями круговой плоскости являются все преобразования, записываемые дробно-линейными функциями комплексного переменного

$$z'=\frac{az+b}{cz+d} \text{ или } z'=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \text{ где } ad-bc\neq 0, \text{ т. е. } \frac{a}{c}\neq\frac{b}{d} \tag{16}$$

(a, b, c, d — комплексные числа). Преобразование (16) переводит в «бесконечно удаленную» точку Ω круговой плоскости точку с ком-

---

[1]) Ср. ЭЭМ, кн. III, статью «Элементарные функции комплексного переменного».

плексной координатой z, определенной равенством $cz+d=0$, соответственно $\bar{c}\bar{z}+d=0$ $\left(\text{т. е. с координатой } z=-\frac{d}{c} \text{ или } \bar{z}=-\frac{d}{c}\right)$ и переводит Ω в точку $z'=\frac{a}{c}$ (последнее вытекает из того, что (16) можно также переписать в виде $z'=\dfrac{a+\dfrac{b}{z}}{c+\dfrac{d}{z}}$ или $z'=\dfrac{a+\dfrac{b}{\bar{z}}}{c+\dfrac{d}{\bar{z}}}$).

«Дробно-линейные преобразования» (16) плоскости комплексного переменного оказываются тесно связанными с инверсиями [1]).

3.5. Бирациональные преобразования. С аналитической точки зрения линейные преобразования (11) являются самыми простыми в том смысле, что здесь функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, фигурирующие в аналитической записи (1) преобразования, имеют самое простое строение. Очень удобно также и то, что в этом случае и координаты x, y исходной точки выражаются через координаты x', y' преобразованной точки линейным образом (см. формулы (11′)). Обобщением таких преобразований являются преобразования, задаваемые произвольными рациональными (но не обязательно линейными!) функциями φ и ψ координат x и y (см. (1)), обладающими тем свойством, что и, обратно, x и y выражаются через x' и y' также рационально. Преобразования подобного рода называются **бирациональными**; в современной геометрии они играют весьма важную роль [2]).

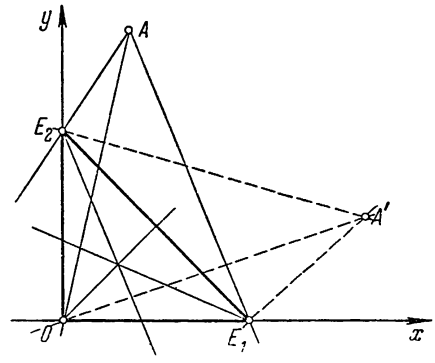


Рис. 35.

Невырожденные линейные преобразования доставляют простейший пример бирациональных преобразований. Другими примерами могут служить инверсия (7), гиперболическая инверсия (8) или следующее преобразование:

$$x'=\frac{y(x+y-1)}{x(x-1)+y(y-1)}, \quad y'=\frac{x(x+y-1)}{x(x-1)+y(y-1)}. \tag{17}$$

Заметим, что если рассматривать формулы (17) как уравнения с неизвестными x, y и разрешить их, то мы получим в точности такие же формулы, выражающие x и y через x' и y':

$$x=\frac{y'(x'+y'-1)}{x'(x'-1)+y'(y'-1)}, \quad y=\frac{x'(x'+y'-1)}{x'(x'-1)+y'(y'-1)}. \tag{17a}$$

Преобразование (17) имеет любопытный геометрический смысл. Если соединить произвольную точку $A(x, y)$ плоскости с вершинами $O(0, 0)$,

---

[1]) Множество преобразований (16) круговой плоскости совпадает с множеством всех круговых преобразований (ср со статьей «Окружности», стр. 478).

[2]) Понятие бирационального преобразования является основным для так называемой «алгебраической геометрии», выросшей уже в настоящем столетии в большую и содержательную науку.

$E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1)$ «координатного треугольника» OE_1E_2 и затем симметрично отразить каждую из прямых AO, AE_1, AE_2, от биссектрисы соответствующего угла треугольника, то полученные три прямые пересекутся в одной точке A', координаты x' и y' которой как раз и даются формулами (17) (рис. 35). Точно так же, если заменить в этом построении треугольник OE_1E_2 произвольным треугольником PQR, то мы получим некоторое бирациональное преобразование плоскости.

Приведенные примеры указывают, что бирациональные преобразования, столь важные для высшей геометрии, играют также известную роль и в геометрии элементарной.

§ 4. Произведение отображений и преобразований

4.1. Определение произведения отображений; примеры. Мы уже говорили о том, что точечные отображения являются функциями, отличающимися от привычных нам функций лишь тем, что здесь и аргумент и само значение функции являются не числом, а точками. В этом параграфе мы выясним, какой смысл имеет в применении к отображениям и преобразованиям понятие сложной функции (функции от функции).

Если $y=f(x)$, а $z=g(y)$, то z также является функцией от аргумента x:

$$z=g[f(x)]$$

(например, если $f(x)=a^x$, $g(y)=\sqrt{y}$, то $z=\sqrt{a^x}$; если $f(x)=\sin x$, $g(y)=\log y$, то $z=\log\sin x$ и т. д.). Аналогично определяется и «сложное отображение» (отображение от отображения). Именно пусть Φ — отображение с областью определения $\mathcal{A}$ и областью значений $\mathcal{A}_1$; пусть, кроме того, задано другое отображение Ψ, областью определения которого служит то же точечное множество $\mathcal{A}_1$, которое является областью значений для первого отображения. Область значений отображения Ψ обозначим через $\mathcal{A}_2$. Так как для любой точки A области $\mathcal{A}$ ее образ $A'=\Phi(A)$ принадлежит области $\mathcal{A}_1$ — области определения преобразования Ψ, — то определена также точка

$$A''=\Psi(A')=\Psi(\Phi(A)),$$

принадлежащая области $\mathcal{A}_2$. Таким образом, с каждой точкой A области $\mathcal{A}$ сопоставляется точка A'' области $\mathcal{A}_2$, так что мы получаем некоторое отображение с областью определения $\mathcal{A}$ и областью значений $\mathcal{A}_2$. Это отображение, переводящее точку A в A'', называют *произведением* отображений Φ и Ψ [1]) и обозначают просто через $\Psi\Phi$ (без скобок). Таким образом,

$$\Psi\Phi(A)=\Psi(\Phi(A))$$

— эта формула является не чем иным, как *определением* произведения отображений.

[1]) Иногда также *суммой* отображений Φ и Ψ.

Если Φ и Ψ — преобразования с одной и той же областью действия $\mathcal{A}$, то их произведение $\Psi\Phi$ также, очевидно, является преобразованием с той же областью действия $\mathcal{A}$.

Приведем несколько примеров.

1°. Пусть Φ — параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$, Ψ — параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{M'M''} = \boldsymbol{b}$, (см. пример 4 на стр. 54). Очевидно, что если $AA' \# MM'$ и $A'A'' \# M'M''$, то $AA'' \# MM''$; другими словами, если $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$, $\overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{M'M''}$, то $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{MM''}$ (рис. 36). Таким образом, *произведение* $\Psi\Phi$ *двух параллельных*

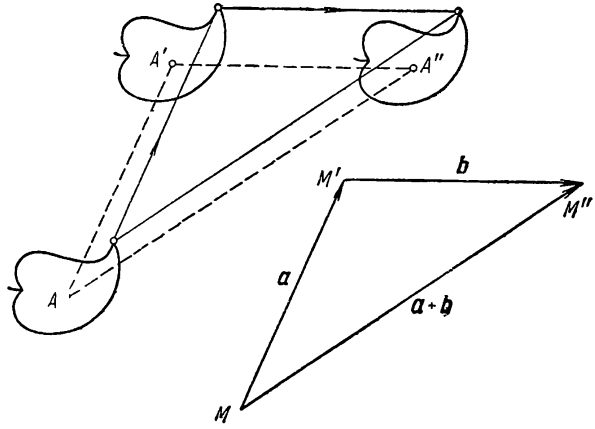


Рис. 36.

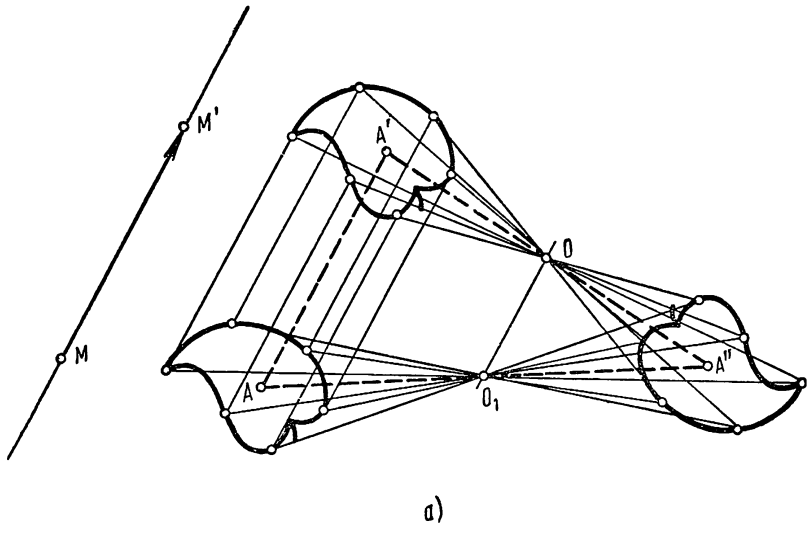
переносов (на вектор $\overrightarrow{MM'} = \boldsymbol{a}$ и на вектор $\overrightarrow{M'M''} = \boldsymbol{b}$) *также представляет собой параллельный перенос* (на вектор $\overrightarrow{MM''} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$) [1]).

2°. *Если* Φ *есть параллельный перенос на вектор* $\overrightarrow{MM'}$, *а* Ψ — *симметрия относительно точки* O, *то* $\Psi\Phi$ *представляет собой симметрию относительно такой точки* O_1, *что* $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'M}$ (рис. 37, *а*). Это следует из того, что если $\Phi(A) = A'$ и $\Psi(A') = A''$, то OO_1 есть средняя линия треугольника $AA'A''$, и поэтому отрезок AA'' делится в точке O_1 пополам (если точки A, A' и O лежат на одной прямой, то треугольник $AA'A''$ вырождается в отрезок; проследить, как при этом видоизменяются рассуждения, мы предоставляем читателю).

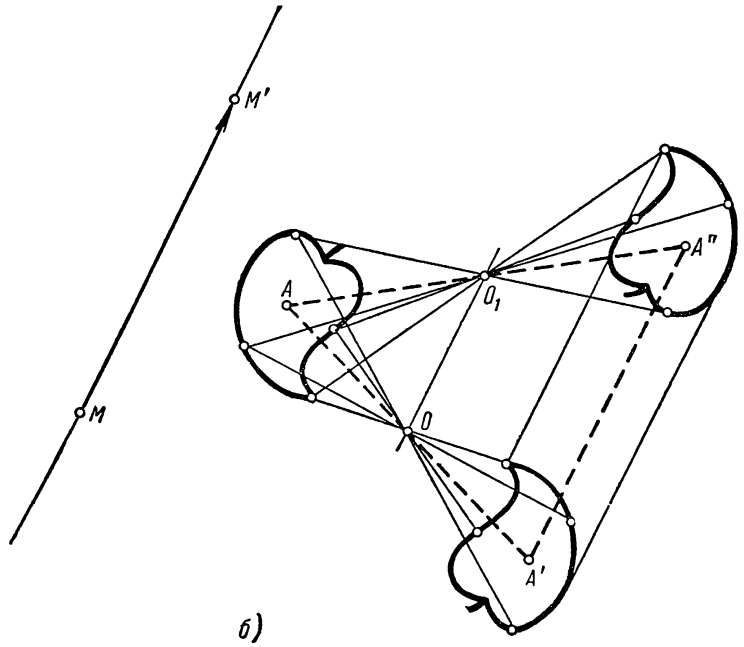
Аналогично, *если* Φ — *симметрия относительно точки* O, *а* Ψ — *параллельный перенос на вектор* $\overrightarrow{MM'}$, *то* $\Psi\Phi$ *есть симметрия относительно такой точки* O_1, *что* $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$ (рис. 37, *б*).

---

[1]) Ср. в этой книге статью «Векторы и их применения в геометрии», стр. 295.



а)



б)

Рис. 37.

3°. *Пусть* Φ — *симметрия относительно точки* O, *а* Ψ — *симметрия относительно* (другой) *точки* O_1 (рис. 38). Ясно, что если $A' = \Phi(A)$, $A'' = \Psi(A')$, то OO_1 есть средняя линия треугольника $AA'A''$ и, следовательно, $\overline{AA''} = 2\overline{OO_1}$; поэтому здесь *произведение* $\Psi\Phi$ *преобразований представляет собой параллельный перенос* (на вектор $2\overline{OO_1}$).

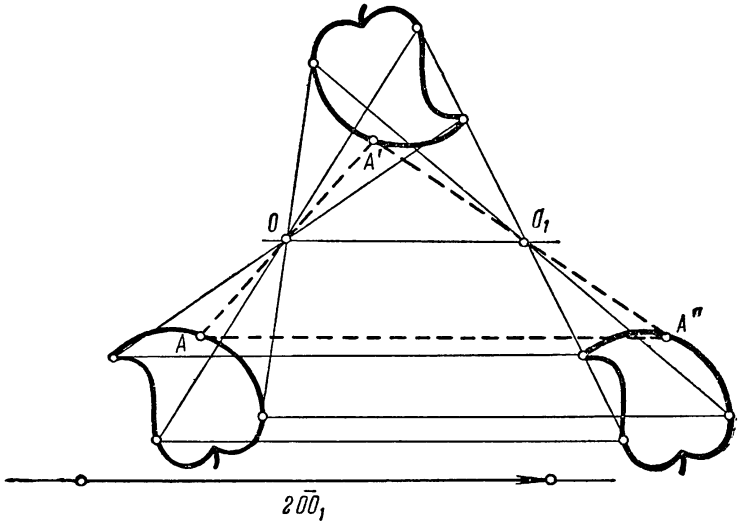


Рис. 38.

4°. Выясним теперь, что представляет собой *произведение двух симметрий* Φ *и* Ψ *относительно прямых* l *и* l_1. Здесь следует различать два случая:

а) Если прямые l и l_1 параллельны и $A' = \Phi(A)$, $A'' = \Psi(A')$, то $AA' \perp l$, $A'A'' \perp l_1$. При этом отрезок AA' делится пополам точкой P пересечения его с l; отрезок $A'A''$ делится пополам точкой Q его пересечения с l_1. Отсюда легко усмотреть, что $\overline{AA''} = 2\overline{PQ}$ (рис. 39, *а*) и, следовательно, *произведение* $\Psi\Phi$ *есть параллельный перенос* в направлении, перпендикулярном прямым l и l_1, на расстояние, в два раза большее расстояния между l и l_1 (вектор переноса направлен от l к l_1).

б) Если прямые l и l_1 пересекаются в точке O и $A' = \Phi(A)$, $A'' = \Psi(A')$, то, очевидно, $OA' = OA$ и $OA'' = OA'$; кроме того, лучи OA' и OA образуют равные углы с прямой l, а лучи OA'' и OA' — с прямой l_1 (рис. 39, *б*). Отсюда следует, что $OA'' = OA$ и что $\angle AOA''$ равен удвоенному углу между прямыми l и l_1, т. е. что *произведение* $\Psi\Phi$ *представляет собой вращение* вокруг точки O пересечения прямых l и l_1 на угол, равный удвоенному углу между l и l_1 (направление вращения — от l к l_1).

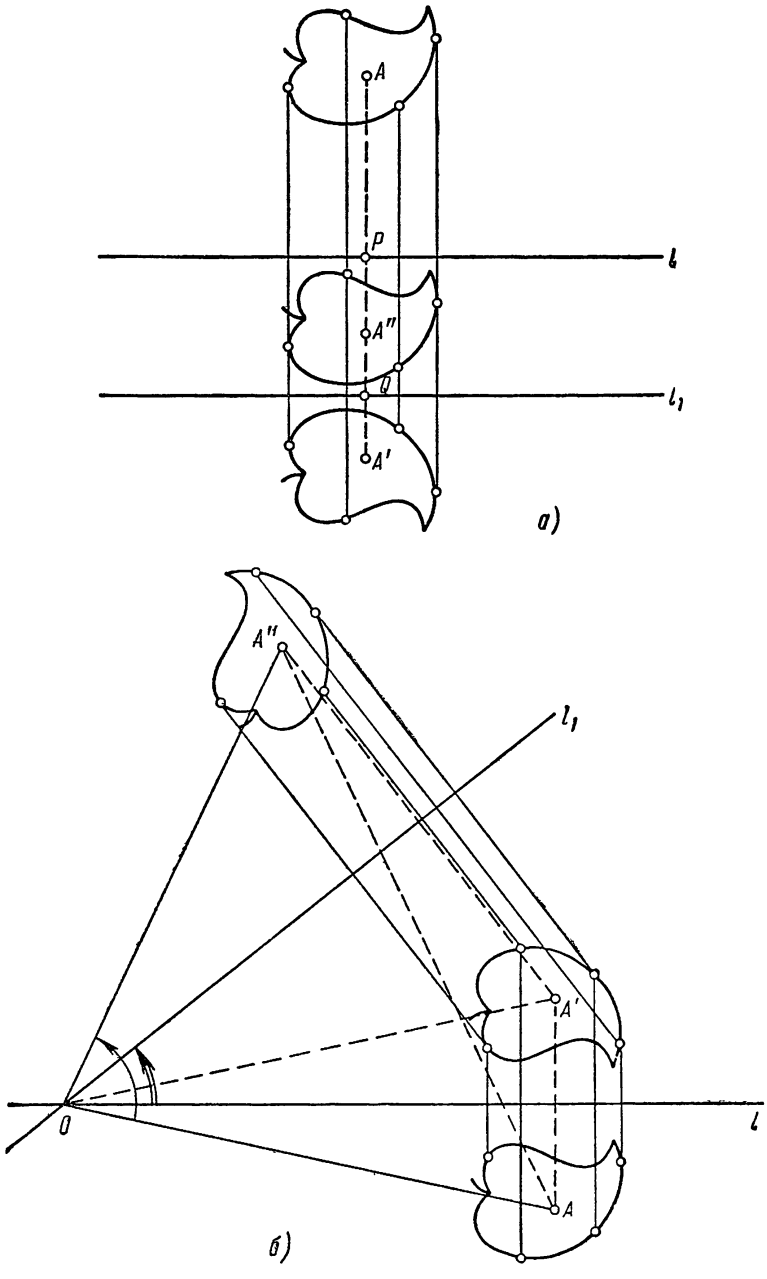


Рис. 39.

Заметим, что в примерах 3° и 4° мы считали, что центры O и O_1 или оси l и l_1 симметрий Φ и Ψ различны. Можно, однако, искать и произведение двух симметрий Φ относительно одной и той же точки O или прямой l (это произведение можно обозначить через $\Phi\Phi$ или через Φ^2). Так как симметрия Φ переводит образ A' каждой точки A обратно в точку A, то преобразование Φ^2 *переводит каждую точку A саму в себя*, т. е. не меняет положения ни одной точки плоскости. Такое «преобразование» I (здесь хотелось бы говорить об отсутствии всякого преобразования) называется тождественным преобразованием плоскости; оно аналогично функции $f(x)=x$ числового переменного x, сопоставляющей с каждым значением аргумента x то же самое число.

Таким образом, *квадрат симметрии относительно точки или относительно прямой* (т. е. произведение двух одинаковых симметрий) *представляет собой тождественное преобразование* (ср. ниже, стр. 97).

4.2. Некоторые общие свойства произведения преобразований. Отметим, что, как следует из наших примеров, *произведение двух преобразований* (в отличие от произведения чисел), вообще говоря, *существенно зависит от порядка, в котором взяты эти преобразования*: так, если Φ есть параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{MM'}=a$, Ψ — симметрия относительно точки O, то $\Psi\Phi$ есть симметрия относительно такой точки O_1, что $\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{M'M}$, а $\Phi\Psi$ — симметрия относительно такой точки O_2, что $\overrightarrow{OO_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MM'}$ (ср. пример 3°, в частности рис. 37, *а*, *б*). Впрочем, это обстоятельство никак не может нас удивить — ведь произведение преобразований родственно понятию сложной функции, в которой порядок отдельных функций оказывается весьма существенным [совсем не одно и то же, например, $\sin^2 x$ и $\sin(x^2)$ или a^{-x} и $-a^x$].

Итак, мы видим, что в отличие от умножения чисел для умножения геометрических преобразований не выполняется коммутативный (переместительный) закон: *преобразование $\Psi\Phi$, вообще говоря, отлично от преобразования $\Phi\Psi$*. Можно было бы думать, что также и ассоциативный (сочетательный) закон обыкновенной арифметики чисел будет нарушаться в «арифметике преобразований», т. е. что произведения $X(\Psi\Phi)$ и $(X\Psi)\Phi$ преобразований будут различны. Однако легко видеть, что это на самом деле не так: *умножение преобразований всегда ассоциативно*. В самом деле, пусть, скажем, $\Phi(A)=A_1$, $\Psi(A_1)=A_2$ и $X(A_2)=A_3$; в таком случае, очевидно,

$$(\Psi\Phi)(A)=\Psi(A_1)=A_2$$

и

$$[X(\Psi\Phi)](A)=X(A_2)=A_3;$$

с другой стороны,

$$\Phi(A)=A_1 \text{ и } [(X\Psi)\Phi](A)=(X\Psi)(A_1)=X(\Psi(A_1))=X(A_2)=A_3.$$

Таким образом,

$$[X(\Psi\Phi)](A)=[(X\Psi)\Phi](A)$$

для любой точки A. Иначе говоря, *каковы бы ни были три преобразования* Φ, Ψ *и* X, *всегда выполнено соотношение*

$$X(\Psi\Phi)=(X\Psi)\Phi.$$

Это последнее преобразование обозначают просто через $X\Psi\Phi$ (без скобок).

4.3. Произведения движений; классификация движений. Рассмотренные простые примеры произведений преобразований допускают интересные и важные приложения. Так, пример 4° может быть использован для нахождения *произведения параллельного переноса* Φ (на вектор $\overrightarrow{MM'}=a$) *и вращения* Ψ (вокруг точки O на угол α) *или двух вращений* Ψ *и* Ψ_1 (Ψ_1 — вращение вокруг точки O_1 на угол α_1). В самом деле, параллельный перенос Φ можно себе представить как произведение симметрий Σ и Σ_1 относительно таких прямых l и l_1, перпендикулярных MM', что расстояние между ними равно $\frac{1}{2}MM'$; выберем эти прямые так, чтобы l_1 проходила через точку O (рис. 40, *а*). Аналогично Ψ представим как произведение симметрий Σ_1 и Σ_2 относительно пересекающихся в O прямых l_1 и l_2, угол между которыми равен $\frac{1}{2}\alpha$. В таком случае произведение $\Psi\Phi$ сведется к произведению (к последовательному осуществлению) четырех симметрий Σ, Σ_1, Σ_1 и Σ_2 (это можно записать так: $\Psi\Phi=\Sigma_2\Sigma_1\Sigma_1\Sigma$). Воспользовавшись ассоциативностью умножения преобразований, мы можем записать $\Psi\Phi$ не в виде $(\Sigma_2\Sigma_1)(\Sigma_1\Sigma)$, а в виде $\Sigma_2(\Sigma_1\Sigma_1)\Sigma$, отличающемся порядком расстановки скобок. Но произведение симметрий Σ_1 и Σ_1 представляет собой тождественное преобразование I, не меняющее положения ни одной точки плоскости; поэтому получаем $\Psi\Phi=\Sigma_2\Sigma$, т. е. $\Psi\Phi$ есть вращение вокруг точки O_1 пересечения прямых l и l_2 (на угол α).

Аналогично, для того чтобы найти произведение $\Phi\Psi$, представим Ψ в виде произведения двух симметрий Σ' и Σ_1 относительно двух прямых l' и l_1, проходящих через O и образующих угол $\frac{\alpha}{2}$, причем попрежнему $l_1 \perp MM'$; далее, Φ представим как произведение двух симметрий Σ_1 и Σ_2' относительно прямых l_1 и l_2', расстояние между

которыми равно $\frac{1}{2}MM'$ (рис. 40, *б*). В таком случае мы будем иметь

$$\Phi\Psi = \Sigma_2'\Sigma_1\Sigma_1\Sigma' = \Sigma_2'I\Sigma' = \Sigma_2'\Sigma',$$

и, следовательно, $\Phi\Psi$ будет представлять собой вращение вокруг точки O_2 пересечения l' и l_2' (на угол α).

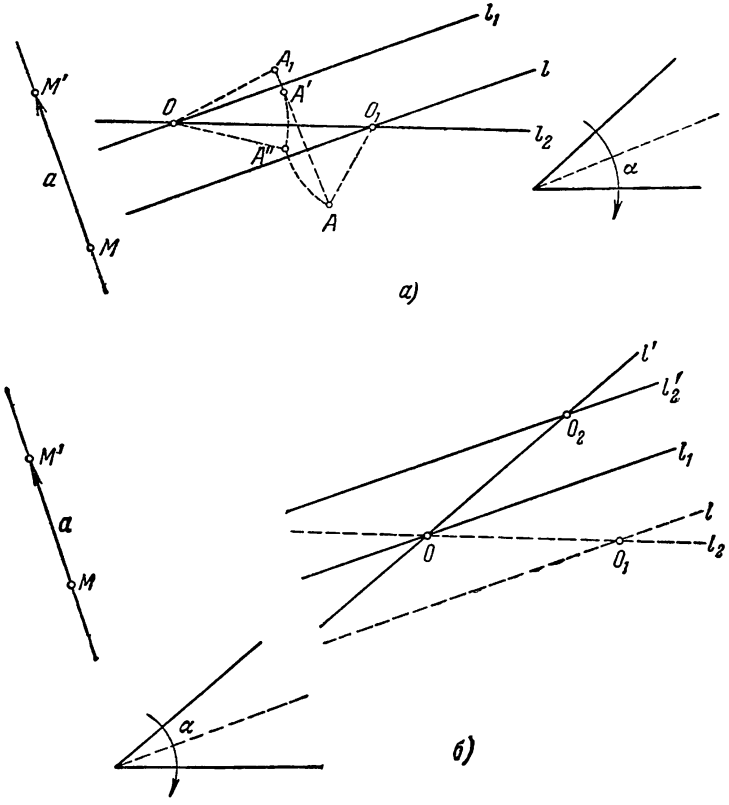


Рис. 40.

Наконец, для того чтобы найти произведение $\Psi_2\Psi_1$ двух вращений Ψ_1 и Ψ_2 с центрами O_1 и O_2 и углами поворота α_1 и α_2, представим Ψ_1 в виде произведения симметрии относительно двух прямых m и O_1O_2, пересекающихся в точке O_1 и образующих угол $\frac{1}{2}\alpha_1$, а Ψ_2—как произведение симметрий относительно прямых O_1O_2 и m_2, пересекающихся в точке O_2 и образующих угол $\frac{1}{2}\alpha_2$. При этом $\Psi_2\Psi_1$ представится как произведение симметрий относительно m_1 и m_2, откуда следует, что преобразование $\Psi_2\Psi_1$ совпадает с вращением вокруг точки Q пересечения m_1 и m_2 (на угол $\alpha_1+\alpha_2$;

см. рис. 41, *а*). Исключение здесь представляет случай, когда $\alpha_1+\alpha_2=k\cdot 360°$, т. е. $\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}=k\cdot 180°$, где k — целое число (рис. 41, *б*); в этом случае прямые m_1 и m_2 будут параллельны и, следовательно, преобразование $\Psi_2\Psi_1$ является параллельным переносом.

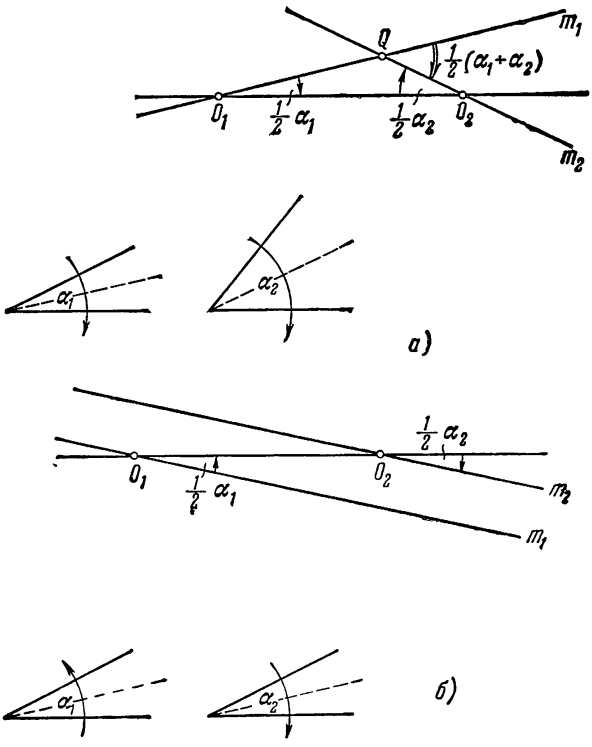


Рис. 41.

До сих пор мы говорили исключительно о произведениях движений. Заметим, что из сказанного выше нетрудно вывести полную классификацию всех движений плоскости. Ясно, что каждое движение плоскости полностью характеризуется тем, в какие точки A', B', C' перешли какие-то три точки A, B, C плоскости, не принадлежащие одной прямой: в самом деле, при этом произвольная точка M плоскости перейдет в такую точку M', что расстояния $M'A'$, $M'B'$ и $M'C'$ соответственно равны расстояниям MA, MB и MC, а такая точка есть только одна [1]). Но очевидно, что точки A, B, C можно совместить с точками A', B', C' при помощи самое большее трех

[1]) Условия $M'A'=MA$, $M'B'=MB$ определяют на плоскости две точки M' и M'', находящиеся на разных расстояниях от точки C'

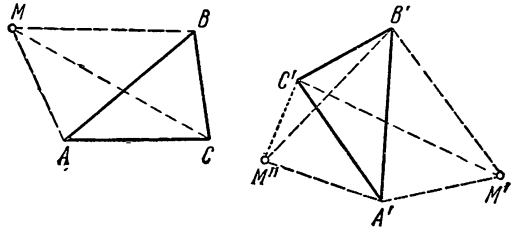


Рис. 42.

(ибо C' не лежит на прямой $A'B'$). Поэтому третье условие $M'C'=MC$ однозначно определяет точку M' (рис. 42).

симметрий относительно некоторых прямых. В самом деле, если точка A отлична от A', то мы совмещаем эти две точки симметрией Σ_1 относительно перпендикуляра l_1, восставленного к отрезку AA' в его середине; треугольник ABC перейдет при симметрии Σ_1 в треугольник $A'B_1C_1$ (рис. 43). Далее, если точка $B_1 = \Sigma_1(B)$ не совпадает с B', то мы совмещаем ее с B' симметрией Σ_2 относительно перпендикуляра l_2, восставленного к B_1B' в его середине (заметим, что прямая l_2 проходит через точку A', ибо $A'B' = AB = A'B_1$, и, следовательно, $\Sigma_2(A') = A'$). Если полученный из $A'B_1C_1$ с помощью симметрии Σ_2 треугольник $A'B'C_2$ не совпадает с треугольником $A'B'C'$, то он симметричен ему относительно прямой $A'B'$ и потому может быть совмещен с треугольником $A'B'C'$ при помощи еще одной симметрии Σ_3 относительно прямой $A'B' \equiv l_3$ (рис. 43).

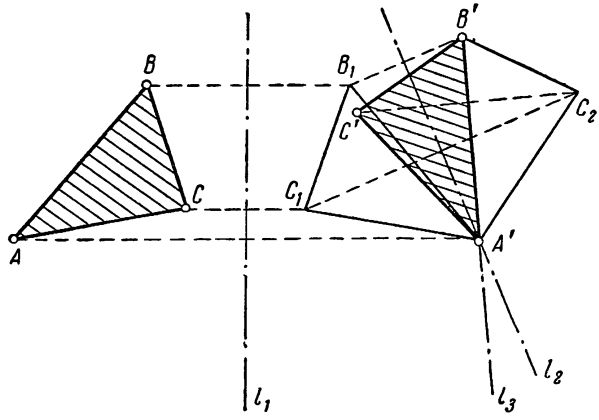


Рис. 43.

Итак, любые два равных треугольника могут быть совмещены самое большее тремя симметриями относительно прямых, откуда вытекает (см. пример 4°, стр. 83), что *каждое движение плоскости представляет собой либо симметрию относительно прямой, либо параллельный перенос, либо вращение вокруг точки* (которое, в частности, может оказаться симметрией относительно точки), *либо, наконец, параллельный перенос или вращение, сопровождаемые еще одной симметрией относительно прямой* [1]).

4.4. Применения. Полученные результаты могут быть использованы для решения многочисленных задач на построение и на доказательство. Рассмотрим, например, *задачу о построении многоугольника* $A_1A_2 \ldots A_n$ *по заданным вершинам* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ *равнобедренных треугольников с известными углами* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *при вершинах, построенных на его сторонах* (рис. 44) Эта задача охватывает широко известные задачи о построении треугольника по центрам построенных на его сторонах квадратов

[1]) Произведение трех симметрий относительно прямой всегда может быть представлено в виде так называемой *скользящей симметрии*, т. е. произведения симметрии относительно некоторой прямой и параллельного переноса в направлении этой же прямой (см. книги И. М. Яглома [2] и Д. И. Перепелкина, [3] указанные в конце статьи). Итак, *каждое движение плоскости является либо параллельным переносом, либо вращением, либо скользящей симметрией* (частным случаем скользящей симметрии является обычная симметрия относительно прямой).

($n=3$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=90°$), или о построении треугольника по вершинам построенных на его сторонах правильных треугольников ($n=3$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=60°$), или о построении многоугольника по известным серединам сторон (n произвольно, $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=180°$) и т. д.

Для решения этой задачи заметим, что последовательное применение вращений B_1, B_2, ..., B_n с центрами Q_1, Q_2, ..., Q_n соответственно на углы α_1, α_2, ..., α_n переводит: сначала точку A_1 в A_2, затем в A_3, ... и, наконец, A_n обратно в A_1 (рис. 44). Таким образом, точка A_1 произведением $B_nB_{n-1}\ldots B_2B_1$ рассматриваемых вращений *оставляется на месте*. Но из доказанных выше теорем следует, что произведение $B=B_n\ldots B_2B_1$ вращений представляет собой *вращение* на угол $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$; центр этого «результирующего» вращения B легко найти, если последовательно заменить произведение вращений B_1 и B_2 одним вращением (или параллельным переносом) $B^{(1)}$; затем произведение преобразований $B^{(1)}$ и B_3 — одним преобразованием $B^{(2)}$ и т. д. Но ясно, что единственная точка, которую оставляет на месте вращение (на угол, отличный от $k\cdot360°$!), есть центр этого вращения; следовательно, *искомая вершина A_1 многоугольника совпадает с центром Q результирующего вращения* B *и потому может быть построена*. Далее, ясно, что, зная точку A_1 (а также точки Q_1, Q_2, ..., Q_n и углы α_1, α_2, ..., α_n), мы легко построим и весь n-угольник.

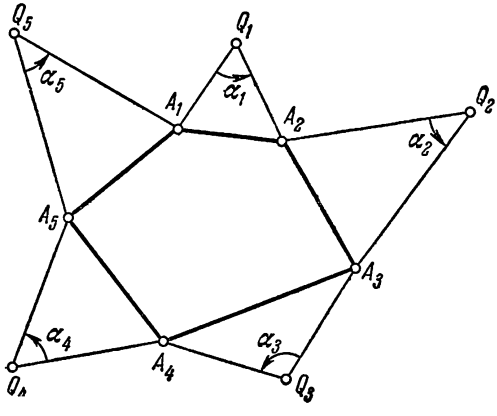


Рис. 44.

Это рассуждение оказывается непригодным в одном исключительном случае: если сумма $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ углов поворота кратна 360°. В этом случае мы вообще не можем задать произвольным образом вершины Q_1, Q_2, ..., Q_n построенных на сторонах многоугольника треугольников — ведь произведение вращений B_1, B_2, ..., B_n на углы α_1, α_2, .. ,α_n (где $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=k\cdot360°$) является параллельным переносом, который, вообще говоря (если вектор переноса $\neq0$), не оставляет на месте *ни одной* точки плоскости! Таким образом, как правило, соответствующая задача на построение при $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=k\cdot360°$ не будет иметь решений. Лишь при некоторых специальных расположениях точек Q_1, Q_2, ..., Q_n результирующее преобразование $B=B_n\ldots B_2B_1$ явится «параллельным переносом на нулевое расстояние», т. е. будет тождественным преобразованием и задача окажется разрешимой. Однако при этом она будет иметь даже «слишком много решений» (т. е. будет неопределенна) — *любую* точку плоскости можно будет принять за вершину A_1 искомого n-угольника, ибо тождественное преобразование оставляет на месте *все* точки плоскости! Поэтому и здесь задача на построение оказывается неинтересной; содержательной же является «задача на доказательство», требующая установить возможный характер конфигурации (расположения на плоскости) точек Q_1, Q_2, ..., Q_n, отвечающих реально существующему n-угольнику $A_1A_2\ldots A_n$.

Сказанное хорошо иллюстрируется уже упоминавшейся *задачей о построении n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ по серединам Q_1, Q_2, ..., Q_n его сторон*. В условии этой задачи на построение всегда добавляют, что рассматриваемый многоугольник имеет *нечетное* число $n=2k+1$ сторон. В этом

случае $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=(2k+1)\cdot 180°$ и результирующее преобразование является вращением на угол $(2k+1)\cdot 180°$, т. е. вращением на 180°, или, иначе, симметрией относительно некоторой точки; центр Q этой симметрии (т. е. вершину A_1 многоугольника!) легко найти, если воспользоваться содержанием примеров 1°—3° (стр. 81—83). Если же $n=2k$ четно, то $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=2k\cdot 180°=k\cdot 360°$ и преобразование $B=B_nB_{n-1}\ldots B_1$ будет параллельным переносом (либо тождественным преобразованием). Поэтому середины Q_1, Q_2, ..., Q_n сторон $2k$-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ не могут быть выбраны произвольно; так, например, хорошо известно, что при $n=4$ эти точки *(середины сторон произвольного четырехугольника) всегда являются вершинами параллелограмма*[1]) (рис. 45). Совершенно ясно, с чем это связано: произведение симметрий Σ_1 и Σ_2 относительно точек Q_1 и Q_2 представляет собой параллельный перенос Π_1 на вектор $2\overrightarrow{Q_1Q_2}$ (см. пример 3° на стр. 81—83), а произведение симметрий Σ_3 и Σ_4 относительно точек Q_3 и Q_4 представляет собой параллельный перенос Π_2 на вектор $2\overrightarrow{Q_3Q_4}$; поэтому лишь в случае, если $\overrightarrow{Q_1Q_2}=\overrightarrow{Q_4Q_3}$ (т. е. если четырехугольник $Q_1Q_2Q_3Q_4$ — параллелограмм!), произведение $\Sigma_4\Sigma_3\Sigma_2\Sigma_1=\Pi_2\Pi_1$ четырех симметрий будет тождественным преобразованием (т. е. задача построения четырехугольника по серединам его сторон будет разрешимой.

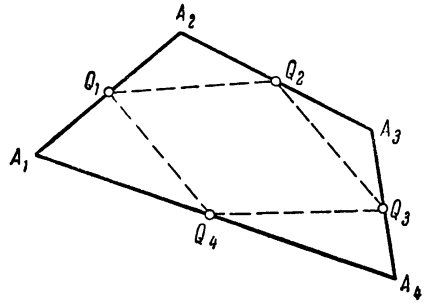


Рис. 45.

Вот еще две задачи подобного рода: *что можно сказать о центрах правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника, или о центрах квадратов, построенных на сторонах произвольного четырехугольника* (для определенности мы считаем, что правильные треугольники и квадраты построены вне исходного многоугольника)? В первом случае искомые три точки R_1, R_2 и R_3 обладают тем свойством, что произведение вращений B_1, B_2, B_3 вокруг этих точек на угол 120° представляет собой тождественное преобразование (ибо $3\cdot 120°=360°$).

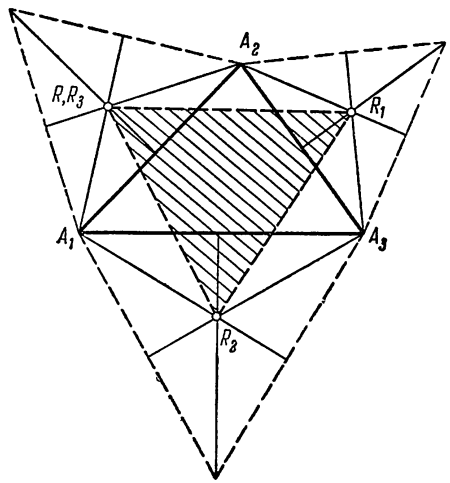


Рис. 46.

Но произведение B_2B_1 первых двух вращений представляет собой вращение B на угол 240° вокруг точки R, в которой пересекаются проведенные через R_1 и R_2 прямые, образующие с прямой R_1R_2 углы $\frac{120°}{2}=60°$ (рис. 46; см. выше стр. 83). Ясно, что произведение вращений B и B_3 вокруг точек R и R_3 на углы 240° и 120° в том и только в том случае явится тождественным преобразованием, если точка R_3 совпадает с R. Таким образом, мы заклю-

[1]) Ср. стр. 315 этой книги ЭЭМ.

чаем, что прямые R_1R_3 и R_2R_3 образуют с R_1R_2 углы в 60° или что (независимо от формы исходного треугольника $A_1A_2A_3$!) *треугольник* $R_1R_2R_3$ *правильный*.

Во втором случае (рис. 47) центры T_1, T_2, T_3, T_4 квадратов должны быть таковы, что произведение $B_4B_3B_2B_1$ вращений вокруг этих точек на угол 90° представляет собой тождественное преобразование. Но произведение B_2B_1 вращений вокруг T_1 и T_2 есть не что иное, как симметрия (вращение на угол 180°) Σ_1 относительно точки U пересечения прямых, проведенных через T_1 и через T_2 под углами $\frac{90°}{2}=45°$ к прямой T_1T_2.

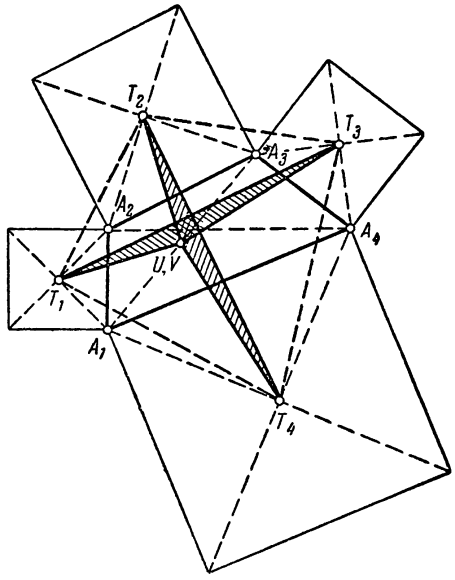


Рис. 47.

Аналогично произведение B_4B_3 вращений вокруг T_3 и T_4 представляет собой симметрию Σ_2 относительно такой точки V, что прямые T_3V и T_4V образуют углы 45° с прямой T_3T_4. Но ясно, что произведение симметрий $\Sigma_2\Sigma_1$ тогда и только тогда представляет собой тождественное преобразование, когда точки U и V совпадают. Из совпадения точек U и V в свою очередь следует, что треугольник UT_2T_4 получается из треугольника UT_1T_3 вращением вокруг точки $U\equiv V$ на 90°, т. е. что *отрезки* T_1T_3 *и* T_2T_4 *равны по длине и взаимно перпендикулярны*. Заметим, что и обратно, если четыре точки T_1, T_2, T_3, T_4 таковы, что $T_1T_3=T_2T_4$ и $T_1T_3\perp T_2T_4$, то вершины U и V равнобедренных прямоугольных треугольников T_1T_2U и T_3T_4V совпадут, так что существует четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$, для которого T_1, T_2, T_3, T_4—центры построенных на его сторонах квадратов. Таким образом, условия $T_1T_3=T_2T_4$, $T_1T_3\perp T_2T_4$ полностью характеризуют четырехугольники $T_1T_2T_3T_4$, отвечающие всевозможным четырехугольникам $A_1A_2A_3A_4$.

4.5. Дальнейшие примеры произведения преобразований. Мы не будем останавливаться здесь столь же подробно на вопросе о произведении преобразований подобия. Заметим лишь, что проведенная нами классификация движений (т. е. перечисление всех возможных типов движений) моментально приводит и к классификации преобразований подобия, ибо очевидно, что *преобразование подобия* П *с коэффициентом подобия* k *можно представить как произведение* (какой угодно!) *гомотетии* Г *с коэффициентом* k *и последующего движения* Δ. В самом деле, если $\Pi=\Delta\Gamma$, где Δ—какое-то преобразование, то поскольку и гомотетия Г и исходное преобразование подобия П изменяют все расстояния в k раз, то преобразование Δ уже не меняет расстояний между точками, т. е. является движением. Таким образом, в определенном смысле *все преобразования подобия*

сводятся к гомотетии (сжатию к точке). Можно также показать, что (в аналогичном смысле) *все аффинные преобразования сводятся к сжатию к прямой;* более точно, *каждое аффинное преобразование* A *можно представить в виде произведения* ПΛ, *где* Λ *есть сжатие к прямой* l, *а* П—*преобразование подобия.* Аналогично, *любое круговое преобразование плоскости сводится к инверсии: каждое круговое преобразование* K *представляет собой произведение* ПΩ *инверсии* Ω *и преобразования подобия* П. Доказательства этих довольно сложных теорем мы опустим [1]).

В заключение приведем еще три примера произведений преобразований, отличных от движений.

5°. *Пусть* Φ_1 *есть гомотетия с центром* O_1 *и коэффициентом* k_1, *а* Φ_2—*гомотетия с центром* O_2 *и коэффициентом* k_2. Выберем на плоскости произвольные точки A и B и положим $\Phi_1(A)=A'$, $\Phi_2(A')=A''$, $\Phi_1(B)=B'$, $\Phi_2(B')=B''$. Так как $A'B' \parallel AB$ и $A''B'' \parallel A'B'$, то $A''B'' \parallel AB$ (причем отрезок $A''B''$ направлен в ту же сторону, что и AB, если оба числа k_1 и k_2 положительны или оба отрицательны, и направлен противоположно AB в противном случае); так как, далее, $\frac{A'B'}{AB}=|k_1|$ и $\frac{A''B''}{A'B'}=|k_2|$, то $\frac{A''B''}{AB}=|k_1|\cdot|k_2|$. Отсюда следует, что при $k_1k_2=1$ преобразование $\Phi_2\Phi_1$ представляет собой *параллельный перенос* на вектор AA'' (рис. 48, *а*; в этом случае для любой точки B имеем $BB'' \# AA''$); при $k_1k_2 \neq 1$ преобразование $\Phi_2\Phi_1$ представляет собой *гомотетию с коэффициентом* k_1k_2 (рис. 48, *б*; в этом случае, какова бы ни была точка B, прямая $B''B$ пересекает $A''A$ в такой точке O, что $\frac{OA''}{OA}=\frac{A''B''}{AB}=\frac{OB''}{OB}=|k_1k_2|$).

Заметим еще, что *если* $\Phi_2\Phi_1$ *есть параллельный перенос, то его направление параллельно прямой* O_1O_2; *если же* $\Phi_2\Phi_1$ *есть гомотетия, то ее центр* O *лежит на прямой* O_1O_2. Это следует из того, что оба преобразования Φ_1 и Φ_2 переводят прямую O_1O_2 в себя; следовательно, эту прямую оставляет на месте также преобразование (гомотетия или параллельный перенос) $\Phi_2\Phi_1$. Но гомотетия переводит в себя лишь прямые, проходящие через ее центр, а параллельный перенос—лишь прямые, направление которых совпадает с направлением переноса. Отсюда вытекает, в частности, известная теорема о трех центрах гомотетии: *центры гомотетии трех попарно гомотетичных фигур лежат на одной прямой,* называемой осью гомотетии (рис. 48, *б*).

Интересно отметить частный случай последнего предложения, к которому мы приходим, если рассматриваемые фигуры являются окружностями. Известно, что две (не равные) окружности S_1, S_2

[1]) См., например, книги Б. Н. Делоне и Д. А. Райкова или И. М. Яглома и В. Г. Ашкинузе, указанные в сноске [1]) на стр. 76, а также § 5 гл. I статьи «Окружности», стр. 476—478.

имеют два центра гомотетии, совпадающих в случае окружностей, лежащих одна вне другой, с точками пересечения их общих внешних и внутренних касательных (рис. 49). Отсюда вытекает, в силу дока-

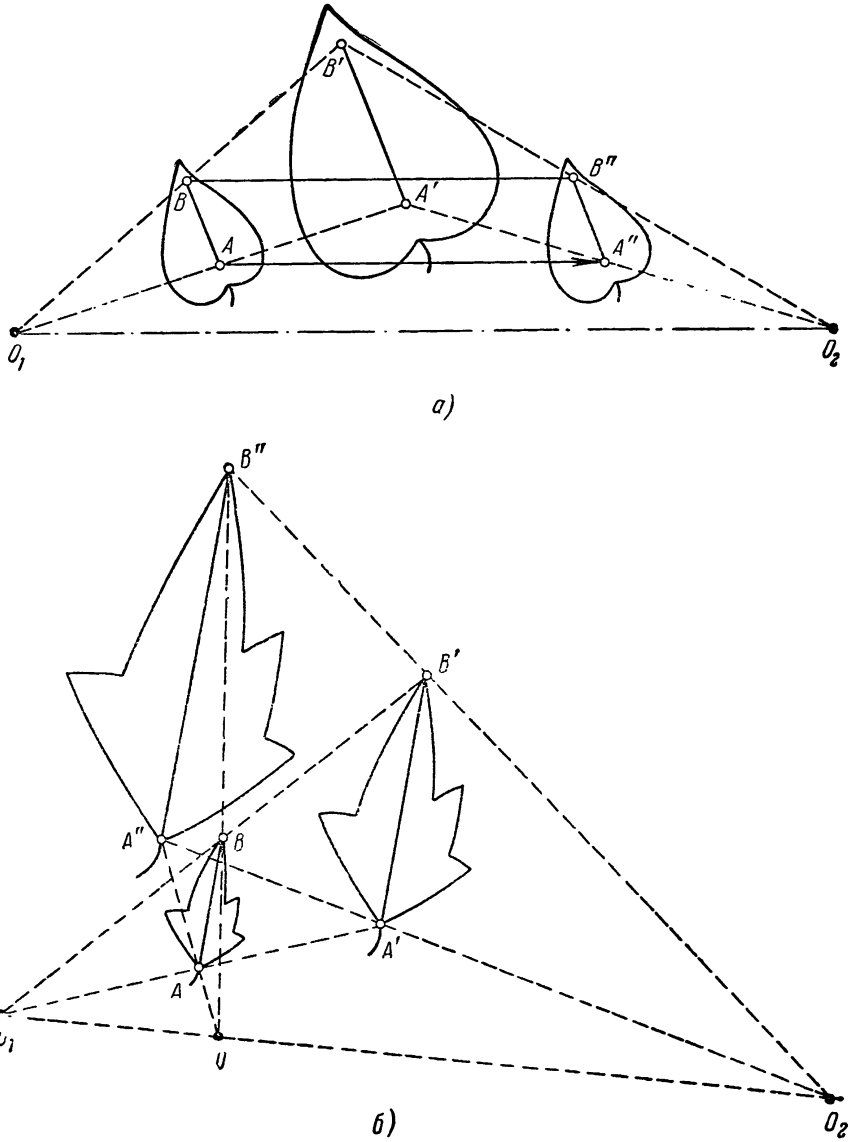


Рис. 48.

занной выше теоремы, что три точки пересечения общих внешних касательных (т. е. три внешних центра подобия) трех попарно неравных окружностей лежат на одной прямой. Можно взять и другие комбинации внешних и внутренних центров подобия: *шесть попарных*

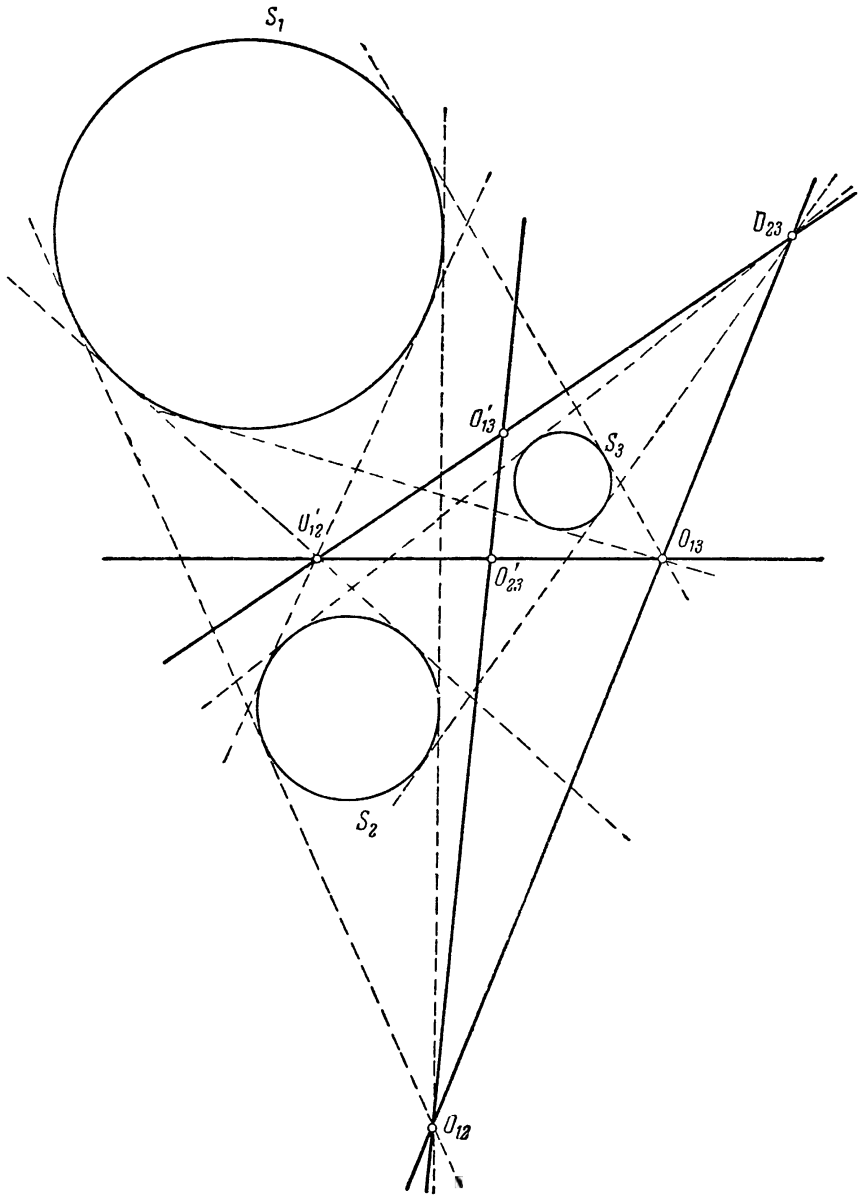


Рис. 49.

центров подобия трех (попарно не равных) окружностей лежат по три на четырех прямых (осях подобия рассматриваемых трех окружностей, рис. 49).

6°. *Пусть* Φ_1 — *инверсия с центром* O *и степенью* k_1, Φ_2 — *инверсия с тем же центром* O *и (иной) степенью* k_2. В таком случае, если $\Phi_1(A)=A'$ и $\Phi(A')=A''$, то точка A'' лежит на прямой OA (ибо A' лежит на прямой OA, а A'' — на прямой OA') и $\frac{OA''}{OA}=\frac{k_2}{k_1}$ $\left(\text{ибо } OA'=\frac{k_1}{OA}, \text{ а } OA''=\frac{k_2}{OA'}\right)$. Отсюда, как может показаться, следует, что преобразование $\Phi_2\Phi_1$ совпадает с *гомотетией* Γ *с центром* O *и коэффициентом* $\frac{k_2}{k_1}$. Однако надо иметь в виду, что преобразование $\Phi_2\Phi_1$ хотя и очень близко к гомотетии Γ, но отличается от Γ областью действия: областью действия гомотетии Γ является плоскость, а областью действия преобразования $\Phi_2\Phi_1$ — либо плоскость с исключенной точкой O (не входящей в область определения обоих преобразований Φ_1 и Φ_2), либо «расширенная» (круговая) плоскость.

7°. Совершенно так же показывается, что *произведение* $\Psi_2\Psi_1$ *гиперболических инверсий* Ψ_1 *и* Ψ_2 *с одной и той же осью* o и (разными) степенями k_1 и k_2 отличается от *сжатия к прямой* o с коэффициентом $\frac{k_2}{k_1}$ лишь тем, что областью определения преобразования $\Psi_2\Psi_1$ является не вся плоскость, а плоскость с выброшенной прямой o (или плоскость, надлежащим образом дополненная «несобственными» элементами).

§ 5. Обратное преобразование

5.1. Определение обратного преобразования. После того как мы перевели на язык геометрических преобразований понятие сложной функции, естественно вспомнить и о понятии обратной функции. Известно, что две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются взаимно обратными, если из того, что $f(x)=y$, следует $g(y)=x$; так, например, взаимно обратными являются функции $f(x)=x^2$ и $g(x)=\sqrt{x}$, или $f(x)=a^x$ и $g(x)=\log_a x$, или $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\arcsin x$. Иногда для обратной функции употребляется еще следующее обозначение: функция, обратная для $f(x)$, записывается как $f^{-1}(x)$; так, вместо $\arcsin x$ в старину зачастую писали $\sin^{-1}x$, а в английских учебниках и теперь пишут так. Важно заметить, что функцию, обратную для функции $f(x)$, можно определить только в том случае, если *ни при каких двух разных значениях* x *функция* $f(x)$ *не принимает одинакового значения* y; именно поэтому при определении функции, обратной функции x^2 или $\sin x$ приходится ограничивать область изменения x условиями $x\geqslant 0$, соответственно $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$.

Заменив теперь x и y в определении обратной функции точками (при этом роль самой функции будет играть геометрическое отображение), мы придем к понятию **обратного отображения.** Пусть Φ — некоторое *взаимно однозначное* отображение с областью определения $\mathcal{A}$ и областью значений $\mathcal{A}'$. Тогда, как мы знаем, для любой точки A' области значений $\mathcal{A}'$ найдется ровно одна точка A области $\mathcal{A}$, для которой $\Phi(A)=A'$ (это и есть определение взаимно однозначного отображения). Эту точку A называют *прообразом* точки A' при отображении Φ и обозначают символом $\Phi^{-1}(A')$. Таким образом, с каждой точкой A' области $\mathcal{A}'$ сопоставляется определенная точка $A=\Phi^{-1}(A')$ области $\mathcal{A}$. Тем самым мы приходим к новому отображению Φ^{-1} с областью определения $\mathcal{A}'$ и областью значений $\mathcal{A}$. Это отображение и называется *обратным* для отображения Φ. Так, например, функция $y=\sin x$ осуществляет *взаимно однозначное* отображение отрезка $\mathcal{A}=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ действительной оси на отрезок $\mathcal{A}'=[-1, 1]$. Поэтому определено обратное отображение отрезка A' на отрезок A; это обратное отображение обозначается символом arcsin.

В геометрии особенно интересен случай, когда Φ есть *преобразование* с областью действия $\mathcal{A}$. Так как Φ взаимно однозначно, то определено обратное отображение Φ^{-1}, которое, очевидно, также является преобразованием с той же областью действия $\mathcal{A}$. Это преобразование Φ^{-1} называется *обратным преобразованием* для преобразования Φ. Так, например, обратным для параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{MM'}$ является перенос на (противоположный!) вектор $\overrightarrow{M'M}$ (ибо если $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MM'}$, то $\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{M'M}$); обратной для гомотетии с центром O и коэффициентом k является гомотетия с тем же центром O и коэффициентом $\frac{1}{k}$ $\left(\text{если } \frac{OA'}{OA}=k, \text{ то } \frac{OA}{OA'}=\frac{1}{k}\right)$; обратным для сжатия к прямой o с коэффициентом k является сжатие к той же прямой с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

5.2. Инволюции. Особую роль в геометрии играют такие преобразования, которые обратны сами себе (другими словами, такие преобразования Φ, которые «меняют местами» пары точек: если $\Phi(A)=A'$, то $\Phi(A')=A$). Примерами таких преобразований являются: симметрия относительно точки, симметрия относительно прямой, инверсия (в частности, симметрия относительно окружности; см. стр. 56), гиперболическая инверсия (в частности, симметрия относительно пары параллельных прямых; см. стр 59). Такие преобразования называют *инволютивными преобразованиями* или *инволюциями* [1]) (иногда их называют также *симметриями*).

[1]) Латинский термин involutio означает скрученное состояние молодых листьев. Это — единственный термин, оставшийся в геометрии от замечательного математика XVII в., создателя проективной геометрии Ж. Дезарга, использовавшего в своем трактате массу новых терминов, как правило заимствованных из ботаники.

Взаимно обратные преобразования Φ и Φ^{-1} можно определить еще как такие, произведение которых, взятых в любом порядке, представляет собой тождественное преобразование (их общей области действия). В частности, тождественным преобразованием является «квадрат» Φ^2 любого инволютивного преобразования Φ. В самом деле, преобразования Φ и Φ^{-1} таковы, что из $\Phi(A)=A'$ следует $\Phi^{-1}(A')=A$, и поэтому

$$\Phi\Phi^{-1}(A')=\Phi(A)=A', \quad \Phi^{-1}\Phi(A)=\Phi^{-1}(A')=A,$$

т. е. ни преобразование $\Phi^{-1}\Phi$, ни преобразование $\Phi\Phi^{-1}$ не меняют положения точек в их общей области действия $\mathcal{A}$.

§ 6. Общее определение геометрии. Группы геометрических преобразований

6.1. Предмет геометрии. Учение о геометрических преобразованиях сыграло важную роль в оформлении наших взглядов на сам предмет геометрии. Оно лежит в основе одного из самых распространенных общих определений геометрии, позволяющего разобраться в сущности сходства и отличий между различными ветвями этой обширной математической дисциплины. Для того чтобы прийти к подобному определению «геометрии», понимаемой в широком смысле этого слова, нам надо будет прежде всего остановиться на вопросе о содержании обычной геометрии Евклида.

В средней школе говорят, что предметом геометрии является изучение свойств геометрических фигур. При этом «геометрическую фигуру» можно описать как какую-то совокупность точек; труднее ответить на вопрос о «свойствах», которые интересуют геометра. Ясно, что здесь речь идет не о всех вообще свойствах, какие только можно придумать; так, цвет фигуры, вопрос о том, начерчен ли треугольник белым по черному (мелом на доске) или черным по белому (карандашом в тетради) вовсе не рассматривается на уроках геометрии. Поэтому, для того чтобы уточнить данное выше описание геометрии, необходимо уяснить себе, чем характеризуются *геометрические* свойства фигур.

Для того чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к тем задачам, которые решаются в геометрии, прежде всего к задачам на построение, являющимся типичными для этого предмета. Из школьного курса хорошо известно, что для того, чтобы задача на построение треугольника имела определенное решение (возможно, несколько решений, скажем, два или четыре), надо задать *три* независимых элемента треугольника, например три стороны или две стороны и угол; два элемента, вообще говоря, определяют бесконечно много треугольников, а четыре произвольно заданных элемента — ни одного. Однако утверждение о том, что существует *единственный* треугольник с заданными длинами a, b, c сторон, строго говоря, не верно: на самом деле таких треугольников можно найти беско-

нечно много, но все эти треугольники будут между собой равны [1]) (рис. 50). И когда мы говорим, что задача построения треугольника по трем сторонам имеет единственное решение, мы только подчеркиваем этим, что все треугольники со сторонами a, b, c будут одинаковыми, равными.

Но что означает в геометрии слово «равные»? Под «равными» фигурами мы понимаем такие две фигуры F_1 и F_2, которые отличаются друг от друга только положением (не формой и не размерами!), т. е., другими словами, *равными считаются две фигуры, одна из которых может быть переведена в другую с помощью некоторого движения* (ср. выше, стр. 60). И если в геометрии треугольники (или другие фигуры), получающиеся друг из друга движением, считаются одинако-

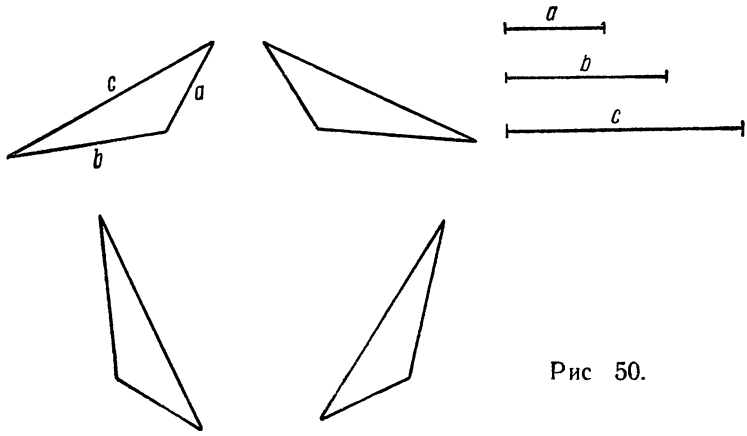


Рис 50.

выми, т. е. не различаются между собой, то это значит, что и все свойства у этих треугольников (фигур) будут одними и теми же. Таким образом, мы видим, что рассматриваемые в геометрии свойства фигур — это те свойства, которые не зависят от положения фигуры, т. е. не изменяются при ее движении: *геометрия изучает свойства фигур, сохраняющиеся при движении фигуры.*

Вспомним, что движения мы определили как такие геометрические преобразования, которые сохраняют расстояния между любыми двумя точками (см. стр. 60); это соответствует тому, что у равных фигур отвечающие друг другу отрезки одинаковы [2]) (так, у равных треуголь-

[1]) Ср текст на стр. 296—297 этой книги ЭЭМ.

[2]) Более точная формулировка заключается в следующем Пусть F_1 и F_2 — две равные фигуры; тогда существует движение Ф, переводящее фигуру F_1 в F_2, т. е. $F_2=\Phi(F_1)$. Точку A_2 фигуры F_2 называют *соответствующей* точке A_1 фигуры F_1, если $A_2=\Phi(A_1)$. Из определения движения следует, что расстояние между любыми двумя точками A_1 и B_1 фигуры F_1 равно расстоянию между соответствующими им точками $A_2=\Phi(A_1)$ и $B_2=\Phi(B_1)$ фигуры F_2:

$$A_1B_1 = A_2B_2.$$

ников будут равны не только стороны, но и соответствующие биссектрисы, медианы, высоты и т. д.). Сформулированное выше определение геометрии можно теперь перефразировать так: *геометрия изучает свойства фигур, сохраняющиеся при таких преобразованиях, которые не меняют расстояний между точками.*

Такое определение геометрии создает впечатление, что первыми, самыми главными свойствами геометрической фигуры, являются расстояния между ее точками. Но на самом деле это не так — понятие расстояния между точками (длины отрезка) вообще не фигурирует (и не может фигурировать!) ни в одной геометрической теореме. В самом деле, длина отрезка определяется сравнением его с некоторым фиксированным раз навсегда отрезком, называемым единицей длины; поэтому утверждение (в условии или в доказательстве какой-либо теоремы) о том, что определенный отрезок равен, скажем, двум, означает, что в этом отрезке два раза укладывается отрезок, принятый за единицу длины. Таким образом, это утверждение привлекает к рассмотрению единичный отрезок, а между тем все отрезки с точки зрения геометра совершенно равноправны и, оставаясь в рамках собственно геометрии, нет никакой возможности отделить какой-нибудь из них для того, чтобы принять его за единичный! Именно поэтому все определения единицы длины апелируют к понятиям, которые никак нельзя отнести к геометрии: так, метр определялся как расстояние между двумя отметками на платиново-иридиевом эталоне метра, хранящемся в Парижском институте мер и весов, или, несколько менее точно, как одна 40 000 000-я часть парижского меридиана Земли (ср. с «чисто геометрическим» определением прямого угла как такого, который равен своему смежному, или угла в 1 радиан, определяемого равенством отвечающей ему дуги окружности радиусу окружности). Поэтому ни в одной геометрической теореме не может участвовать длина какого-нибудь отрезка, а лишь отношение длин двух отрезков, не зависящее от выбора единицы длины (например теорема о соотношении между углами и сторонами треугольника утверждает, что если $\angle A > \angle B$, то $\frac{a}{b} > 1$, а теорема о прямоугольном треугольнике с углом в 30° — что если в треугольнике ABC мы имеем $\angle A = 90°$ и $\angle B = 30°$, то $\frac{a}{b} = 2$).

Все эти соображения заставляют нас считать, что правильнее охарактеризовать (евклидову) геометрию как *науку, изучающую свойства фигур, сохраняющиеся при преобразованиях, не меняющих отношений расстояний между точками, т. е. при преобразованиях подобия* (см. стр. 61). Но такое определение, справедливость которого была мотивирована лишь рассуждениями, относящимися к геометрическим теоремам, перестает быть верным при переходе к задачам на построение. В самом деле,

в этих задачах длина отрезка задается не числом, выражающим отношение рассматриваемого отрезка к единице длины, а геометрически — указанием отрезка, равного интересующему нас (ср. рис. 50). Поэтому, если в геометрических теоремах подобные фигуры можно считать «одинаковыми», обладающими одними и теми же геометрическими свойствами, то в задаче на построение треугольник $A_1B_1C_1$, все стороны которого в два раза больше сторон данного треугольника ABC, будет уж существенно отличаться от ABC — лишь один из этих двух треугольников может доставлять решение задачи на построение треугольника, но никак не оба сразу!

Создавшееся положение может первоначально показаться довольно неожиданным. Нам приходится считать, что при решении задачи на построение и при доказательстве теоремы мы имеем дело с двумя разными определениями предмета геометрии и, следовательно, с двумя разными (хоть и очень близкими одна к другой!) «геометриями». Это положение вынуждает нас дать геометрии новое определение, которое охватило бы оба определения, к которым мы пришли выше: лишь имея подобное «общее» определение, мы сможем считать, что геометрия представляет собой единую науку, а не две разные науки, которым лишь по ошибке присвоено одинаковое название.

6.2. Геометрия и группы преобразований. Нетрудно понять, как можно объединить наши два определения геометрии. Вместо движений или преобразований подобия мы будем говорить о какой-то совокупности $\mathfrak{G}$ геометрических преобразований, не уточняя, о каких именно преобразованиях идет речь; «равными», т. е. обладающими одинаковыми свойствами, мы объявим те фигуры, которые переводятся одна в другую каким-либо преобразованием из совокупности $\mathfrak{G}$. При этом мы придем к определению геометрии как *науки, изучающей свойства фигур, сохраняющиеся при преобразованиях из заданной совокупности $\mathfrak{G}$ преобразований.*

Однако если определение геометрии как науки, изучающей свойства фигур, сохраняющиеся при движениях, является слишком узким, то последнее определение геометрии является уже слишком широким, и в силу этого также неудовлетворительным. В самом деле, согласно этому определению мы считаем «равными» две такие фигуры F_1 и F_2, что одну из них можно перевести в другую некоторым преобразованием из совокупности $\mathfrak{G}$. Но для того, чтобы новое понятие «равенства» не расходилось со старым очень уж далеко, естественно потребовать выполнения следующих трех свойств, которые выполняются абсолютно для всех типов «равенства», с которыми мы встречаемся в математике и в жизни [1]) (равенства чисел, алгебраических выражений, векторов, геометрических фигур, физических характеристик как сил или скоростей, равенства способностей,

[1]) Ср. текст на стр. 296—297 этой книги ЭЭМ.

успехов, художественных достоинств двух произведений искусства и т. д.):

1°. *Каждая фигура F «равна» сама себе* (рефлексивность).

2°. *Если фигура F_1 «равна» фигуре F_2, то и обратно, F_2 «равна» F_1* (симметричность).

3°. *Если фигура F_1 «равна» F_2, а F_2 «равна» F_3, то и F_1 «равна» F_3* (транзитивность).

Ясно, что в случае совершенно произвольной совокупности $\mathfrak{G}$ преобразований «равенство», определенное с помощью этой совокупности, может и не обладать свойствами 1°—3°. Для того чтобы обеспечить выполнение этих грех свойств, естественно потребовать, чтобы:

1°. *Совокупность преобразований $\mathfrak{G}$ содержала тождественное преобразование* I, *переводящее всякую фигуру саму в себя.*

2°. *Наряду с каждым преобразованием* Ф, *переводящим фигуру F_1 в фигуру F_2, совокупность $\mathfrak{G}$ содержала и обратное преобразование Φ^{-1}, переводящее фигуру F_2 в фигуру F_1.*

3°. *Наряду с каждыми двумя преобразованиями* Ф *и* Ψ, *переводящими фигуру F_1 в фигуру F_2, соответственно фигуру F_2 — в фигуру F_3, совокупность $\mathfrak{G}$ содержала и произведение* ΨФ *этих двух преобразований, переводящее F_1 в F_3.*

Совокупность преобразований, удовлетворяющая свойствам 1°—3°, называется **группой преобразований**[1]). Таким образом, мы приходим к следующему общему определению геометрии, впервые сформулированному известным немецким математиком Феликсом Клейном в лекции, которую он прочитал при вступлении на профессорскую кафедру университета в г. Эрлангене (Германия)[2]) и которая впоследствии получила название **Эрлангенской программы** Клейна[3]):

Геометрия — это наука, изучающая свойства фигур, сохраняющиеся при преобразованиях некоторой группы $\mathfrak{G}$ преобразований.

6.3. Различные геометрии. Аффинная геометрия. Из приведенного выше определения геометрии вытекает, что можно построить очень

---

[1]) Ср. также стр. 27—28 этой книги ЭЭМ.

[2]) В Германии долгое время существовал обычай, согласно которому кандидат на замещение профессорской должности должен был выступить перед Ученым советом с лекцией на свободно выбранную им тему; на основании этой лекции Ученый совет делал заключение о возможности допущения данного лица к профессуре.

В 1854 г. другой выдающийся немецкий математик Бернгард Риман точно так же выступил перед Ученым советом Гетингенского университета с лекцией «О гипотезах, лежащих в основании геометрии», в которой изложил свою концепцию геометрии, явившуюся, по существу, первым общим определением геометрической науки (отличным от более позднего определения Клейна). Взглядов Римана на геометрию, не связанных с понятием геометрического преобразования, мы здесь коснуться не можем (см. по этому поводу статью о неевклидовых геометриях в следующей книге ЭЭМ).

[3]) См. работу Ф. Клейна [1], цитированную в конце статьи.

много разных «геометрий» — столько же, сколько имеется разных групп преобразований; лишь одной из них является обычная геометрия Евклида, изучаемая в средней школе. Мы уже говорили в начале этого параграфа о том, что геометрия (обычная, евклидова) изучает свойства фигур, сохраняющиеся при движениях. Этот взгляд на геометрию вполне согласуется с приведенным выше определением Клейна, ибо *совокупность* $\mathfrak{D}$ *всех движений плоскости является группой*. В самом деле, произведение двух любых движений снова является движением; преобразование, обратное некоторому движению, само является движением; движением является также и тождественное преобразование (все это непосредственно следует из определения движений). Другой пример группы преобразований мы получим, рассматривая *совокупность* $\mathfrak{E}$ *всех преобразований подобия*. Как мы уже отмечали выше, геометрия, определяемая группой движений $\mathfrak{D}$, несколько отличается от геометрии, определяемой группой $\mathfrak{E}$ преобразований подобия, хотя эти геометрии очень близки друг другу. Можно сказать, что предмет школьного курса геометрии представляет собой «переплетение» этих двух родственных геометрий: геометрии группы $\mathfrak{D}$ и геометрии группы $\mathfrak{E}$ Выбирая в качестве $\mathfrak{G}$ группу преобразований, отличную от группы движений (или от группы преобразований подобия), мы придем к иной математической дисциплине к новой, «не евклидовой» геометрии [1]).

Нетрудно понять, что *совокупность* $\mathfrak{A}$ *всех аффинных преобразований плоскости* (см. стр. 62) *образует группу*. В самом деле: 1° тождественное преобразование плоскости, очевидно, переводит каждую прямую линию снова в прямую (в ту же самую!) и, значит, является аффинным преобразованием; 2° если преобразование Φ переводит каждую прямую l снова в прямую l', то и обратное преобразование Φ^{-1} переводит прямую в прямую (l' в l), т. е. преобразование, обратное аффинному, также является аффинным; 3° если преобразование Φ переводит каждую прямую l в прямую l' и преобразование Ψ также переводит прямую в прямую (l' в l''), то и их произведение $\Psi\Phi$ снова переводит прямую в прямую (l в l''), т. е. произведение двух аффинных преобразований является аффинным преобразованием. Отсюда следует, что можно рассматривать «геометрию», изучающую «аффинные» свойства фигур, т. е. свойства, сохраняющиеся при аффинных преобразованиях (геометрия группы $\mathfrak{A}$); соответствующая дисциплина — *аффинная геометрия* — является в настоящее время большой самостоятельной наукой.

В аффинной геометрии можно говорить о точках и о прямых, поскольку эти понятия сохраняются при аффинных преобразованиях

[1]) Очень важную категорию этих «не евклидовых» геометрий составляют так называемые *неевклидовы геометрии* (без кавычек) и, в частности, *неевклидова геометрия Лобачевского* (см. по этому поводу статью о неевклидовых геометриях в кн. V ЭЭМ).

(точка переходит снова в точку и прямая — в прямую). Однако, скажем, понятие окружности в аффинной геометрии отсутствует — ведь аффинные преобразования могут перевести окружность в линию, не являющуюся окружностью; поэтому окружность здесь «не имеет геометрического смысла» (подобно тому как в обычной или евклидовой геометрии не имеет смысла, скажем, понятие горизонтального направления)[1]). Далее, в аффинной геометрии можно говорить о параллельных прямых, но не о перпендикулярных прямых; об отношении отрезков, принадлежащих одной прямой, но не об отношении отрезков, принадлежащих разным (не параллельным) прямым (см. свойства аффинных преобразований, указанные в п. **3.3,** стр. 77). Так, типичной аффинной теоремой является следующая: *три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении* 2:1 *считая от вершины*; в самом деле, все фигурирующие в этой теореме понятия имеют аффинный характер. Напротив, скажем, теорема о точке пересечения высот треугольника связана с понятием перпендикулярных прямых, отсутствующим в аффинной геометрии — и в этой геометрии теорему о точке пересечения высот невозможно сформулировать[2]).

Аналогично аффинным преобразованиям составляют группу и круговые преобразования (круговой!) плоскости (см. стр. 62); этой группе преобразований отвечает своя «геометрия», которую можно было бы назвать *круговой геометрией* (чаще говорят об анаглагматической, или конформной геометрии)[3]). Приведенные соображения доставляют также дополнительную мотивировку целесообразности введения такого понятия, как круговая плоскость, поскольку лишь на «расширенной» соответствующим образом плоскости можно говорить о группе круговых преобразований и, значит, лишь круговая (но не евклидова) плоскость может служить «полем действия» круго-

---

[1]) Напротив, понятие эллипса (см статью о конических сечениях в кн. V ЭЭМ) принадлежит аффинной геометрии (поскольку каждое аффинное преобразование переводит эллипс снова в эллипс).

[2]) Аффинную геометрию можно строить и аксиоматическим путем (ср. со статьей «Аксиомы и основные понятия геометрии» в этой книге ЭЭМ). Для этого надо выбрать какие-то основные, неопределяемые понятия аффинной геометрии и сформулировать в виде аксиом основные их свойства, из которых все остальные теоремы аффинной геометрии уже можно получить дедуктивным путем. Аксиоматика аффинной геометрии близка к аксиоматике евклидовой геометрии; только понятие «равенства» отрезков или углов в ней не имеет смысла и связанные с этим понятием аксиомы должны быть откинуты или заменены другими (см., например, указанную в подстрочном примечании на стр 62 книгу И. М. Яглома и В. Г. Ашкинузе, целиком посвященную аффинной геометрии). Иной вариант аксиоматики аффинной геометрии намечен в статье «Векторы и их применения в геометрии» и напечатанной в этой книге ЭЭМ (стр. 292—381).

[3]) Некоторое представление о содержании этой интересной геометрии можно получить из статьи «Окружности» в этой книге ЭЭМ.

вой (аналагматической) геометрии. Еще одну важную группу преобразований (проективные преобразования), приводящую к необходимости «расширения» плоскости введением «несобственных» элементов, мы рассмотрим в следующем параграфе.

Аффинная и круговая (аналагматическая) геометрии представляют собой обширные разделы геометрии, которым (так же как и рассматриваемой в следующем параграфе *проективной геометрии*) посвящена значительная литература и которые имеют важные приложения. Однако существует и много других «геометрий», отвечающих иным группам геометрических преобразований.

В качестве примера отметим здесь *«геометрию»*, *изучающую свойства фигур, сохраняющиеся при параллельных переносах* (т. е. «геометрию», в которой «равными» считаются лишь фигуры, равные в обычном смысле и параллельно расположенные). Нетрудно видеть, что *совокупность* $\mathfrak{P}$ *всех параллельных переносов плоскости представляет собой группу;* в самом деле:

1°. Тождественное преобразование I можно рассматривать как параллельный перенос (в любом направлении!) на нулевое расстояние.

2°. Преобразование, обратное параллельному переносу, представляет собой параллельный перенос (см. стр. 97).

3°. Произведение двух параллельных переносов также есть параллельный перенос (см. стр. 81).

Поэтому изучение таких свойств фигур, которые являются общими для всех фигур, получающихся одна из другой параллельным перенесением, является занятием вполне осмысленным (хоть и не очень интересным), и соответствующая «геометрия» (геометрия группы $\mathfrak{P}$) с логической стороны должна считаться столь же законной, как и обыкновенная евклидова геометрия (которой она, однако, неизмеримо уступает с точки зрения важности ее приложений) [1]).

В этой новой «геометрии» теряет смысл целый ряд понятий обыкновенной (евклидовой) геометрии, например длина отрезка (ибо отрезки разных направлений здесь являются «несравнимыми», поскольку никакие два такие отрезка нельзя совместить «движением») или величина угла (по аналогичной причине). Нельзя определить здесь и окружности, поскольку оба определения окружности — как геометрического места точек, удаленных от фиксированной точки на постоянное расстояние, и как геометрического места точек, из которых данный отрезок виден под постоянным (ориентированным) углом — оказываются бессодержательными. В противоположность этому понятие прямой линии, разумеется, полностью сохраняет свое значение в новой «геометрии»; можно считать даже, что оно играет здесь бо́льшую роль, чем в евклидовой геометрии, поскольку теперь прямая является единственной линией, которую можно «движением» совместить саму с собой. Отсюда вытекает, что в нашей «геометрии» можно по-прежнему говорить о треугольниках, четырехугольниках и т. д. и изучать их свойства. Важную роль играет в рассматриваемой «геометрии» понятие отношения отрезков одной прямой (или

---

[1]) Эту «геометрию» можно определить тем, что в ней равные фигуры характеризуются как такие, у которых отрезки, соединяющие соответствующие друг другу пары точек, не только равны в обычном смысле этого слова, но также параллельны и одинаково направлены (см. т. I книги И. М. Яглома [2], указанной в конце статьи, стр. 22—23)

параллельных прямых), при определении которого достаточно говорить о равенстве отрезков одного направления, «равных» и в старом (евклидовом) и в новом смысле; мы можем даже ввести для отрезков фиксированного направления понятие «длины» (не имея, однако, никакой возможности сравнивать «длины» отрезков разных направлений!). Сохраняет смысл в новой «геометрии» и понятие площади плоской фигуры, поскольку евклидово определение площади, связанное с рассмотрением сети квадратов и подсчетом числа покрываемых фигурой квадратов, использует лишь равенство квадратов сети, а эти квадраты также «равны» и в смысле рассматриваемой здесь «геометрии» [1]).

Разумеется, все теоремы евклидовой геометрии, которые можно сформулировать в терминах «геометрии параллельных переносов», остаются верными и в этой новой «геометрии»; это вытекает из того, что если все движения плоскости сохраняют некоторые свойства геометрических фигур, то, разумеется, эти свойства не нарушаются и при параллельных переносах. Так, например, мы по-прежнему можем утверждать, что *медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении* 2:1, *считая от вершины* (ясно, что все понятия, фигурирующие в этой теореме, в новой «геометрии» имеют смысл), или что *два треугольника* ABC *и* ABC_1, *для которых* $CC_1 \parallel AB$, *равновелики* (рис. 51). В противоположность этому, скажем, теоремы о том, что пересекаются в одной точке высоты или биссектрисы треугольника теряют здесь смысл, поскольку мы теперь не можем говорить о перпендикулярности прямых (и, следовательно, о высотах) и о равенстве углов с непараллельными сторонами (а значит, и о биссектрисах).

Теоремы евклидовой геометрии, связанные с понятиями, имеющими в рассматриваемой здесь «геометрии» новый смысл, могут изменить в этой «геометрии» свою формулировку. Так, например, из «равенства» двух треугольников ABC и $A'B'C'$ по-прежнему следует «равенство» их соответствующих сторон (рис. 52; кавычки, в которые мы берем слово «равенство», подчеркивают, что мы понимаем его теперь не так, как в евклидовой геометрии); однако теперь уже из «равенства» двух пар сторон (например, AB и $A'B'$, AC и $A'C'$) вытекает «равенство» треугольников. Можно указать еще целый ряд предложений, которые имеют силу в рассматриваемой здесь «геометрии», но не в геометрии Евклида; так, например, для «равенства» двух треугольников ABC и $A'B'C'$ здесь необходимо (и достаточно) «равенство» трех отрезков AA', BB' и CC' (см. тот же рис. 52), а из «равенства» противоположных сторон AB и DC четырехугольника $ABCD$ вытекает, что «равны» и стороны AD и BC и что диагонали AC и BD четырехугольника в точке пересечения делятся пополам (рис. 53)[2]).

Видоизменением рассматриваемой «геометрии» (геометрии группы $\mathfrak{P}$) является другая «*геометрия*», *изучающая свойства фигур, сохраняющиеся при всевозможных параллельных переносах и при симметриях относительно*

---

[1]) Ничего не меняет и то обстоятельство, что при таком определении площади плоской фигуры («Конструктивное определение площади»; см. в кн. V ЭЭМ статью «Площадь и объем») приходится говорить не об одной сети квадратов, а о бесконечной последовательности таких сетей с неограниченно уменьшающимися квадратами сети.

[2]) К рассматриваемой здесь «геометрии» по существу относится учение о векторах (см. статью «Векторы и их применения в геометрии», в этой книге ЭЭМ), поскольку равенство векторов (направленных отрезков) $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ можно определить так: *векторы* $\overline{AB}$ *и* $\overline{CD}$ *равны, если один из них можно совместить с другим параллельным переносом* (ср. стр. 296).

любых точек плоскости. Эти свойства, действительно, составляют предмет некоторой «геометрии», поскольку совокупность $\mathfrak{S}$ всех параллельных переносов и симметрий относительно точек образует группу:

1°. Тождественное преобразование I можно рассматривать как «нулевой» параллельный перенос.

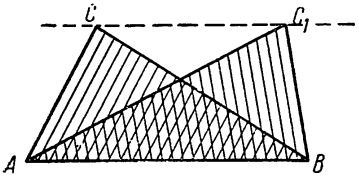


Рис. 51.

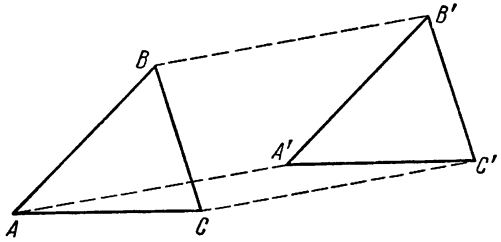


Рис. 52.

2°. Преобразование, обратное параллельному переносу, снова есть параллельный перенос; преобразование, обратное симметрии относительно точки, есть снова симметрия относительно точки (та же самая).

3°. Произведение двух параллельных переносов снова есть параллельный перенос; произведение параллельного переноса и симметрии относительно точки (взятых в любом порядке) есть симметрия относительно точки (см. стр. 81—83), произведение двух симметрий относительно двух точек есть параллельный перенос (см стр. 83; если центры двух симметрий совпадают, то их произведение представляет собой «нулевой» параллельный перенос).

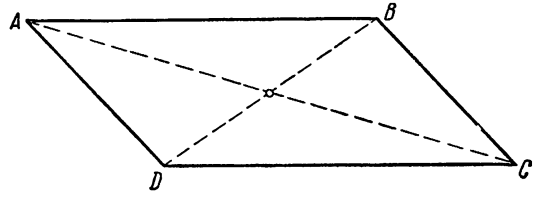


Рис. 53.

Отсюда следует, что совокупность $\mathfrak{S}$ всех параллельных переносов и всех симметрий относительно точек может быть положена в основу определения своеобразной «геометрии» [1]). Эта «геометрия» в известном смысле является промежуточной между рассматриваемой выше и евклидовой геометриями, поскольку группа $\mathfrak{S}$ является промежуточной между группой $\mathfrak{P}$ параллельных переносов и группой $\mathfrak{D}$ движений (группа $\mathfrak{S}$ содержит группу $\mathfrak{P}$ и содержится в группе $\mathfrak{D}$) Соответственно этому эта новая «геометрия» ближе к евклидовой геометрии, чем рассмотренная нами выше «геометрия» группы $\mathfrak{P}$. Так, например, теперь мы уже можем утверждать, что вертикальные углы «равны», ибо два таких угла можно совместить симметрией относительно их общей вершины (в геометрии группы $\mathfrak{P}$ эта теорема неверна); далее, в новой геометрии «равенства» двух пар сторон треугольников ABC и $A'B'C'$ недостаточно для того, чтобы утверждать, что «равны» и сами треугольники (рис. 54), в то время как «равенство» трех пар сторон уже с неизбежностью влечет за собой «равенство» треугольников Наконец, интересный пример теоремы, сохраняющей силу как

[1]) В этой геометрии «равными» считаются такие фигуры, что отрезки, соединяющие соответствующие друг другу пары точек этих фигур, не только равны в обычном смысле, но и параллельны, хотя их направления могут быть и противоположными (ср. т. I книги [2], стр. 22—23 и 27)

в евклидовой геометрии, так и в «геометрии» группы $\mathfrak{S}$, но нарушающейся в «геометрии» группы $\mathfrak{P}$, доставляет так называемая теорема Бойяи — Гервина: *любые два равновеликих многоугольника равносоставлены*, т. е. могут быть разбиты на соответственно «равные» многоугольные части [1])

6.4. Группы преобразований в физике. В заключение настоящего параграфа отметим, что определение геометрии по Клейну, выдвигающее на первый план понятие о геометрических преобразованиях, которые сохраняют интересующие нас свойства фигур (т. е. играют роль «движений» соответствующей «геометрии»), находит своеобразное отражение и в физике. Вспомним так называемый принцип относительности Галилея, играющий фундаментальную роль в механике и утверждающий, что *никакие физические эксперименты, производимые внутри механической системы, не могут позволить обнаружить равномерное и прямолинейное движение этой системы.* В силу этого принципа, производя какие угодно опыты, скажем, на корабле, двигающемся в постоянном направлении с неизменной скоростью, мы не сможем обнаружить никаких эффектов, обязанных своим происхождением движению корабля. Из принципа относительности Галилея следует, что все изучаемые физикой свойства сохраняются при «преобразованиях» физической системы, состоящих в придании ей постоянной по величине и направлению скорости (эти «преобразования» называются преобразованиями Галилея). Иными словами, «физические свойства» тел можно описать как такие свойства, которые не меняются при преобразованиях Галилея (ср. с определением «геометрических свойств» как таких, которые сохраняются при движениях, стр. 99).

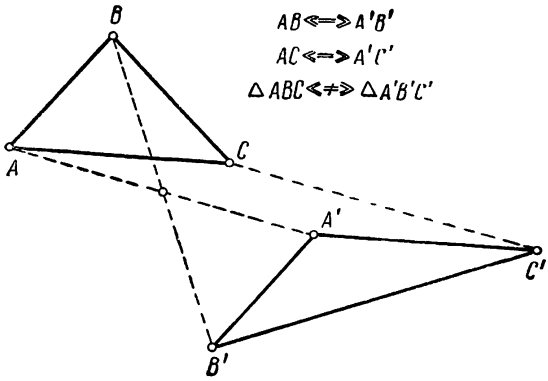


Рис. 54.

Принципу относительности Галилея можно придать «геометризированную» форму, совершенно непосредственно связывающую его с определением геометрии по Клейну. Предположим, для простоты, что мы ограничиваемся физическими процессами, которые можно считать происходящими в одной плоскости, например изучаем движения физических тел на ограниченном участке земной поверхности, который можно мыслить себе плоским. Рассматриваемую плоскость мы отнесем к декартовым прямоугольным координатам (x, y); при этом, скажем, механическое движение материаль-

---

[1]) См. в кн. V ЭЭМ статью «о равносоставленности многоугольников и многогранников Тот факт, что эта теорема сохраняет силу в геометрии группы $\mathfrak{S}$, составляет содержание так называемой теоремы Хадвигера — Глюра В «геометрии» группы $\mathfrak{P}$ теорема Бойяи — Гервина заменяется следующей: *для того чтобы два равновеликих многоугольника* M *и* M′ *были равносоставлены, необходимо и достаточно, чтобы сумма* (*ориентированных*!) *длин сторон* M, *параллельных каждой прямой* l *плоскости, была равна сумме* (*ориентированных*) *длин параллельных* l *сторон* M′ (см. В. Г. Болтянский, Равновеликие и равносоставленные фигуры; М., Гостехиздат, 1956; здесь используется то, что в «геометрии» группы $\mathfrak{P}$ можно для отрезков любого фиксированного направления l ввести понятие «длины отрезка»).

ной точки будет задаваться формулами, указывающими закон изменения во времени координат точки

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t), \\ y &= g(t), \end{aligned}\right\}$$

где t—время. Совершенно ясно, что переход к иной системе координат никак не может отразиться на содержании физических законов, которые, следовательно, должны одинаково записываться в координатах (x, y) и в координатах (x', y'), получающихся при произвольном повороте осей координат и сдвиге начала координат (рис. 55). Нетрудно убедиться, что переход от координат (x, y) к координатам (x', y') задается формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + b, \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

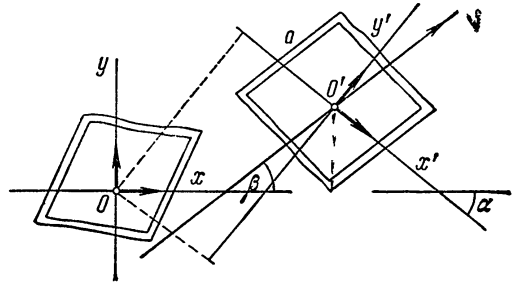


Рис. 55.

в которых α обозначает угол, образованный осью x с осью x', а a, b—координаты начала O системы координат (x, y) в системе (x', y')[1]); поэтому любое предложение, имеющее физический смысл, должно сохранять свою форму при преобразовании (*). Принцип же относительности Галилея утверждает, что, более того, также и в том случае, если начало и оси системы координат (x', y') движутся равномерно и прямолинейно по отношению к системе координат x, y, то и тогда все физические процессы будут записываться в координатах (x', y') и в координатах (x, y) совершенно одинаково. Но в том случае, когда начало O' координат (x', y') двигается со скоростью v по прямой, образующей с осью x угол β (см. тот же рис. 55), связь между координатами (x', y') и (x, y) будет записываться формулами

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + \cos\beta\cdot vt + a, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + \sin\beta\cdot vt + b; \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

таким образом, все имеющие физический смысл явления должны сохранять свою форму при преобразованиях (**). Учитывая еще, что в последние формулы входит также и время t и что выбор того или иного начала отсчета времени никак не может отразиться на физической сущности какого-либо процесса, мы можем переписать формулы (**) в следующем несколько более полном иде:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + \cos\beta\cdot vt + a, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + \sin\beta\cdot vt + b, \\ t' &= t + d; \end{aligned}\right\} \quad (***)$$

здесь d есть время старого начала отсчета времени в новой системе отсчета. Формулы (***) и описывают математически преобразования Галилея; принцип относительности Галилея утверждает, что физика (точнее—механика), изучающая лишь движения в плоскости, может быть определена как *наука о свойствах трехмерного «мира» (пространства—времени)* (x, y, t),

[1]) См. любой курс аналитической геометрии.

сохраняющихся при преобразованиях (***). Поскольку преобразования Галилея (***), как легко показать, образуют группу, то это описание отождествляет механику плоских движений с некоторой «геометрией» трехмерного пространства, определенной заданием группы (***) «движений»([1]).

Заметим еще, что современная физика заменяет принцип относительности Галилея так называемым принципом относительности Эйнштейна, лежащим в основе (специальной) теории относительности; это приводит к необходимости заменить преобразования Галилея (***) более сложными преобразованиями, которые называются преобразованиями Лоренца. Преобразования Лоренца зависят от некоторого параметра c (физический смысл которого расшифровывается теорией относительности: c есть скорость света в пустоте); при $c \longrightarrow \infty$ они переходят в преобразования Галилея. Преобразования Лоренца также образуют группу; таким образом, переход от классической механики Галилея и Ньютона к теории относительности Эйнштейна и Пуанкаре равносилен изменению взгляда на «геометрию» окружающего нас мира, причем эта «геометрия», в полном согласии с точкой зрения Клейна, задается указанием группы преобразований, сохраняющих вид физических законов[1]).

§ 7. Группа проективных преобразований

7.1. Гомология. Наш рассказ о геометрических преобразованиях был бы неполным, если бы мы не упомянули, хотя бы кратко, о **проективных преобразованиях,** совокупность которых составляет *группу проективных преобразований.* Эта группа, одна из важнейших для геометрии, определяет своеобразную «геометрию», носящую название *проективной геометрии* и тесно связанную как с евклидовой и аффинной геометриями, так и с неевклидовыми геометриями. Проективной геометрии посвящено много обстоятельных учебных руководств[2]); здесь же мы лишь бегло очертим ее предмет.

Знакомство с проективными преобразованиями мы начнем с одного интересного преобразования — гомологии, определение которого мы первоначально сформулируем намеренно неточно. **Гомологией**[3]) с осью o и центром O называется преобразование плоскости, *переводящее прямые снова в прямые и оставляющее на месте*

---

[1]) «Геометрия» пространства-времени, в котором мы живем, представляет собой одну из так называемых неевклидовых геометрий, о которых упоминалось в подстрочном примечании на стр. 103; эта «геометрия» (независимо от того, кладутся ли в основу ее построения преобразования Галилея или преобразования Лоренца) отлична как от обычной геометрии Евклида, так и от неевклидовой геометрии Лобачевского. По этому поводу см. в кн. V ЭЭМ статью «Неевклидовы геометрии», в которой будет подробнее изложен вопрос о геометрическом истолковании физических законов.

[2]) См., например, Г. Б. Гуревич, Проективная геометрия, М., Физматгиз, 1960; Х. С. М. Кокстер, Действительная и проективная плоскость, М., Физматгиз, 1960.

[3]) От греческих слов ὁμός — одинаковый и λόγος — смысл.

каждую прямую, проходящую через точку O, и каждую точку, принадлежащую прямой o. Отсюда следует, что прямую l, пересекающую ось o в точке Q, гомология Γ переводит в прямую l', пересекающую ось o в той же точке (ибо $\Gamma(Q=Q)$, а каждую параллельную оси o прямую m гомология переводит в прямую m', также параллельную прямой o (ибо в точку пересечения прямых m' и o могла бы перейти лишь та же самая точка, а прямая m не пересекает o).

Для того чтобы построить точку A', в которую гомология Γ переводит произвольную точку A плоскости, достаточно знать образ $M'=\Gamma(M)$ какой-либо точки M (рис. 56; точка M' должна лежать на прямой OM, ибо эта прямая при гомологии переходит в себя). В самом деле, если прямая AM пересекает ось гомологии o в точке Q, то она перейдет в прямую QM' (а если $A_1M \parallel o$, то она перейдет в параллельную оси o прямую RM', проходящую через точку M'). Так как, далее, искомая точка A' (или A_1') лежит, кроме того, на прямой OA (соответственно OA_1), то она может быть найдена как точка пересечения прямых OA и QM' (или OA_1 и RM'). Это построение не проходит в том случае, если исходная точка B лежит на прямой OMM', но в таком случае мы можем построить сначала образ $A'=\Gamma(A)$ какой-либо другой точки A и затем построить образ $B'=\Gamma(B)$ точки B, исходя не из пары точек M, M', а из пары точек A, A'. Разумеется, следовало бы еще показать, что наше построение приводит к одному и тому же образу B' точки B независимо от выбора точки A и что определенное изображенным на рис. 56 построением преобразование Γ в самом деле обладает всеми теми свойствами, выполнения которых мы требовали от гомологии (в частности, что Γ переводит прямые в прямые); мы, однако, примем это на веру, предоставив читателю самостоятельно провести соответствующие доказательства.

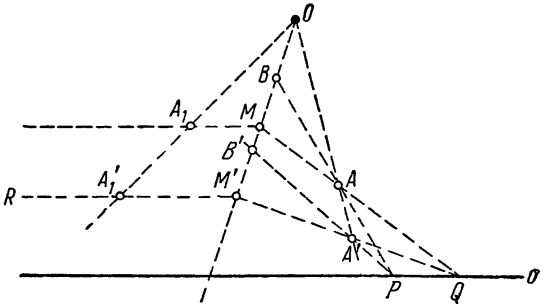


Рис. 56.

Заметим, что если $\frac{MA}{MQ}=\frac{MO}{MM'}$ (и только в этом случае), то треугольники MOA и $MM'Q$ будут подобны и прямая $QM' \parallel OA$ не пересечет OA (рис. 57). Таким образом, точке A, принадлежащей прямой q, гомотетичной o с центром гомотетии M и коэффициентом гомотетии $\frac{MO}{MM'}$ не отвечает никакая точка плоскости! Иначе говоря,

за область определения гомологии Г следует принять плоскость с исключенной прямой q. Прямые, пересекающиеся в некоторой точке A, лежащей на прямой q, переводятся гомологией в непересекающиеся (параллельные!) прямые; при этом совокупность всех проходящих через точку A прямых переходит в пучок (совокупность) параллельных между собой прямых (см. рис. 57).

С другой стороны, если точка B' такова, что $\frac{M'B'}{M'R} = \frac{M'O}{M'M}$, где R — точка пересечения $M'B'$ с o, то $OB' \parallel RM$ и, следовательно, не существует точки B, переходящей в точку B'. Отсюда вытекает, что область значений гомологии Г представляет собой плоскость с исключенным из нее геометрическим местом всех таких точек B', т. е. плоскость с исключенной прямой q_1, гомотетичной o с центром гомотетии M' и коэффициентом гомотетии $\frac{M'O}{M'M}$.

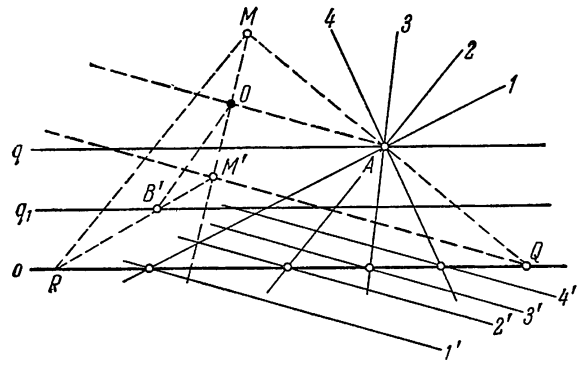


Рис. 57

Таким образом, гомология не является преобразованием плоскости, поскольку ее область определения и область значений не совпадают (в этом и заключается та нестрогость в определении гомологии, о которой мы упомянули вначале).

7.2. Проективная плоскость. Затруднения, связанные с тем, что гомология не является преобразованием, могут быть устранены, если считать, что каждую точку A прямой q гомология Г переводит в некоторую «идеальную» или «несобственную» точку A'; при этом придется считать, что параллельные между собой прямые, в которые переходят прямые, пересекающиеся в точке A, «сходятся» в этой фиктивной точке A' (точку A' часто называют также «бесконечно удаленной» точкой [1])). При этом естественно условиться, что все «несобственные» или «бесконечно удаленные» точки плоскости принадлежат одной «несобственной» или «бесконечно удаленной» прямой q', в которую переходит при гомологии прямая q. К этим «несобственным» точкам плоскости надо добавить еще одну «несобственную» точку Z, в которой «сходятся» параллельные между собой

[1]) Это связано с тем, что, как легко видеть, при стремлении переменной точки A к прямой q образ $\Gamma(A)$ этой точки неограниченно удаляется.

прямые o и q (а также и все параллельные им прямые); при этом естественно считать, что $\Gamma(Z)=Z$.

Плоскость, дополненная фиктивной «бесконечно удаленной» прямой q', состоящей из всех добавленных к плоскости «несобственных» точек, называется *проективной плоскостью*[1]). Заметим, что каждой точке проективной плоскости отвечает пучок сходящихся в ней прямых, пересекающихся в этой точке, если точка «собственная», и параллельных между собой, если эта точка «несобственная» (рис. 58). Отметим еще, что *на проективной плоскости любые две различные прямые имеют ровно одну точку пересечения* (собственную или несобственную).

После такого расширения плоскости введением «несобственных» точек гомология становится преобразованием, областью действия которого является проективная плоскость. Точки прямой q переходят при гомологии Γ в «бесконечно удаленные» точки (т. е. $\Gamma(q)=q'$); аналогично каждая «бесконечно удаленная» точка B' (задаваемая, скажем, пучком параллельных прямых) переходит в некоторую точку B прямой q_1 (т. е. $\Gamma(q')=q_1$). Разумеется, и произведение гомологий, взятых в любом числе, и преобразование, обратное гомологии, являются преобразованиями проективной плоскости. (Преобразование Γ^{-1}, обратное гомологии Γ, с центром O и осью o, переводящей точку M в точку $M'=\Gamma(M)$, является, очевидно, гомологией с теми же центром O и осью o, переводящей точку M' в точку $M=\Gamma^{-1}(M')$; см. рис. 56.)

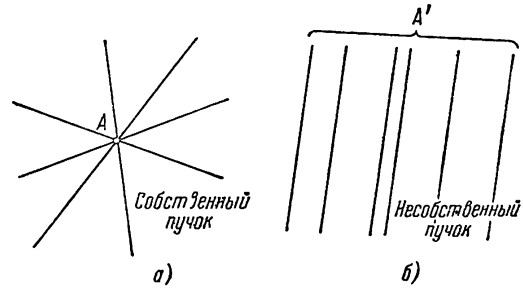


Рис. 58.

Можно также рассматривать гомологии, отвечающие случаям, когда ось гомологии или центр гомологии (или и то и другое вместе) являются «бесконечно удаленными». Нетрудно, например, убедиться, что гомология с несобственной осью o и обыкновенным («собственным»)

---

[1]) Это название связано с тем, что такое же расширение плоскости введением (несуществующих!) «бесконечно удаленных» точек и прямой естественно возникает в задачах, связанных с центральным проектированием плоскости π на другую плоскость π' из некоторого центра O. Здесь также на плоскости π найдется прямая q, точки которой не проектируются ни в какие точки плоскости π', — это будет линия пересечения плоскости π с параллельной π' плоскостью, проходящей через центр проектирования O. С другой стороны, на плоскости π' найдется такая прямая q_1, в точки которой не проектируются никакие точки плоскости π, — линия пересечения плоскости π' с параллельной π плоскостью, проходящей через O.

центром O представляет собой гомотетию с центром O и коэффициентом $\frac{OM'}{OM}$ (рис. 59, *а*; впрочем, эта гомология несущественно отличается от гомотетии несколько «большей» областью действия). Далее, гомология с несобственной осью и несобственным центром представляет собой параллельный перенос в направлении прямой, идущей в центр гомологии, на отрезок MM' (т. е. перенос на вектор $\overrightarrow{MM'}$; рис. 59, *б*). Сжатие к прямой o также есть частный вид гомологии (центр O является несобственной точкой, соответствующей пучку прямых, перпендикулярных оси o; рис. 59, *в*).

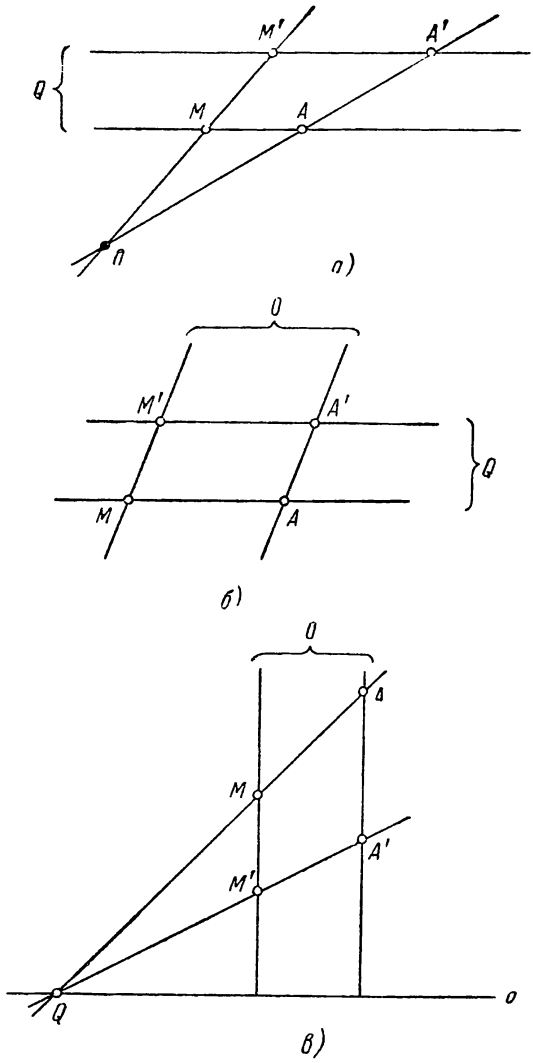


Рис. 59.

7.3. Применения гомологии к решению задач. То обстоятельство, что гомология переводит пересекающиеся прямые в параллельные, может быть использовано для решения многих геометрических задач на доказательство и построение. В качестве примера докажем следующую теорему: *пусть даны две прямые l_1 и l_2 и точка Q вне их; через Q проводятся всевозможные пары прямых a, b, пересекающих l_1 и l_2 в точках A_1, A_2, соответственно B_1, B_2 и точки A_1, B_2 и A_2, B_1 соединяются между собой* (рис. 60, *а*); *геометрическое место точек P пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1 представляет собой прямую p, проходящую через точку O пересечения l_1 и l_2 (параллельную l_1 и l_2, если l_1 и l_2 параллельны).* Для доказательства произведем гомологию Γ, у которой ось, центр и пару точек M и $M' = \Gamma(M)$ подберем так, чтобы роль прямой q рис. 57 играла прямая OQ (нетрудно убедиться, что так выбрать гомологию

всегда возможно). При этом рис. 60, *а* перейдет в рис. 60, *б*, на котором все четырехугольники $A_1'B_1'B_2'A_2'$ являются параллелограммами и геометрическим местом центров P' этих параллелограммов является средняя линия p' — полосы, образованной прямыми l' и l_2'. А так как

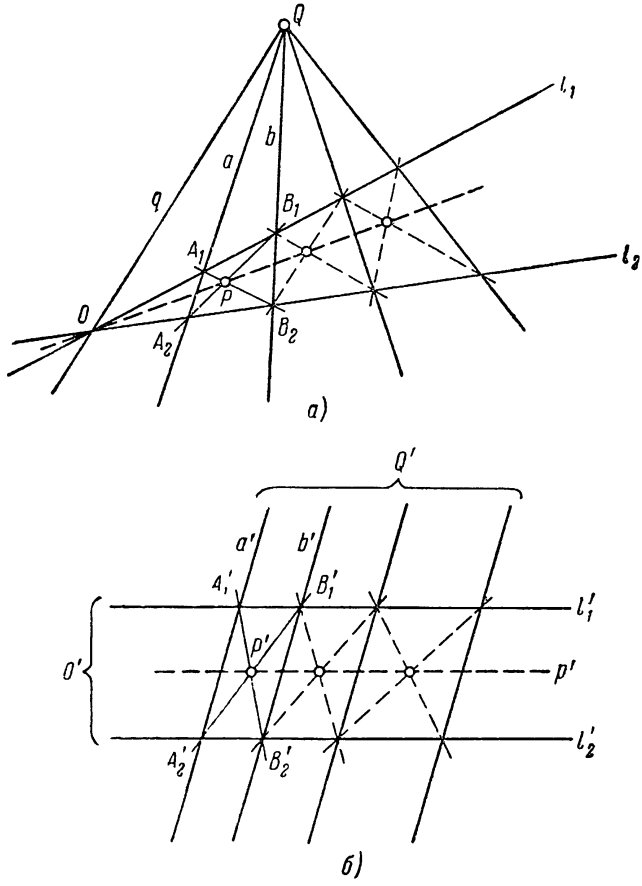
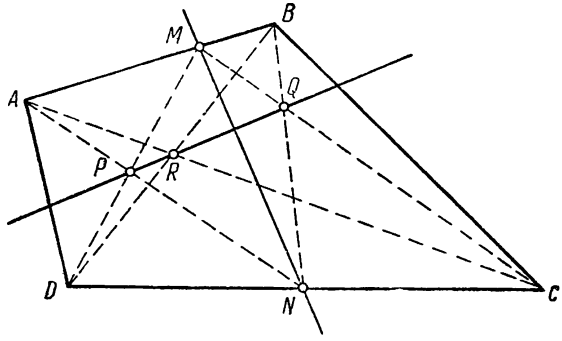


Рис. 60.

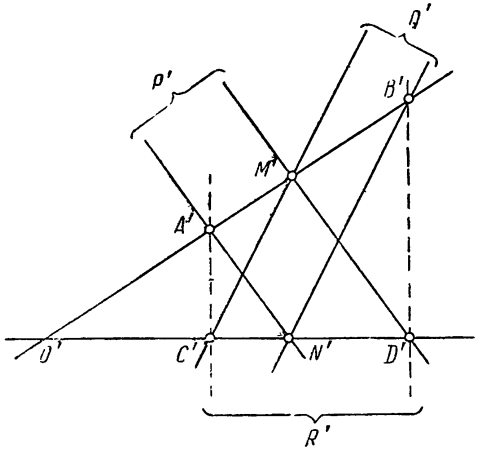
гомология переводит прямые в прямые и параллельные прямые (прямые, пересекающиеся в «несобственной» точке) — в прямые, пересекающиеся в одной точке, то гомология Γ^{-1} (см. стр. 113) переводит параллельные прямые l_1', l_2' и p' в прямые l_1, l_2 и p, пересекающиеся в одной точке O.

Вот еще один пример: докажем, что *если произвольный четырехугольник ABCD разбит прямой MN, пересекающей его стороны AB и CD на два четырехугольника AMND и BMNC, то точки P, Q, R пересечения диагоналей трех*

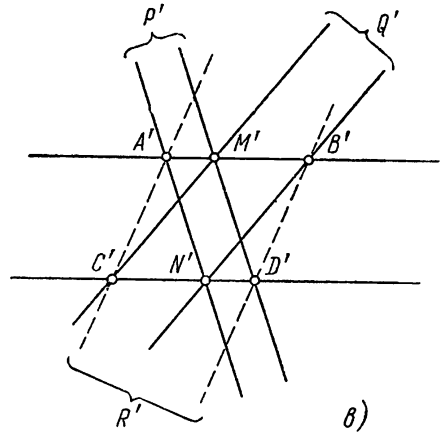
четырехугольников AMND, BMNC и ABCD лгжат на одной прямой (рис. 61,*а*) [1]). Элементарное доказательство этой интересной теоремы очень сложно, однако если использовать преобразование гомологии, то ее доказать легко. Преобразуем рис. 61,*а* при помощи гомологии Г, выбранной так, чтобы прямая *PQ* играла роль прямой *q* рис 57 (отметим, что мы пока не знаем,



а)



б)



в)

Рис. 61

принадлежит ли точка *R* той же прямой). При этом мы придем к (совсем новому!) рис. 61,*б*, где $A'N' \| D'M'$ (ибо точка *P* пересечения *AN* и *DM* переходит в «бесконечно удаленную» точку) и $B'N' \| C'M'$ (ибо переходит в «бесконечно удаленную» точка *Q* рис. 61,*а*). А теперь из подобия треугольников *O'A'N'* и *OM'D'*, *OC'M'* и *ON'B'* (где *O*—точка пересечения

[1]) Если прямые *AD*, *BC* и *MN* проходят через одну точку, то наше утверждение вытекает, очевидно, из доказанной только что теоремы; в этом частном случае прямая *PRQ* проходит через точку пересечения прямых *AB* и *CD*.

прямых $A'B'$ и $C'D'$ [1]) имеем

$$\frac{OA'}{ON'}=\frac{OM'}{OD'}, \quad \frac{ON'}{OB'}=\frac{OC'}{OM'}$$

Перемножая эти два равенства, получаем

$$\frac{OA'}{OB'}=\frac{OC'}{OD'}.$$

откуда вытекает, что $A'C' \parallel B'D'$. Следовательно, точка R пересечения прямых AC и BD рис. 61,*а* переходит в «бесконечно удаленную» точку рис. 61,*б* и, значит принадлежит «прямой q» нашей гомологии — прямой PQ[1]

7.4. Проективные преобразования и проективная геометрия. Гомология представляет собой частный случай **проективного преобразования** — так называют *преобразования проективной плоскости, обладающие тем свойством, что каждую прямую* (к числу которых причисляется и несобственная прямая) *они переводят снова в прямую* [2]). Таким образом, определение проективных преобразований отличается от определения аффинных преобразований лишь тем, что их областью действия является не обычная (евклидова), а проективная плоскость [3]). Ясно, что *совокупность всех проективных преобразований* (проективной!) *плоскости составляет группу* — доказательство этого фактически не отличается от указанного на стр. 103 доказательства того, что образуют группу аффинные преобразования. Ветвь геометрии, изучающая свойства фигур, сохраняющиеся при проективных преобразованиях, называется **проективной геометрией.** Примерами теорем проективной геометрии могут служить теоремы, доказанные нами с помощью гомологии — нетрудно понять, что утверждения этих теорем сохраняют свое содержание, если подвергнуть чертеж теоремы произвольному проективному преобразованию. На этом обстоятельстве и базировалось выше применение гомологии к доказательству теорем. Преобразовав чертеж теоремы при помощи подходящим образом подобранной гомологии, мы существенно упростим его, сведя тем самым рассматриваемую теорему к более простому частному случаю того же утверждения, причем нам, оказывается, достаточно доказать утверждение лишь в этом частном случае.

7.5. Координаты в проективной плоскости. Поскольку проективная плоскость является совсем иным геометрическим образом, чем обычная (евклидова) плоскость, то для проективной плоскости оказывается непри-

---

[1]) Предоставляем читателю самому разобрать случай, когда $A'B' \parallel C'D'$ (рис. 61,*в*).

[2]) Можно доказать, что *всякое проективное преобразование плоскости можно осуществить с помощью подходящим образом подобранной гомологии, сопровождаемой некоторым преобразованием подобия* (ср со сказанным на стр 93 об аффинных преобразованиях)

[3]) По поводу понятия проективной плоскости можно повторить почти все, сказанное выше (стр. 58—59) о понятии круговой плоскости

менимым обычный способ введения координат. Однако систему координат, годную в случае проективной плоскости, оказывается возможным получить с помощью небольшого видоизменения обычной конструкции: достаточно заменить декартовы координаты x, y *однородными координатами* x_1, x_2, x_0, связанными с x и y соотношениями

$$x=\frac{x_1}{x_0}, \qquad y=\frac{x_2}{x_0} \tag{18}$$

При этом, умножив все три координаты x_1, x_2, x_0 на одно и то же число $\rho\neq 0$, мы получим координаты *той же самой* точки (ибо декартовы координаты x и y при этом не изменятся); таким образом, однородные координаты определяются, как говорят, «с точностью до произвольного множителя ρ». Если x_0 не равно нулю, то тройка координат (x_1, x_2, x_0) отвечает (обыкновенной) точке A плоскости, декартовы координаты которой определяются по формулам (18). Если же $x_0=0$, то формулы (18) теряют смысл. В случае, когда по крайней мере одно из чисел x_1, x_2 отлично от нуля, считают, что координаты $(x_1, x_2, 0)$ отвечают «бесконечно удаленной» точке A' проективной плоскости (по формулам (18) этой точке приписываются «бесконечно большие» декартовы координаты x и y, но определенное *отношение* $\frac{y}{x}=\frac{x_2}{x_1}$, задающее угловой коэффициент «проходящих» через эту точку A' прямых). Наконец, координатам $x_1=x_2=x_0=0$ не отвечает *никакая* точка проективной плоскости, т. е. такие значения координат не допускаются (ибо нельзя говорить и об «угловом коэффициенте» $\frac{y}{x}=\frac{x_2}{x_1}$, отвечающем точке (0, 0, 0))

Введение однородных координат позволяет записать любое отображение, область определения и область значений которого содержатся в проективной плоскости, уравнениями вида

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \varphi(x_1, x_2, x_0),\\ x_2' &= \psi(x_1, x_2, x_0),\\ x_0' &= \chi(x_1, x_2, x_0) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

(точнее бы было говорить об уравнениях

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1' &= \varphi(x_1, x_2, x_0),\\ \rho x_2' &= \psi(x_1, x_2, x_0),\\ \rho x_0' &= \chi(x_1, x_2, x_0), \end{aligned}\right\} \tag{19a}$$

где $\rho\neq 0$ — произвольное число; при этом функции $\varphi(x_1, x_2, x_0)$, $\psi(x_1, x_2, x_0)$, $\chi(x_1, x_2, x_0)$ должны быть таковы, что при замене x_1, x_2, x_0 на σx_1, σx_2, σx_0, где $\sigma\neq 0$, значения этих функций должны умножаться на некоторое число $\tau\neq 0$, зависящее от σ, но одинаковое для всех трех функций).

Особую роль среди всех отображений (19) (или (19а)) играют *линейные отображения проективной плоскости*

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1' &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_0,\\ \rho x_2' &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_0,\\ \rho x_0' &= a_0x_1 + b_0x_2 + c_0x_0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

в том случае, когда эти отображения взаимно однозначны (т. е. когда из формул (20) можно также по x_1', x_2', x_0' определить x_1, x_2, x_0 с точностью до общего множителя), они являются проективными преобразованиями. Доказательство этого почти не отличается от доказательства того, что линейные преобразования обычной плоскости являются аффинными преобразованиями (ср. выше, стр. 76 и след.). Оно использует лишь то обстоятельство, что каждая прямая проективной плоскости в однородных координатах записывается линейным уравнением

$$Ax_1+Bx_2+Cx_0=0; \tag{21}$$

так, прямая

$$Ax+By+C=0 \quad \text{или} \quad y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \tag{21a}$$

с угловым коэффициентом $k=-\frac{A}{B}$ в однородных координатах (18) записывается уравнением (21) (ему удовлетворяет также «бесконечно удаленная» точка $(x_1, x_2, 0)=(B, -A, 0)$, через которую «проходит» прямая (21а)), а «бесконечно удаленная» прямая проективной плоскости записывается простым уравнением $x_0=0$. Можно доказать, что и, обратно, *каждое проективное преобразование (проективной) плоскости в однородных координатах записывается формулами типа* (20).

7.6. Бирациональные преобразования проективной плоскости. Идя дальше по пути, намеченному в конце § 3 можно также определить бирациональные преобразования проективной плоскости; эти преобразования характеризуются тем, что фигурирующие в их аналитической записи (19) функции $\varphi(x_1, x_2, x_0)$, $\psi(x_1, x_2, x_0)$, $\chi(x_1, x_2, x_0)$ суть рациональные функции переменных x_1, x_2, x_0 и что тем же свойством обладают и обратные к ним преобразования (ср. выше, стр. 79). При этом функции φ, ψ и χ можно даже считать целыми рациональными, ибо эти три функции можно одновременно умножить на любое выражение и таким путем избавиться от знаменателей дробей. Последнее обстоятельство позволяет классифицировать бирациональные преобразования проективной плоскости по степеням функций φ, ψ, χ: самыми простыми бирациональными преобразованиями являются линейные (где функции φ ψ, χ линейны); затем идут квадратичные преобразования (функции φ, ψ, χ второй степени), кубические преобразования (функции φ, ψ, χ третьей степени) и т. д. [1]).

О геометрическом смысле линейных (проективных) преобразований мы уже говорили Примером квадратичного преобразования может служить инверсия (7) или гиперболическая инверсия (8) В однородных координатах можно эти два последних преобразования записать так:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= kx_1x_0, \\ x_2' &= kx_2x_0, \\ x_0 &= x_1^2+x_2^2, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

[1]) Степени функций φ, ψ, χ не могут быть различными, так как необходимо, чтобы при умножении координат x_1, x_2, x_0 на любой множитель σ все функции умножались на один и тот же множитель τ ($=\tau(\sigma)$).

соответственно

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 x_2, \\ x_2' &= k x_0^2, \\ x_0' &= x_2 x_0 \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

(ср. эти формулы с (7) и (8)) стр. 73) [1]). Эти примеры являются достаточно характерными: можно показать, что *каждое квадратичное преобразование проективной плоскости можно представить в виде* $\Lambda\Sigma$, *где* Λ *есть линейное*

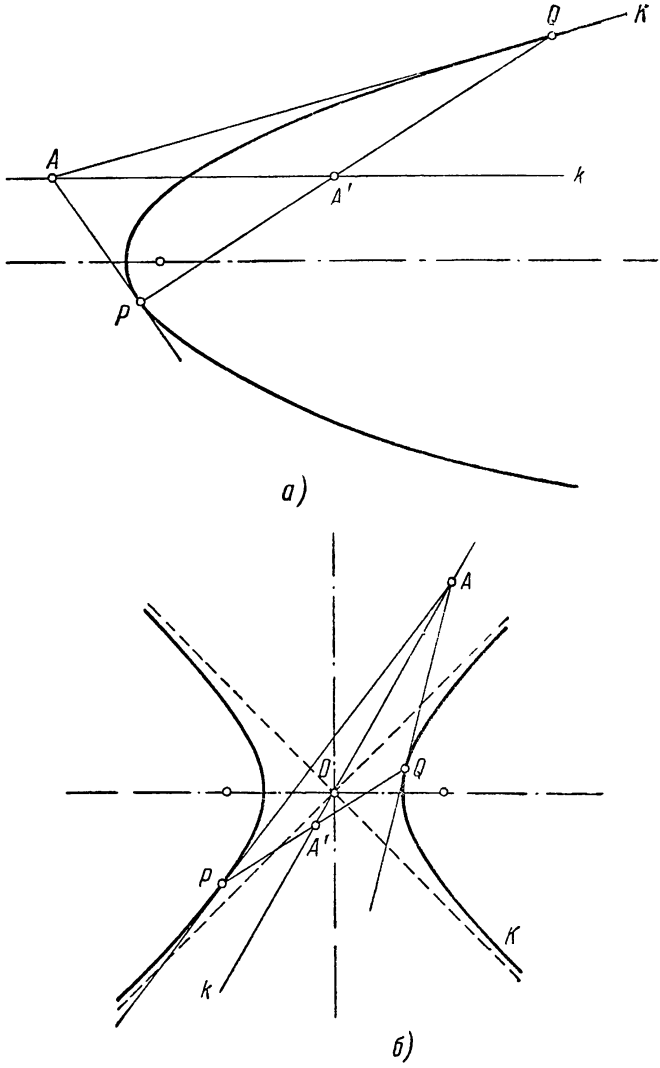


Рис. 62.

[1]) Строго говоря, ни инверсия, ни гиперболическая инверсия не являются преобразованиями проективной плоскости: инверсия (22)

преобразование (сводящееся, как мы знаем, к гомологии [1])), *а* Σ*—симметрия относительно окружности* (инверсия), *или симметрия относительно пары параллельных прямых* (гиперболическая инверсия), *или же симметрия относительно* (равнобочной) *гиперболы или параболы*. При этом симметрия относительно гиперболы или относительно параболы определяется в точности так же, как и симметрия относительно окружности: каждую внешнюю по отношению к соответствующей кривой K точку A она переводит в точку A' пересечения проходящего через A диаметра кривой K (т. е. прямой, соединяющей точку A с центром O гиперболы или параллельную оси параболы [2])) с прямой, соединяющей точки P и Q прикосновения с кривой K проведенных к K из точки A касательных, а точку A' переводит в A; точки кривой K при симметрии относительно K остаются на месте (ср. рис. 62,*а,б* с рис. 9 на стр. 56). Геометрическое описание всех кубических преобразований плоскости (а тем более произвольных бирациональных преобразований), аналогичное этому описанию квадратичных преобразований, до сих пор неизвестно.

§ 8. Неточечные отображения

8.1. Примеры неточечных преобразований. К понятию точечного отображения мы пришли, считая, что аргумент x и значение y функции $y=f(x)$ являются не числами, как это чаще всего приходится считать, а точками. Столь же законно, однако, считать, что в обозначении функции $y=f(x)$ под x и y понимаются не точки, а иные геометрические объекты, возможно даже объекты разной природы. На этом пути мы приходим к более общему понятию (не обязательно точечного!) геометрического преобразования, например преобразования $a'=\Phi(a)$ в множестве прямых линий, переводящего каждую прямую a в новую (или ту же самую) прямую a', или преобразования $\Sigma'=\Phi(\Sigma)$ в множестве окружностей, переводящего окружность Σ в окружность Σ'; можно также рассматривать, скажем, отображения, переводящие окружности в точки (например, $O=\Phi(S)$, где O есть центр окружности S), точки в прямые (ср. ниже стр. 128)

переводит все точки «бесконечно удаленной» прямой $x_0=0$ в центр инверсии $O(0, 0, 1)$, а гиперболическая инверсия (23) переводит все точки «бесконечно удаленной» прямой $x_0=0$ в одну «бесконечно удаленную» точку A_1 (1, 0, 0) (отвечающую направлению оси инверсии o), а все точки оси o инверсии, имеющей уравнение $x_2=0$—в другую «бесконечно удаленную» точку $A_2(0, 1, 0)$ (отвечающую перпендикулярному o направлению) [Мы отмечали выше, что желание рассматривать инверсию или гиперболическую инверсию как преобразования плоскости приводит к необходимости совсем иного пополнения плоскости «идеальными» элементами, отличного от того, с которым связано понятие проективной плоскости.] Можно доказать, *что единственными бирациональными преобразованиями, областью действия которых служит вся проективная плоскость, являются линейные преобразования* (20). Аналогично этому *единственными преобразованиями* (114), *областью действия которых служит круговая плоскость, задаваемыми рациональными функциями* $F(z)$ *комплексного переменного* z (см. выше, стр. 78), *являются дробно-линейные преобразования* (16).

[1]) См сноску [2]) на стр. 117.

[2]) См. статью о конических сечениях в следующей книге ЭЭМ.

или окружности в треугольники. Приведем здесь несколько примеров таких неточечных преобразований и отображений.

1°. Ясно, что *каждое аффинное преобразование плоскости*, переводящее прямую линию снова в прямую, *можно рассматривать как преобразование в множестве прямых*. Так, сжатие к точке O (гомотетию) с коэффициентом k можно рассматривать как преобразование $a' = \Phi(a)$, переводящее каждую прямую a в прямую a' того же направления, расстояние которой от центра O преобразования равно k-кратному расстоянию прямой a от точки O (рис. 63; при этом проходящие через O прямые переходят в себя). Сжатие к прямой o с коэффициентом k можно рассматривать как преобразование $a' = \Phi(a)$, переводящее параллельную o прямую a_1 в прямую a_1' того же направления, расстояние которой от o равно k-кратному расстоянию прямой a_1 от o (при этом прямая o переходит в себя), а прямую a_2, пересекающую o, — в прямую a_2', пересекающую o в той же точке, что и a_2 и образующую с o угол, тангенс которого в k раз больше (т. е. k-кратен) тангенса угла, образованного прямыми a_2 и o (рис. 64). При этом, если раньше мы характеризовали аффинные преобразования как такие (точечные!) преобразования, которые переводят прямую линию (рассматриваемую как прямолинейный ряд точек; рис. 65,*а*) снова в прямую, то теперь мы можем описать их как *такие преобразования в множестве прямых линий плоскости, которые переводят каждую точку* (под которой мы теперь понимаем пучок пересекающихся в одной точке прямых; рис. 65,*б*) *снова в точку* (другими словами, пучок переводят в пучок).

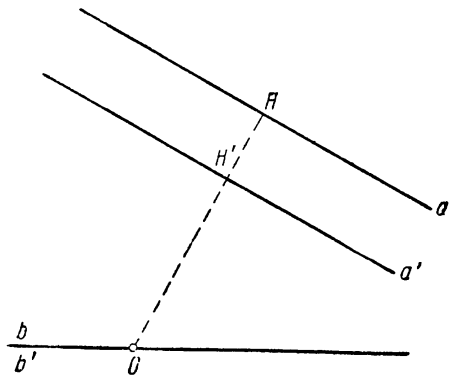


Рис. 63.

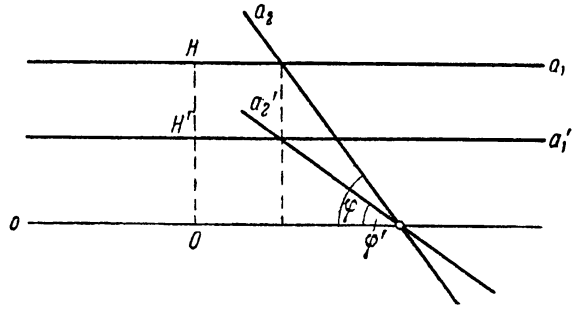


Рис. 6 .

2°. Также и *гомологию* Γ (см. выше стр. 110) *можно описать как преобразование в множестве прямых линий плоскости*. А именно гомологию с осью o и центром O, переводящую некоторую прямую m в прямую m', пересекающую ось o в той же точке, что и

m, можно определить как преобразование, которое переводит произвольную прямую a плоскости в прямую a', пересекающую ось o в той же точке, что и a (параллельную o, если $a \parallel o$) и проходящую через точку A' пересечения прямой m' с прямой OA,

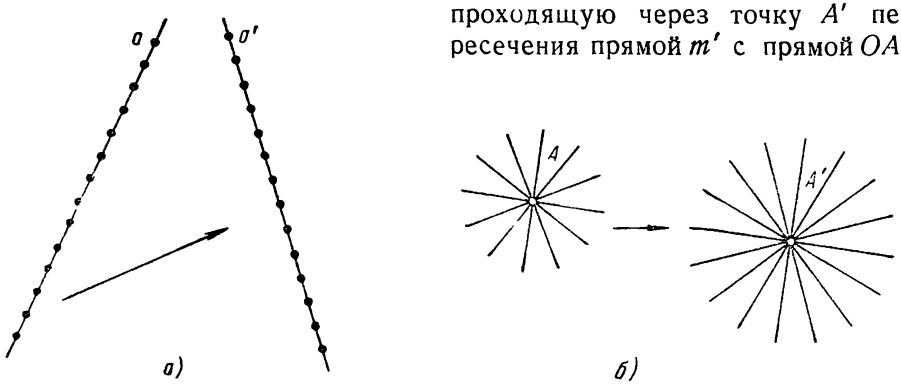


Рис. 65.

где A есть точка пересечения прямых a и m (рис. 66; если прямая b пересекает ось o в той же точке, что и m, то для построения прямой $b' = \Gamma(b)$ мы заменим m и m' парой прямых a и a', постро-

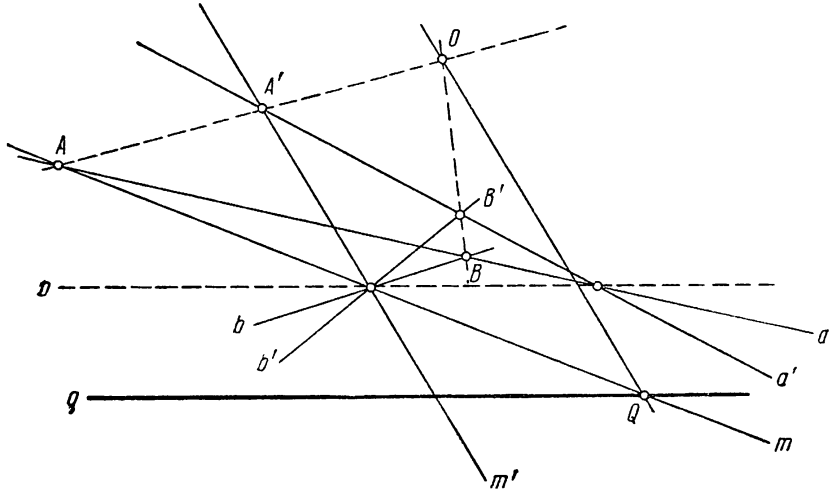


Рис. 66.

енных по описанному правилу и пересекающих ось o в иной точке). При этом гомология Γ является преобразованием множества всех прямых проективной плоскости; изображенную на рис. 66 прямую q она переводит в несобственную прямую. Преобразование Γ обладает тем свойством, что *пучок прямых, пересекающихся в одной* (собственной или несобственной) *точке, оно переводит снова в пучок прямых, пересекающихся в одной* (собственной или несобственной) *точке.*

8.2. Неточечные преобразования в геометрии окружностей. Аналогично сказанному относительно аффинных преобразований *каждое круговое преобразование плоскости можно рассматривать как преобразование в множестве окружностей и прямых линий, переводящее каждую окружность или прямую* (которую можно также считать «окружностью бесконечно большого радиуса») *снова в окружность или прямую* Так из формул (9) и (9′) § 3 (стр. 74) следует, что инверсию с центром в начале O (декартовых прямоугольных) координат и степенью 1 можно описать как преобразование в множестве окружностей и прямых плоскости, переводящее:

а) прямую $ax+by=0$, проходящую через начало координат O, в себя;

б) прямую $2ax+2by=1$, не проходящую через O, в окружность $(x^2+y^2)-2ax-2by=0$, проходящую через O (центр $Q(a, b)$ этой окружности принадлежит перпендикуляру OP, опущенному из точки O на прямую, причем $OQ=\frac{1}{2OP}$; радиус окружности равен $QO\left(=\frac{1}{2PO}\right)$);

в) окружность $(x^2+y^2)-2ax-2by=0$, проходящую через O, в прямую $2ax+2by=1$, не проходящую через O (перпендикуляр OP, опущенный из O на эту прямую, принадлежит прямой OQ, где $Q(a, b)$ — центр окружности; при этом $OP=\frac{1}{2OQ}$);

г) окружность $(x^2+y^2)-2ax-2by+c=0$, не проходящую через O, в окружность $x^2+y^2-2\frac{a}{c}x-2\frac{b}{c}y+\frac{1}{c}=0$, также не проходящую через O (центры $Q(a, b)$ и $Q'\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ этих окружностей Σ и Σ' лежат на одной прямой с точкой O, причем отношение радиусов $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$ и $r'=\sqrt{\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2-\frac{1}{c}}$ окружностей равно отношению длин отрезков OQ и OQ', откуда следует, что O является центром гомотетии окружностей Σ и Σ', а степени c и $\frac{1}{c}$ точки O относительно окружностей Σ и Σ' [1]) взаимно обратны). Ясно, что круговые преобразования можно охарактеризовать и как *преобразования в множестве точек плоскости, переводящие каждую окружность* (к числу которых здесь причисляются и «окружности бесконечно большого радиуса» — прямые), *понимаемую как совокупность точек* (рис 67, *а*), *снова в окружность*, и, с другой стороны, *как преобразования в множестве окружностей* (*и прямых*), *переводящие совокупность окружностей, пересекающихся в одной точке* (рис. 67, *б*), *снова в такую же совокупность окружностей*. При этом, разумеется, мы должны рассматривать круговые преобразования как точечные преобразования, действующие в «расширенной» (круговой) плоскости.

До сих пор мы рассматривали лишь такие неточечные преобразования, которые можно трактовать также и как точечные. Однако можно определить и такие преобразования в множестве прямых линий или в множестве окружностей на плоскости, которые не переводят совокупность пересекающихся в одной точке прямых (пучок прямых) или совокупность пересекающихся в одной точке окружностей снова в такую же совокупность прямых или окружностей и которые поэтому никак нельзя рассматривать как преобразования в множестве точек. Содержательные примеры преобразований такого рода доставляет теория окружностей [2]). В этой

---

[1]) См. § 2 статьи «Окружности», стр. 454—461.

[2]) См. статью «Окружности».

теории изучаются так называемые **осевые круговые преобразования**, т. е. преобразования в множестве прямых линий плоскости, переводящие совокупность касательных одной окружности Σ снова в совокупность касательных одной (вообще говоря, отличной от Σ!) окружности Σ'. Совокупность пересекающихся в одной точке прямых эти преобразования, как правило, переводят в совокупность касательных некоторой окружности (таким образом, эти преобразования «точку переводят в окружность»). Рассматриваются теорией окружностей и **касательные круговые преобразования**, переводящие окружность в окружность и сохраняющие касание окружностей. Совокупность окружностей, проходящих через одну точку, и совокупность

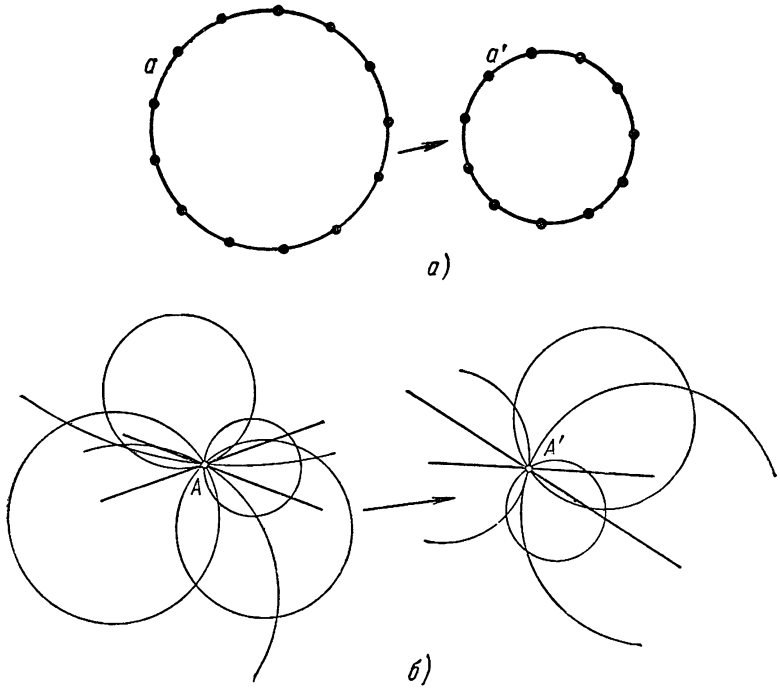


Рис. 67.

окружностей, касающихся одной прямой, они могут переводить в совокупность окружностей, касающихся одной окружности (таким образом, касательны круговые преобразования «точку переводят в окружность» и «прямую переводят в окружность»).

Простейшим примером осевого кругового преобразования является так называемое **расширение**. Как преобразование в множестве прямых, расширение P на величину d определяется следующим образом: *каждую прямую a расширение* P *переводит в прямую a', параллельную a и удаленную от a на расстояние d.* Так как это определение не указывает, в какую именно из двух прямых, параллельных a и удаленных от a на расстояние d, переходит a, то здесь нужны еще некоторые дополнительные соглашения. Именно оказывается необходимым считать, что каждая прямая плоскости является направленной, т. е. что с обыкновенной прямой a совпадают по положению две прямые a_1 и a_2, отличающиеся

одна от другой направлением (направление на рисунках обычно обозначается стрелкой). Прямые a_1 и a_2 расширение P переводит в разные прямые a_1' и a_2', сдвигая каждую прямую на расстояние d вправо (если смотреть в направлении, указанном на преобразуемой прямой; см. рис. 68). Таким образом, расширение P приходится рассматривать не как преобразование в множестве обыкновенных прямых плоскости, а как преобразование в множестве направленных прямых (осей). Аналогично обстоит дело и при рассмотрении более общих осевых круговых преобразований, с чем и связано прилагательное «осевые» в названии этих преобразований.

Нетрудно понять, что пучок прямых расширение P переводит в совокупность касательных окружности Σ с центром в центре пучка и радиусом d (рис. 69, *а*); этой окружности естественно приписать определенное направление, согласованное с направлением всех ее касательных (на рисунках направление окружности также указывается поставленной на окружности стрелкой). Таким образом, естественно считать, что *расширение на величину d переводит точки в окружности радиуса d*. Направленную окружность Σ на плоскости (задаваемую совокупностью своих направленных касательных) расширение P переводит в концентрическую с Σ окружность Σ', радиус которой равен $r+d$, или $r-d$, или $d-r$ (рис. 69, *б*—*г*). Оказывается очень удобным считать, что радиус окружности может быть и положительным и отрицательным, причем первое означает, что окружность направлена против часовой стрелки, а второе — что она направлена по часовой стрелке; при этом направленная окружность полностью определится указанием своего центра и (положительного или отрицательного!) радиуса. При таком соглашении расширение переводит окружность радиуса r в окружность радиуса $r+d$ (см. рис. 69, *б*—*г*; отрицательный радиус имеют окружности Σ и Σ' на рис. 69, *в* и окружность Σ на рис. 69, *г*). Таким образом, расширение P можно описать как *преобразование в множестве направленных прямых плоскости, сдвигающее каждую прямую вправо на расстояние d*. При этом множество всех прямых, касающихся одной направленной окружности Σ (роль которой может играть и «окружность нулевого радиуса», так что мы имеем пучок сходящихся в одной точке прямых), переходит в множество прямых, касающихся одной окружности Σ', т. е. окружность переходит в окружность. Но можно также описать расширение и как *преобразование в множестве направленных окружностей, переводящее окружность* (положительного, нулевого или отрицательного!) *радиуса r в концентрическую с исходной окружность радиуса* $r+d$. Это преобразование переводит совокупность всех окружностей, касающихся одной направленной прямой l, в совокупность окружностей, касающихся другой прямой l', т. е. прямую оно переводит в прямую. Однако, как точечное преобразование рассматривать расширение невозможно!

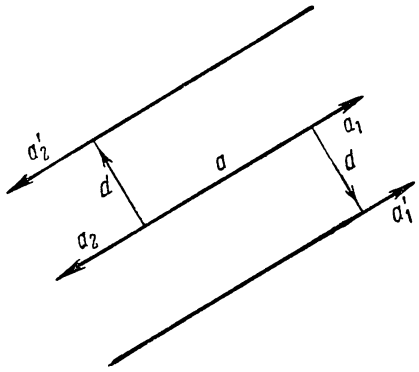


Рис. 68.

Неточечные преобразования плоскости также довольно часто могут оказаться полезными для решения конкретных геометрических задач на построение и на доказательство В качестве первого примера рассмотрим здесь известную задачу о *построении общих касательных к двум окруж-*

ностям Σ_1 и Σ_2 радиусов r_1 и r_2, где $r_1 \geqslant r_2$. Применим к чертежу этой задачи (рис. 70) расширение на величину r_2; при этом окружность Σ_2 мы будем считать направленной по часовой стрелке (имеющей отрицательный радиус $-r_2$), так что расширение P переводит Σ_2 в точку — центр Σ_2' этой окружности (именно в этом и заключается смысл применения расширения!) Окружность Σ_1 перейдет в окружность Σ_1', концентрическую с Σ_1;

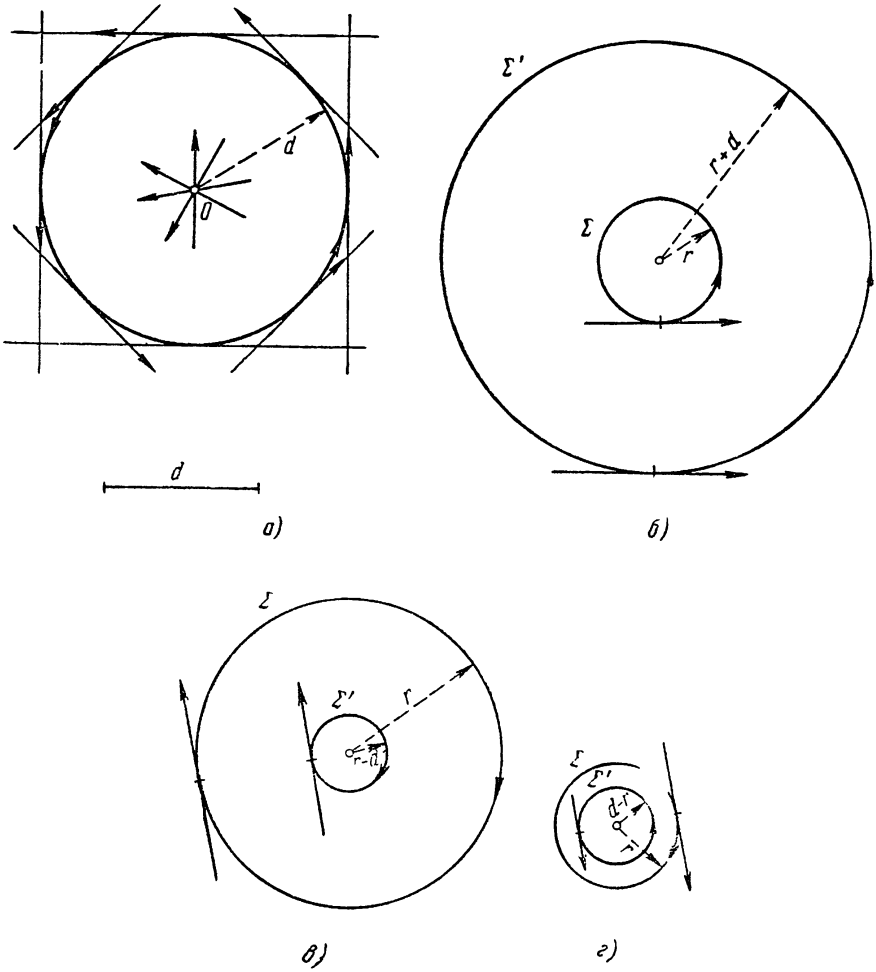


Рис. 69.

при этом в зависимости от того, считаем ли мы Σ_1 направленной также по часовой стрелке или против часовой стрелки, окружность Σ_1 будет иметь радиус $r_1 - r_2$ (рис. 70, *а*), или $r_1 + r_2$ (рис. 70, *б*). Общие касательные окружностей Σ_1 и Σ_2 перейдут в касательные окружности Σ_1', проходящие через точку Σ_2'; их нетрудно построить (построение прямой, касательной к данной окружности и проходящей через заданную точку, мы

считаем известным). Искомая же касательная l окружностей Σ_1 и Σ_2 найдется как прямая, которую расширение P переводит в проходящую через Σ_2' касательную l' окружности Σ_1'; она параллельна l' и удалена от l' на расстояние r_2 (причем l' расположена справа от направленной прямой l).

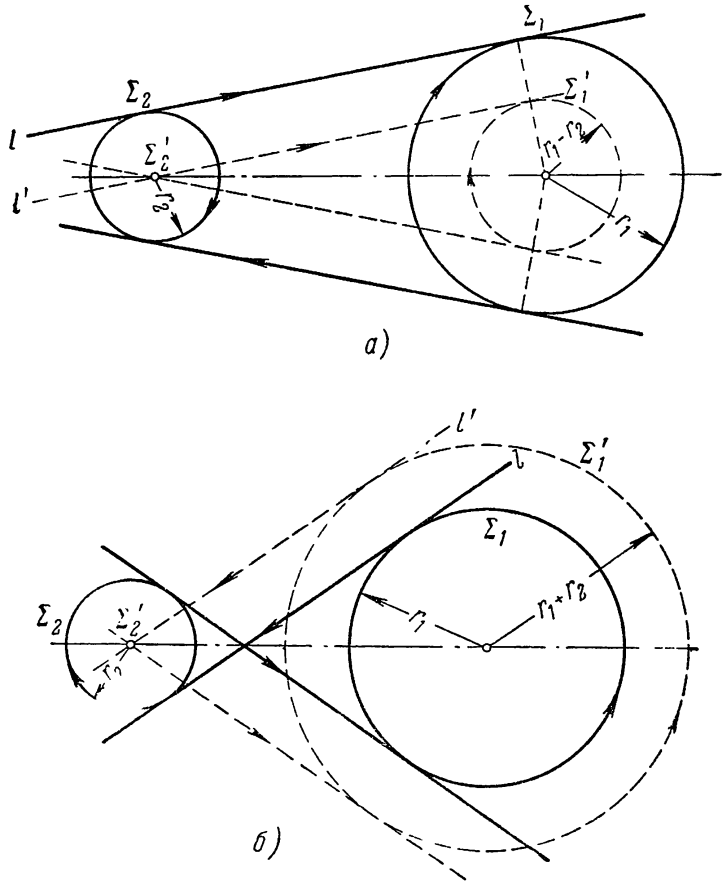


Рис. 70

8.3. Полярное отображение. Принцип двойственности в проективной геометрии. Важным и интересным примером отображения, *переводящего точки в прямые линии*, а прямые — в точки, является так называемое **полярное отображение** П с центром O. Это отображение каждую точку A плоскости переводит в прямую a, перпендикулярную OA и проходящую через точку A', в которую точка A переводится инверсией с центром O и степенью 1 $\left(\text{т. е. через такую точку } A' \text{ луча } OA, \text{ что } OA' = \frac{1}{OA}\right)$; обратно, прямую a отображение П переводит в точку A (рис. 71, $а$).

Ясно, что областью действия полярного отображения является множество всех точек и прямых плоскости. Для наиболее полного рассмотрения полярного отображения целесообразно считать, что точки и прямые рассматриваются не на обычной (евклидовой), а на проективной плоскости. При этом нужно дополнить определение полярного отображения соглашением, что центру O соответствует «бесконечно удаленная» (несобственная) прямая проективной плоскости, а несобственной точке A, определяемой проходящей через нее прямой l, соответствует проходящая через O прямая.

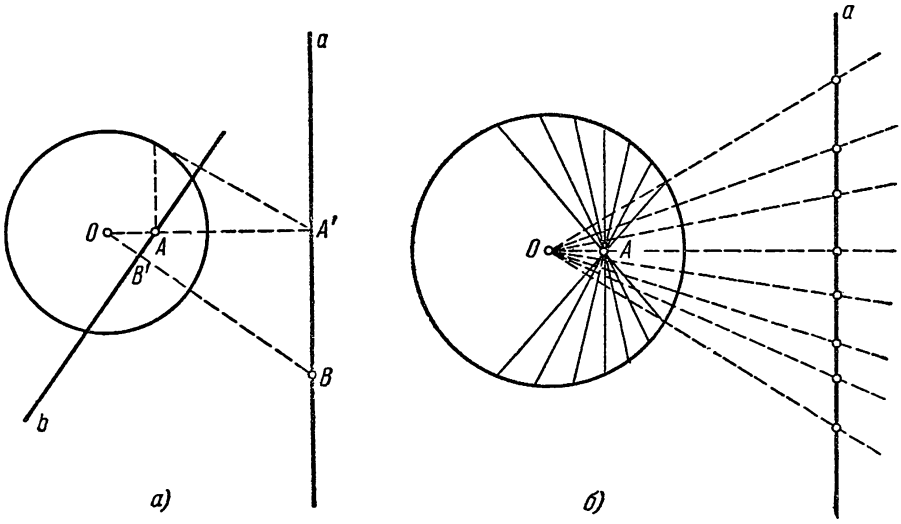


Рис. 71.

перпендикулярная l. (В противном случае нам пришлось бы исключать из рассмотрения точку O и проходящие через нее прямые, что также может служить вариантом рассмотрения полярного отображения, но менее удобным, чем использование несобственных элементов проективной плоскости.)

Ряд замечательных свойств полярного отображения Π мы укажем ниже; здесь же отметим лишь следующее его свойство, бесспорно важнейшее из всех: *если* $\Pi(A)=a$ *и* B *— точка прямой* a, *то прямая* $b=\Pi(B)$ *проходит через точку* A. Действительно, обозначив через B' точку пересечения прямой OB с прямой $b=\Pi(B)$, мы найдем $OB\cdot OB'=OA\cdot OA'\ (=1)$ или

$$\frac{OA'}{OB}=\frac{OB'}{OA}.$$

Из этого следует, что треугольники $OA'B$ и $OB'A$ подобны; в частности, $\angle OB'A=\angle OA'B=90°$, и потому точка A лежит на перпендикулярной

к OB прямой b. Предоставляем читателю проверить, как видоизменится рис. 71, *а*, если точка A (или B) совпадает с O или является несобственной.

Это свойство полярного отображения означает, что *прямую* a, *рассматриваемую как ряд точек*, *отображение* Π *переводит в точку* A, *понимаемую как пучок прямых;* обратно, *любой пучок прямых отображение* Π *переводит в прямолинейный ряд точек* (рис. 71, *б*).

Важнейшим следствием наличия полярного отображения проективной плоскости является так называемый **принцип двойственности** проективной геометрии [1]). Этот принцип утверждает, что *в формулировке любой теоремы проективной геометрии на плоскости можно заменить всюду слово «точка» словом «прямая» и, наоборот; выражение «лежит на» выражением «проходит через», и наоборот; новая теорема также будет справедлива, если только была справедлива первоначальная теорема.* В самом деле, пусть мы имеем некоторую теорему проективной геометрии, относящуюся к расположению точек и прямых. Полярное отображение переводит выражающий эту теорему чертеж в новый чертеж, в котором роль точек уже будут играть прямые, а роль прямых точки; при этом точкам, принадлежащим одной определенной прямой l, будут отвечать прямые, пересекающиеся в точке L, отвечающей прямой l. Этот новый чертеж будет выражать иную теорему, которую можно назвать «двойственной» первоначальной теореме. Ниже мы поясним эту общую схему конкретным примером.

Пример применения полярного отображения доставляет нам так называемая

Теорема Дезарга. *Если прямые* AA_1, BB_1 *и* CC_1, *соединяющие соответствующие вершины двух треугольников* ABC *и* $A_1B_1C_1$, *пересекаются в одной точке* O, *то точки* K, L *и* M *пересечения соответствующих сторон этих треугольников лежат на одной прямой* (рис. 72, *а*). Для доказательства произведем полярное отображение Π с центром в точке O. При этом точки A и A_1 перейдут в прямые a и a_1, перпендикулярные прямой OAA_1 и, следовательно, параллельные между собой; точки B и B_1, C и C_1 также перейдут в прямые b и $b_1 \parallel b$, c и $c_1 \parallel c$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ перейдут в новые треугольники с соответственно параллельными сторонами, образованные прямыми a, b, c и a_1, b_1, c_1. Вершины этих новых треугольников мы обозначим через A', B', C' и A_1', B_1', C_1'. Так как $\Pi(A) = a$, $\Pi(B) = b$, то прямая AB переходит при полярном отображении в точку пересечения прямых a и b, т. е. $\Pi(AB) = C'$. Аналогично $\Pi(A_1B_1) = C_1'$. Следовательно, точка K пересечения прямых AB и A_1B_1 переходит в прямую

[1]) См. учебники проективной геометрии, указанные в сноске [2]) на стр. 110.

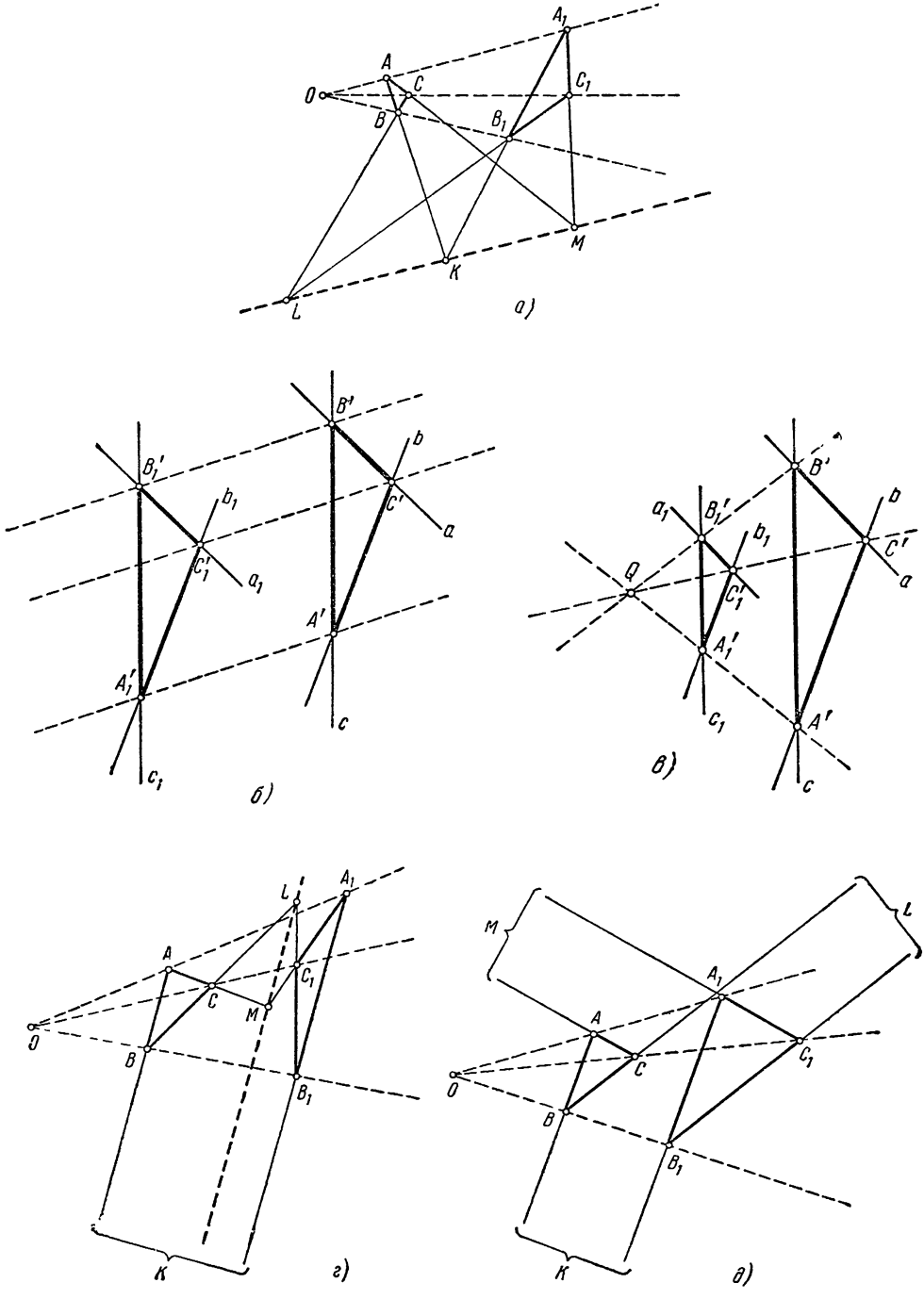

A1
A
C
C1
O
B
B1
M
K
L
а)
B'
b
B1'
b1
C'
a
C1'
a1
A'
A1'
c
c1
б)
a1
B1'
B'
b
b1
C'
a
Q
C1'
A1'
c1
A'
c
в)
L
A1
M
A
C
C1
M
O
B
B1
K
г)
L
A1
A
C
C1
O
B
B1
K
д)

Рис. 72.

$C'C_1'$, т. е. $\Pi(K)=C'C_1'$. Аналогично $\Pi(L)=A'A_1'$, $\Pi(M)=B'B_1'$. Поэтому для доказательства того, что точки K, L, M лежат на одной прямой, достаточно установить, что прямые $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'$ пересекаются в одной точке. Но из параллельности прямых a и a_1, b и b_1, c и c_1 вытекает, что либо треугольники $A'B'C'$ и $A_1'B_1'C_1'$ равны и получаются друг из друга параллельным переносом (рис. 72, *б*), и тогда прямые $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'$ параллельны между собой, т. е. пересекаются в одной несобственной точке, либо треугольники $A'B'C'$ и $A_1'B_1'C_1'$ гомотетичны, и тогда прямые $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'$ также пересекаются в одной точке — центре гомотетии (рис. 72, *в*). Следовательно, в любом случае точки K, L, M лежат на одной прямой. Заметим, что одна из точек K, L, M или даже вся прямая KLM может оказаться несобственной (рис. 72, *г*, *д*).

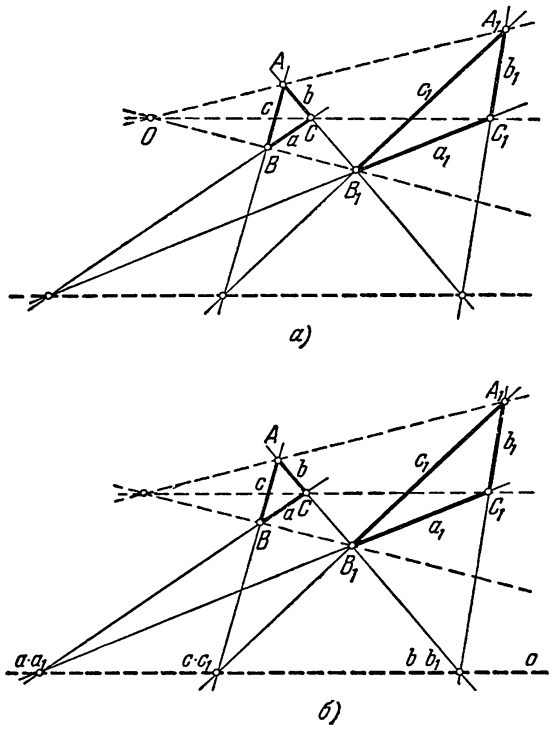


Рис. 73.

Теорема Дезарга является типичной теоремой проективной геометрии; следовательно, к ней применим принцип двойственности. Эта теорема утверждает, что *если два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке O, то точки пересечения соответствующих сторон a и a_1, b и b_1, c и c_1 двух треугольников лежат на одной прямой* (рис. 73, *а*). Заменим теперь в формулировке этой теоремы слово «точка» словом «прямая» и наоборот, в соответствии с принципом двойственности. Мы получим следующее утверждение: *если два «трехсторонника» abc и $a_1b_1c_1$ таковы, что точки $a\cdot a_1$* (точка пересечения прямых a и a_1), *$b\cdot b_1$ и $c\cdot c_1$ принадлежат одной прямой o, то прямые, соединяющие соответствующие вершины трехсторонников, пересекаются в одной точке.* Рис. 73, *б*, выражающий эту теорему, не отличается от рис. 73, *а*, выражающего теорему Дезарга, но само содержание теоремы изменилось — условие ее заменилось заключением, и наоборот. Таким образом, мы пришли к теореме, обратной первоначально сформулированной нами

теореме Дезарга (эта обратная теорема также обычно связывается с именем Дезарга). При этом полученную таким образом теорему нам уже не надо доказывать: справедливость ее следует из (прямой) теоремы Дезарга и принципа двойственности. Разумеется, имеющее место в нашем случае совпадение теоремы, «двойственной» исходной теореме, и теоремы, обратной ей, является случайным.

Наконец, приведем еще один пример применения полярного отображения к доказательству геометрической теоремы. *Пусть касательная l к вписанной окружности σ треугольника ABC пересекает стороны треугольника в точках M, N и P; прямые $OM_1 \perp OM$, $ON_1 \perp ON$ и $OP_1 \perp OP$ (где*

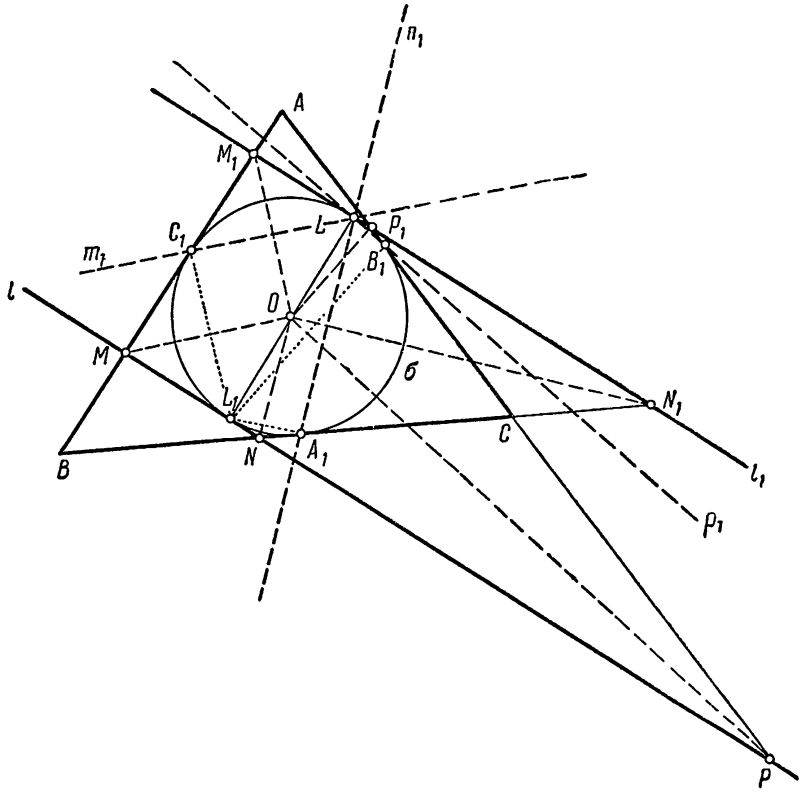


Рис. 74.

O — центр окружности σ) пересекают те же стороны в точках M_1, N_1 и P_1; докажем, что *точки M_1, N_1 и P_1 тоже лежат на одной касательной l_1 к окружности σ* (рис. 74) Будем считать, что радиус окружности σ равен 1, и произведем полярное отображение Π с центром O. При этом прямые AB, BC, CA и l перейдут в точки C_1, A_1, B_1 и L_1 их касания с окружностью σ; точки M, N и P перейдут в прямые $L_1C_1 \perp OM$, $L_1A_1 \perp ON$ и $L_1B_1 \perp OP$; точки M_1, N_1 и P_1 перейдут в прямые $m_1 \perp OM_1$, $n_1 \perp ON_1$ и $p_1 \perp OP_1$, проходящие через точки C_1, A_1 и B_1 и, очевидно, параллельные OM, ON и OP, т. е. перпендикулярные прямым L_1C_1, L_1A_1 и L_1B_1. Но отсюда

следует, что прямые m_1, n_1 и p_1 пересекают окружность σ в одной точке L, диаметрально противоположной точке L_1; этой точке отвечает (параллельная l) прямая l_1, которая касается окружности σ в точке L и которой и принадлежат точки M_1, N_1 и P_1.

8.4. Подерное преобразование. В качестве последнего примера неточечного преобразования плоскости мы рассмотрим так называемое **подерное преобразование** Δ, переводящее каждую линию плоскости в другую линию, но не сохраняющее ни точек, ни прямых, ни окружностей. Это преобразование определяется следующим довольно сложным образом. Пусть γ — некоторая кривая на плоскости; с каждой точкой A кривой γ сопоставим основание A' перпендикуляра, опущенного из фиксированной точки O (центра подерного преобразования Δ) на касательную a, проведенную к кривой γ в точке A[1]); когда точка A пробегает линию γ, соответствующая ей точка A' пробегает новую линию γ', которая и считается образом линии γ при преобразовании Δ (рис. 75). Нетрудно понять, что прямая a переводится подерным преобразованием в одну точку A — основание перпендикуляра, опущенного из O на прямую a (рис. 76); точка же A, рассматриваемая как пучок прямых (которые все играют роль «касательных» к точке), переходит в окружность Σ, построенную на отрезке OA, как на диаметре (рис. 77). Окружность с центром O подерное преобразование Δ переводит в себя; если же центр окружности Σ отличен от точки O, то преобразование Δ переводит Σ в довольно сложную кривую, называемую улиткой Паскаля (рис. 78, *а*—*в*; изображенная на рис. 78, *б* «сердцевидная» улитка Паскаля называется кардиоидой). Улитки Паскаля — очень интересные кривые; они могут быть определены (даже несколькими способами) и независимо от подерного преобразования.

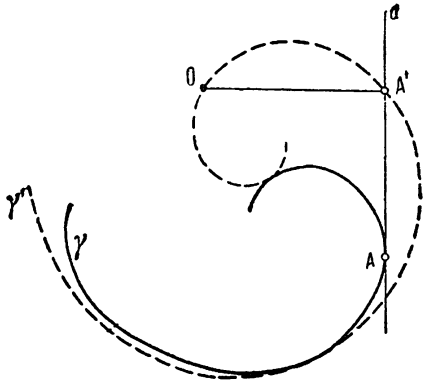


Рис. 75.

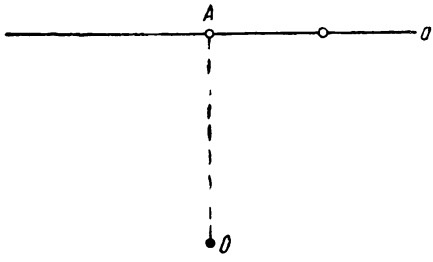


Рис. 76.

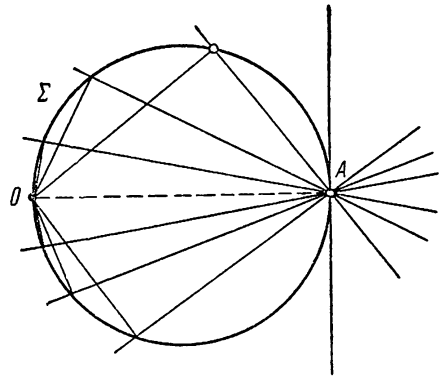


Рис. 77.

[1]) Касательной к кривой γ в ее точке A, как обычно, называется предельное положение секущей AB, к которому стремится секущая, когда точка B кривой γ стремится к A (см. статью «Производные, интегралы и ряды», кн. III ЭЭМ, стр. 305).

Подерное преобразование мы определили как преобразование в м н о ж е с т в е л и н и й плоскости (к числу которых причисляются и прямые линии и даже точки), переводящее каждую линию γ в новую линию γ'. Возможен, однако, и другой подход к этому преобразованию, в некоторых отношениях более удобный. Из определения преобразования Λ следует, что

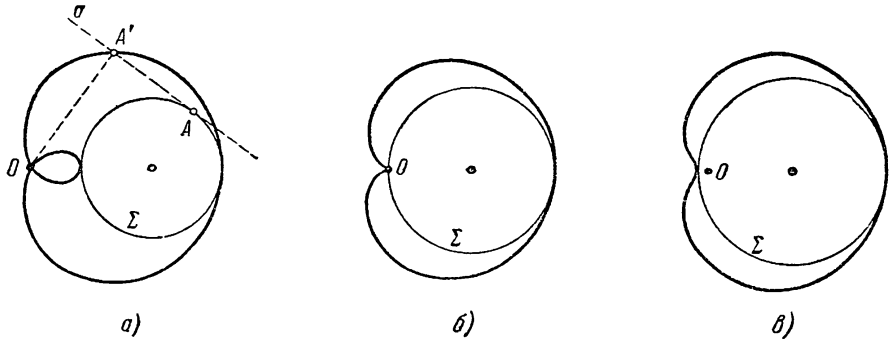


Рис. 78.

точка A' преобразованной кривой γ', сопоставленная с точкой A кривой γ, полностью определяется заданием точки A и касательной a к кривой γ в точке A — никакие другие данные о кривой γ для определения точки A'

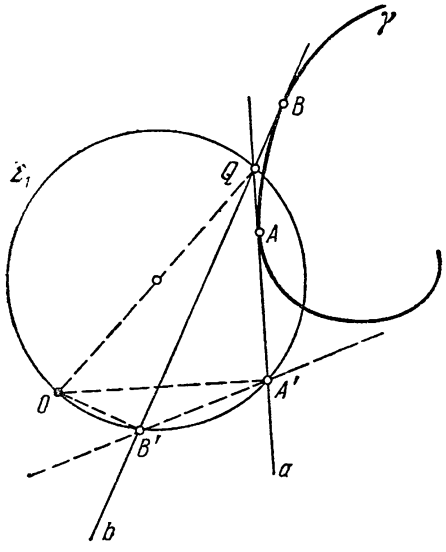


Рис. 79.

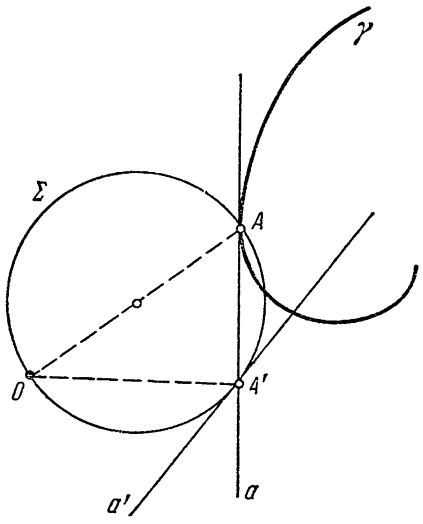


Рис. 80.

не нужны (A' есть основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую a). Но, зная точку A и прямую a, можно определить не только точку A', но и к а с а т е л ь н у ю a' к кривой γ' в точке A'. В самом деле, пусть B — другая точка кривой γ, и b — касательная к γ в этой точке; точке B отвечает точка B' кривой γ', которую можно определить как основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую b (рис. 79). Касательную a' кривой γ' в точке A' можно определить как предел, к

которому стремится секущая $A'B'$, когда точка B' стремится к A' или, что то же самое, когда B стремится к A. Но когда B стремится к A, точка Q пересечения прямых a и b также стремится к A; отсюда вытекает, что прямая $A'B'$ — хорда окружности Σ_1, построенной на отрезке OQ, как на диаметре, — стремится к прямой a', касательной в точке A' к окружности Σ (рис. 80), построенной, как на диаметре, на отрезке OA (хорда окружности Σ_1 стремится к касательной окружности Σ, ибо когда B стремится к A, и точка B' стремится к A').

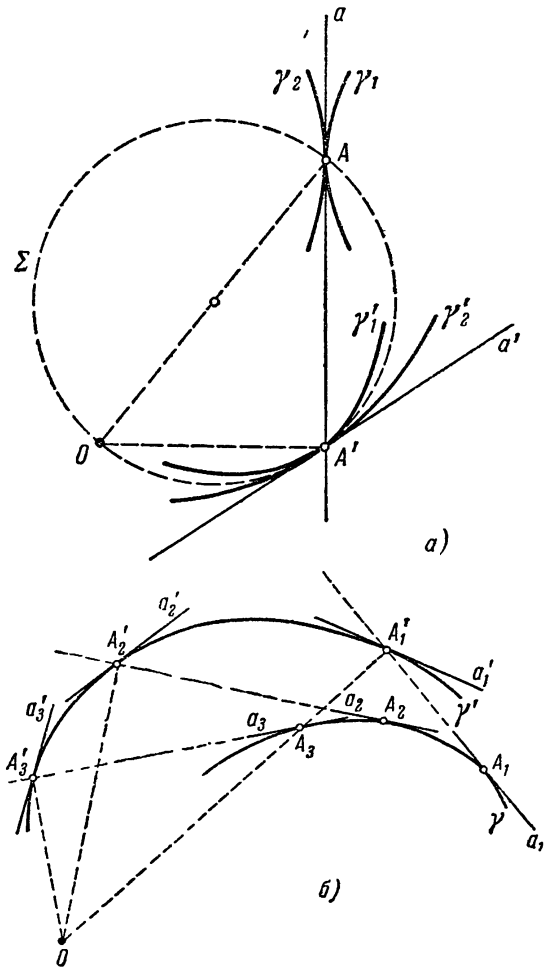


Рис. 81.

Из доказанного следует, что касающиеся между собой в точке A кривые подерное преобразование Δ переводит в кривые, касающиеся между собой в сопоставленной с A точке A' (рис 81, *а*) Другими словами можно сказать, что совокупность точки A и заданного в ней направления a преобразование Δ переводит в совокупность точки A' и заданного в ней направления a' Точку с проходящей через нее прямой в геометрии обычно называют линейным элементом. Поэтому можно сказать, что подерное преобразование Δ есть *преобразование в множестве линейных элементов плоскости*, переводящее каждый линейный элемент (A, a) в другой линейный элемент (A', a'). Кривую γ, рассматриваемую как совокупность своих линейных элементов (точек γ и касательных к γ в этих точках), Δ переводит в другую кривую, образованную линейными элементами, в которые переходят составляющие γ линейные элементы (рис 81, *б*). Преобразования такого рода называются **касательными преобразованиями** [1]); таким образом, Δ *есть касательное преобразование.*

8.5. Группы неточечных преобразований. Многое из того, что было сказано выше о точечных отображениях и преобразованиях плоскости, может быть перенесено и на произвольные (не обязательно точечные!) геометрические отображения и преобразования. Так, можно

[1]) См. статью «Окружности» в этой книге ЭЭМ, в частности стр. 510—513.

определить произведение $\Psi\Phi$ двух отображений Φ и Ψ, представляющее собой результат последовательного осуществления сначала отображения Φ, а затем отображения Ψ (разумеется, область значений отображения Φ должна совпадать с областью определения отображения Ψ). В частности, имеет смысл понятие произведения преобразований, например двух преобразований, определенных в множестве прямых линий, или двух преобразований, определенных в множестве окружностей.

Простой пример произведения двух (неточечных) преобразований доставляет преобразование P_2P_1, где P_1 есть расширение на величину d_1, а P_2 — расширение на величину d_2. Ясно, что P_2P_1 есть тоже расширение на величину d_1+d_2 ведь P_1 переводит (направленную) прямую l в прямую $l_1 \parallel l$ того же, что и l направления, лежащую справа от l и удаленную от l на расстояние d_1; расширение P_2 переводит l_1 в прямую $l' \parallel l_1$ того же направления, лежащую справа от l_1 и удаленную от l_1 на расстояние d_2; но ясно, что l' получается из l расширением на величину d_1+d_2 (рис. 82; можно также рассуждать так: P_1 переводит произвольную окружность Σ радиуса r в концентрическую с Σ окружность Σ_1 радиуса $r+d_1$, а P_2 переводит Σ_1 в концентрическую с Σ_1 окружность Σ' радиуса $(r+d_1)+d_2=r+(d_1+d_2)$, получающуюся из Σ расширением на величину d_1+d_2).

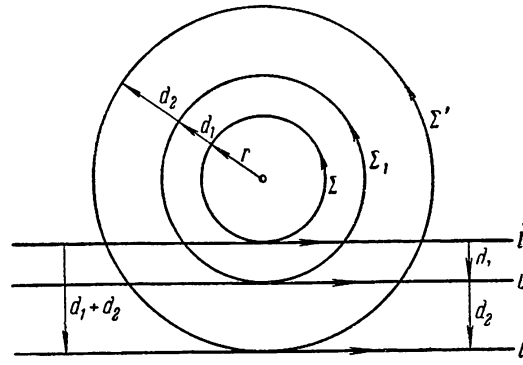


Рис. 82.

Можно также говорить о произведении $\Delta_2\Delta_1$ двух подерных преобразований Δ_1 и Δ_2: если Δ_1 переводит линию γ в линию γ_1, а Δ_2 — линию γ_1 в линию γ', то преобразование $\Delta_2\Delta_1$ переведет γ в γ' [1]).

Имеет также смысл понятие произведения $\Pi_2\Pi_1$ двух полярных отображений Π_1 и Π_2; его областью действия будет множество всех точек и прямых (проективной) плоскости. При этом $\Pi_2\Pi_1$ будет переводить точки в точки, а прямые — в прямые, т. е. оно как бы «распадается» на два отдельных преобразования, одно из которых будет точечным, а другое — преобразованием в множестве всех прямых проективной плоскости; первое из них (точечное преобразование), как легко видеть, будет проективным преобразованием «Квадрат» $\Pi\Pi=\Pi^2$ полярного отображения Π является тождественным преобразованием, ибо переводит каждую точку и каждую прямую в себя; это означает, что полярное отображение является инволютивным (см. § 5, стр. 97), т. е. обратным самому себе.

Для неточечных отображений и преобразований имеет смысл также понятие отображения (или преобразования) Φ^{-1}, обратного

[1]) Подерные преобразования Δ_1 и Δ_2 можно также рассматривать как *преобразования в множестве линейных элементов плоскости* (см. стр. 136); в таком случае и произведение $\Delta_2\Delta_1$ двух подерных преобразований придется рассматривать как преобразование в множестве линейных элементов.

данному отображению (преобразованию) Φ. Это отображение определяется следующим образом: если Φ переводит геометрический образ α в геометрический образ α' (α и α' могут являться точками, прямыми, окружностями или иными геометрическими объектами, возможно разной природы), то Φ^{-1} переводит α' в α. Область действия обратного преобразования Φ^{-1} совпадает с областью действия преобразования Φ. Так, скажем, обратной для гомотетии с центром O и коэффициентом k, рассматриваемой как преобразование в множестве прямых плоскости, является гомотетия с тем же центром O и коэффициентом $1/k$ (также рассматриваемая как преобразование в множестве прямых); преобразование Δ^{-1}, обратное подерному преобразованию Δ с центром O, переводит улитки Паскаля в окружности и т. д.

Понятия прои ведения двух (неточечных!) преобразований и обратного преобразования позволяют определить группу таких преобразований, т. е. такую совокупность $\mathfrak{G}$ преобразований, которая: 1° содержит тождественное преобразование I; 2° наряду с каждым преобразованием Φ содержит и обратное ему преобразование Φ^{-1}; 3° наряду с каждыми двумя преобразованиями Φ и Ψ содержит и их произведение $\Psi\Phi$. Ясно, например, что образуют группу аффинные преобразования, рассматриваемые как преобразования в множестве прямых линий плоскости, или круговые преобразования, рассматриваемые как преобразования в множестве окружностей.

Более новыми для нас являются группа осевых круговых преобразований или группа касательных круговых преобразований; например, все осевые круговые преобразования образуют группу, так как 1° тождественное преобразование, рассматриваемое как преобразование в множестве направленных прямых плоскости, переводит каждую окружность в себя, т. е. является круговым; 2° если Φ есть преобразование в множестве направленных прямых, переводящее окружности в окружности (круговое преобразование), то и обратное преобразование Φ^{-1} является круговым (если Φ переводит окружность Σ в окружность Σ', то Φ^{-1} переводит Σ' в Σ); 3° если преобразования Φ и Ψ, определенные в множестве направленных прямых, переводят окружности в окружности, то и $\Psi\Phi$ переводит окружности в окружности (если Φ переводит окружность Σ в Σ_1, а Ψ—окружность Σ_1 в Σ', то $\Psi\Phi$ переводит Σ в Σ'). Частью группы осевых круговых преобразований является группа расширений, для построения которой надо определить расширение на величину нуль (тождественное преобразование) и расширение на отрицательную величину—d, сдвигающую каждую (направленную) прямую на расстояние d влево и переводящее (направленную) окружность радиуса r в концентрическую с ней окружность радиуса $r-d$ (рис. 83; ср. выше, стр. 126). При этом обратным расширению на (положительную или отрицательную!) величину d будет расширение на величину $-d$, а произведение расширений на величины d_1 и d_2 всегда будет равно расширению на величину d_1+d_2.

Понятие группы (неточечных!) преобразований очень важно потому, что оно позволяет говорить о *геометриях, основным элементом которых является не точка, а другой геометрический объект* —

прямая линия, окружность и т. д. Ясно, что приведенное в § 6 общее определение геометрии по Клейну сохраняет силу и в том случае, если под «геометрической фигурой» понимать не множество точек, а скажем, множество прямых; в этом случае и «движениями» соответствующей «геометрии» естественно назвать какие-то преобразования в множестве прямых линий плоскости. Однако независимо от того, играют ли роль «движений», совмещающих между собой «равные» фигуры, преобразования в множестве точек или какие-то неточечные преобразования, определенное с помощью этих «движений» «равенство» в том и только в том случае будет удовлетворять условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности (см. выше, стр. 102), если совокупность «движений» образует группу. Это условие очерчивает круг «неточечных» геометрий, к числу которых принадлежат линейчатая геометрия (геометрия прямых линий) и круговая геометрия (геометрия окружностей), являющиеся содержательными и хорошо изученными геометрическими дисциплинами. Ясно, что каждая «геометрия» подобного рода задается указанием группы (неточечных!) преобразований, играющих в этой «геометрии» роль «движений».

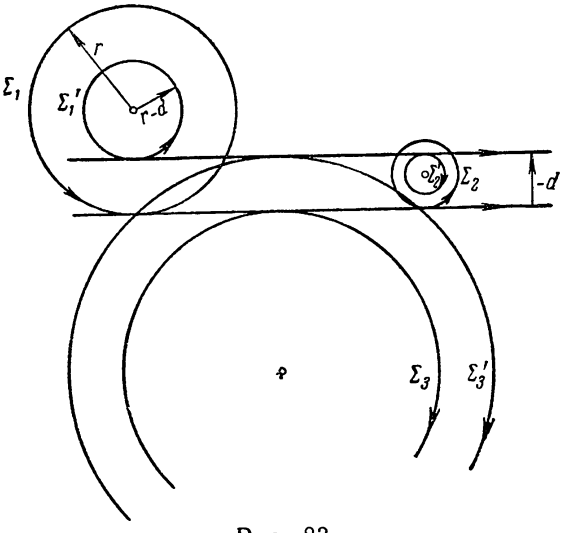


Рис. 83.

Так, основными ветвями геометрии окружностей являются в настоящее время «точечная геометрия окружностей», базирующаяся на группе точечных круговых преобразований, «осевая геометрия окружностей», в основе которой лежит группа осевых круговых преобразований, и «контактная геометрия окружностей», задаваемая группой касательных круговых преобразований [1]). При этом наша новая (более широкая!) точка зрения на геометрию приводит к необходимости несколько уточнить изложенную в предыдущем параграфе концепцию Клейна: теперь нам следует считать, что отдельные «геометрии» различаются не только группами преобразований, играющими роль «движений», но и выбором основного элемента «геометрии»: так группа аффинных преобразований может быть положена в основу «точечной аффинной геометрии» и «линейчатой аффинной геометрии»; группа (точечных) круговых преобразований — в основу «точечной аналагматической геометрии» и «круговой аналагматической геометрии» и т. д.

[1]) Этим трем геометриям посвящены три части статьи «Окружности» в этой книге ЭЭМ.

§ 9. Принцип перенесения

9.1. Введение. Вернемся теперь к определению обычной (евклидовой) геометрии по Клейну. Это определение утверждает, что движения (или движения и преобразования подобия) не меняют содержания теорем евклидовой геометрии, т. е. переводят каждый геометрический чертеж в полностью равноправный ему чертеж, из которого можно вывести лишь те же самые заключения, что и из первоначального чертежа.

Последнее обстоятельство связано с тем, что наше преобразование сохраняет неизменными все понятия и величины, имеющие геометрический смысл, — параллельные (или перпендикулярные) прямые оно переводит в параллельные (перпендикулярные) прямые, равные отрезки — в равные отрезки, сохраняет величину угла между двумя прямыми или отношения площадей двух фигур и т. д. Любое же *отличное от подобия* преобразование π уже не будет обладать этим свойством — оно исказит смысл геометрических понятий и, следовательно, преобразует исходную геометрическую теорему в какое-то совершенно новое предложение.

Это утверждение в старину часто формулировали, говоря, что каждому (отличному от подобия!) преобразованию π отвечает свой *принцип перенесения*, позволяющий преобразовывать геометрические теоремы в новые; мы здесь также воспользуемся удобным и выразительным термином: «принцип перенесения». Этот термин имеет следующий смысл. Преобразование π не сохраняет геометрических понятий, т. е. оно преобразует геометрические образы в новые, с точки зрения евклидовой геометрии отличные от исходных. Мы можем указать, как именно преобразует геометрические объекты заданное преобразование π; другими словами, мы можем составить отвечающий рассматриваемому преобразованию «словарь», содержащий «перевод» всех геометрических понятий, так сказать, на новый «язык», другими словами,— таблицу, указывающую, во что именно переводит преобразование π те или иные геометрические объекты. Этот «словарь» позволяет преобразовывать («переводить на новый язык») все геометрические теоремы: в самом деле, из любого предложения, сформулированного в терминах обыкновенной евклидовой геометрии, мы сможем получить новое предложение, заменив все входящие в исходную теорему геометрические понятия образами, в которые переводит их преобразование π. Для того чтобы пояснить это последнее утверждение, мы проиллюстрируем его на ряде достаточно разнообразных примеров; попутно мы увидим, каким богатейшим источником новых геометрических фактов и теорем могут служить геометрические преобразования.

9.2. Принцип перенесения, отвечающий сжатию к прямой. Простейшим из известных нам геометрических преобразований, отличных от преобразований подобия, является сжатие к прямой; обозначим его, скажем, Σ (§ 1, стр. 55). Это преобразование переводит точку в точку и прямую в прямую; однако окружность Ω оно переводит не в окружность, а в эллипс E, одна ось которого параллельна оси сжатия o, а вторая — перпендикулярна ей, и отношение осей которого равно коэффициенту сжатия k (рис. 84)[1]). Все такие эллипсы E гомотетичны фиксированному эллипсу E_0 с полуосями длины 1 и k, отвечающему «единичной окружности» (окружности радиуса 1) Ω_0,

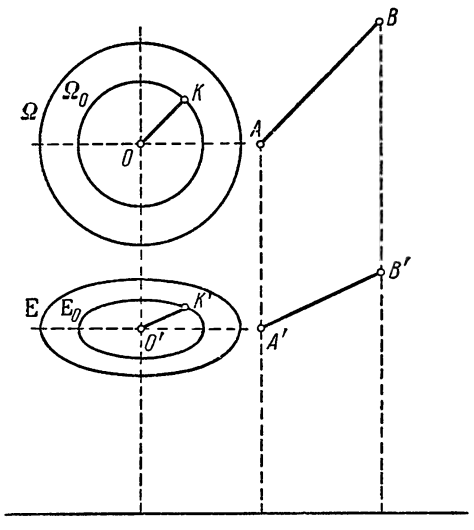


Рис. 84.

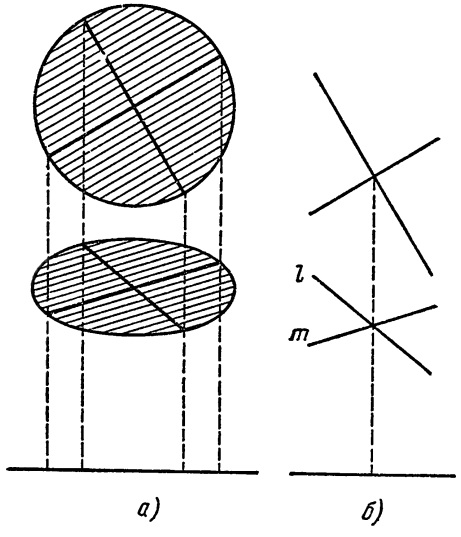


Рис. 85.

или получаются из E_0 параллельным переносом. Из того, что сжатие Σ сохраняет отношение отрезков одной прямой (см. стр. 62), следует, что отрезок AB длины d это преобразование переводит в отрезок $A'B'$ длины $d \cdot O'K'$, где $O'K'$ — параллельный $A'B'$ полудиаметр эллипса E_0. Параллельные прямые преобразование Σ переводит в параллельные (см. стр. 62); перпендикулярные же прямые Σ переводит в сопряженные относительно E прямые l и m, т. е. такие, что диаметр эллипса E, параллельный прямой l, делит пополам все хорды эллипса E, параллельные m (рис. 85; это следует из того, что каждый диаметр окружности Ω делит пополам все перпендикулярные этому диаметру хорды окружности Ω).

---

[1]) См. в кн. V ЭЭМ статью о конических сечениях.

Таким образом, преобразованию Σ отвечает следующий «словарь»:

Исходное понятие	Преобразованное понятие
Точка	Точка
Прямая	Прямая
Окружность Ω	Эллипс E
Единичная окружность Ω_0	«Единичный эллипс» E_0
Параллельные прямые	Параллельные прямые
Перпендикулярные прямые	Сопряженные относительно E прямые
Длина отрезка AB	Отношение $\frac{AB}{OK}$, где OK — параллельный AB полудиаметр E_0
Середина отрезка	Середина отрезка

который можно, разумеется, еще продолжать. Из каждой теоремы евклидовой геометрии мы можем получить новую теорему, заменив все

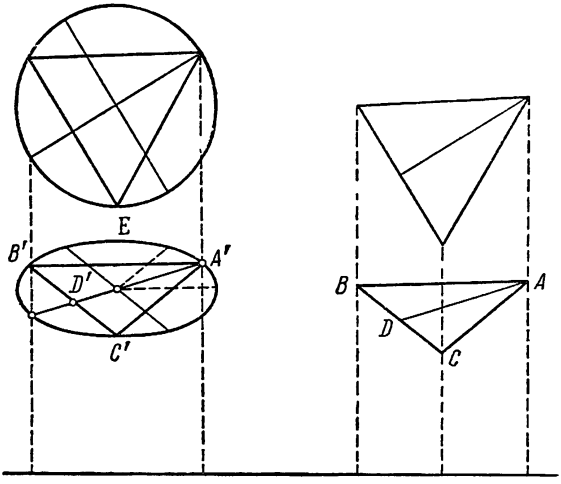


Рис. 86.

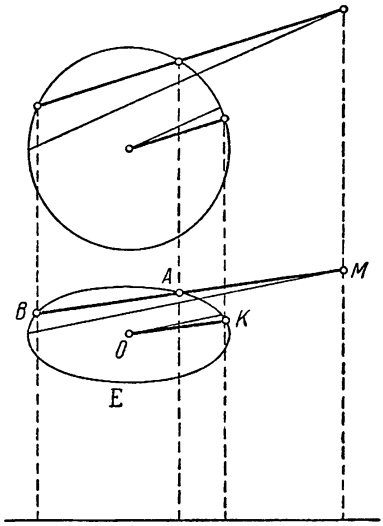


Рис. 87.

фигурирующие в исходной теореме понятия с помощью выписанного «словаря». Это утверждение и составляет содержание «принципа перенесения», отвечающего сжатию к прямой Σ.

Так из теоремы о том, что медиана равнобедренного треугольника служит одновременно и высотой, вытекает, что *если стороны AB и AC треугольника ABC пропорциональны параллельным им полудиаметрам эллипса* E, *то медиана AD треугольника сопряжена относительно* E *с основанием BC треугольника* (рис. 86). Из теоремы о степени точки относительно окружности вытекает, что *если через фиксированную точку M провести секущую MAB эллипса* E (*где A и B — точки* E), *то произведение $MA \cdot MB$*

будет пропорционально квадрату OK^2 *параллельного* MAB *полудиаметра эллипса* E, т. е. отношение $\frac{MA \cdot MB}{OK^2}$ будет одним и тем же для всех секущих (рис. 87); из определения и свойств инверсии (стр. 56 и 75) — что *преобразование* I, *сопоставляющее с каждой точкой* A *плоскости такую точку* A' *луча* OA, *что* $OA \cdot OA' = OK^2$, *где* K *есть точка пересечения прямой* OAA' *с фиксированным эллипсом* E *с центром* O, *переводит каждую не проходящую через* O *прямую плоскости в эллипс, гомотетичный* E *или получающийся из* E *параллельным переносом* (рис. 88) и т. д.

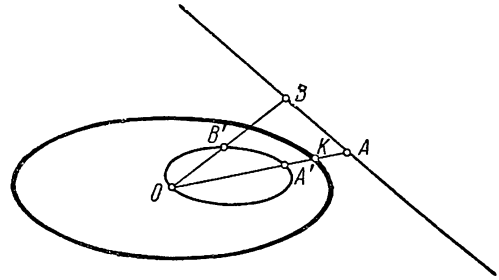


Рис. 88.

9.3. Принцип перенесения, отвечающий инверсии. В качестве второго примера естественно рассмотреть инверсию I (§ 1 стр. 56). Это преобразование переводит точку в точку и проходящую через центр O инверсии прямую в прямую; не проходящую же через O прямую l инверсия I переводит в проходящую через O окружность Ω_0, а окружность Ω_0 — обратно в прямую l; наконец, окружность Ω, не проходящую через O, преобразование I переводит в другую (может

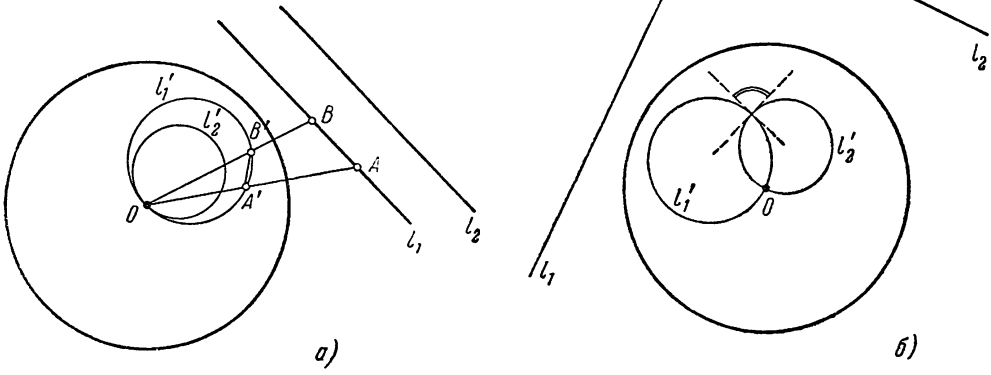


Рис. 89.

быть, ту же самую!) окружность Ω', также не проходящую через O (см. стр. 75). Параллельные прямые преобразование I переводит в две окружности (или прямую и окружность), касающиеся в точке O, т. е. не имеющие отличных от O общих точек (рис. 89, *а*); перпендикулярные же прямые преобразование I переводит в перпендикулярные окружности (прямую и окружность), поскольку I сохраняет величину

угла (рис. 89, *б*)[1]). Наконец, точки A и B, расстояние между которыми равно d, инверсия с центром O и степенью k переводит в такие точки A' и B', что

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB}, \quad \text{т. е.} \quad A'B' = d \cdot \frac{OA'}{OB}$$

(это следует из подобия изображенных на рис. 89, *а* треугольников OAB и $OB'A'$ с общим углом O и пропорциональными сторонами: $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ и, значит, $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$). А так как $OA' = \frac{k}{OA}$, то из последней формулы получаем

$$A'B' = d \cdot \frac{k}{OA \cdot OB};$$

таким образом, расстояние между преобразованными точками A' и B' пропорционально величине $\frac{AB}{OA \cdot OB}$.

Теперь мы можем выписать «словарь», отвечающий инверсии I:

Исходное понятие	Преобразованное понятие
Точка	Точка
Проходящая через O прямая	Проходящая через O прямая
Не проходящая через O прямая	Проходящая через O окружность
Проходящая через O окружность	Не проходящая через O прямая
Не проходящая через O окружность	Не проходящая через O окружность
Параллельные прямые	Касающиеся в точке O окружности (или окружность и прямая)
Перпендикулярные прямые	Перпендикулярные окружности (или окружность и прямая, или две прямые)
Угол между прямыми	Угол между окружностями (или окружностью и прямой, или двумя прямыми)
Расстояние между точками A и B	Величина $\frac{AB}{OA \cdot OB}$
Касающиеся окружности (или окружность и прямая)	Касающиеся окружности (окружность и прямая) или параллельные прямые

[1]) См. статью «Окружности», стр. 474. [Углом, образованным двумя окружностями в точке их пересечения, называется угол между их касательными в этой точке; аналогично угол между прямой и окружностью — это угол между прямой и касательной к окружности в точке ее пересечения с прямой.]

и т. д. Этот «словарь» позволяет получать из известных теорем евклидовой геометрии совершенно новые, зачастую весьма любопытные предложения.

Так, например, из известной теоремы о том, что сумма углов треугольника равна 180°, следует, что *если три окружности пересекаются в одной точке O, то сумма углов «треугольника», образованного в пересечении этих окружностей, равна* 180° (рис. 90, *а*). Из того, что углы при основании

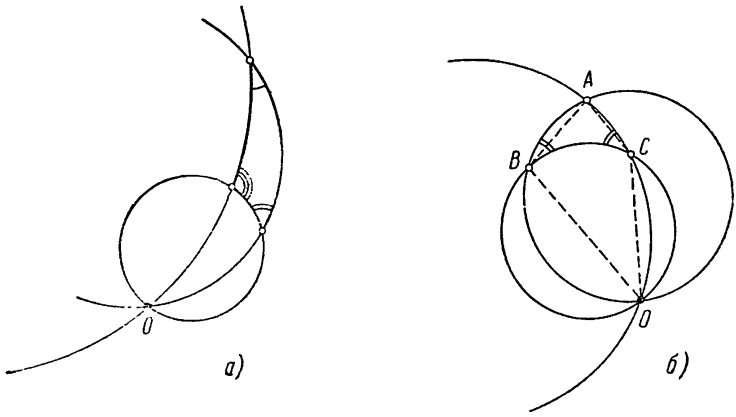


Рис. 90.

равнобедренного треугольника равны следует, что *если проходящие через одну точку D окружности пересекаются в таких трех точках A, B и C, что хорды AB и AC пропорциональны хордам OB и OC* (т. е. величины $\frac{AB}{OA\cdot OB}$ и $\frac{AC}{OA\cdot OC}$ равны), *то окружности OAB и OAC образуют одинаковые углы с окружностью OBC* (рис. 90, *б*; обратно, из равенства этих углов вытекает, что $\frac{AB}{OB}=\frac{AC}{OC}$).

Из того, что сумма двух сторон треугольника не меньше его третьей стороны, вытекает, что *для любых четырех точек A, B, C, D плоскости* (где точка *D* играет роль центра *O* инверсии)

$$\frac{AB}{DA\cdot DB}+\frac{BC}{DB\cdot DC}\geqslant\frac{AC}{DA\cdot DC},$$

или

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD.$$

Равенство в последнем соотношении будет иметь место в том и только в том случае, если точки *A*, *B* и *C* лежат на одной окружности (или прямой), проходящей через точку *D* (рис. 91, *а*; этот случай отвечает тому, что три исходные точки лежат на одной прямой); таким образом, *сумма произведений противоположных сторон вписанного в окружность четырехугольника ABCD равна произведению его диагоналей*—это важная

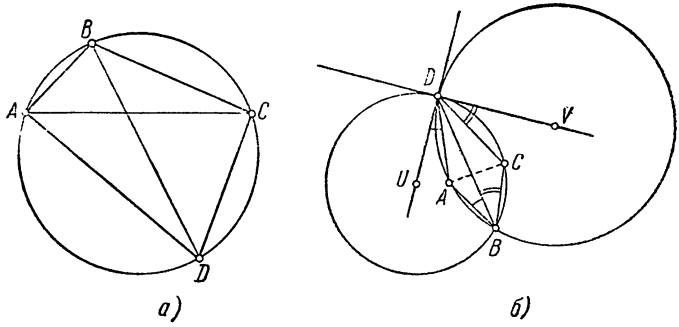
теорема элементарной геометрии, называемая теоремой Птолемея Аналогично этому из теоремы Пифагора вытекает, что *если точки A, B, C и D плоскости таковы, что окружности DAB и DBC перпендикулярны, то*

$$\left(\frac{AB}{DA\cdot DB}\right)^2+\left(\frac{BC}{DB\cdot DC}\right)^2=\left(\frac{AC}{DA\cdot DC}\right)^2,$$

или

$$AB^2\cdot CD^2+BC^2\cdot AD^2=AC^2\cdot BD^2$$

Но нетрудно видеть, что условие перпендикулярности окружностей DAB и DBC равносильно равенству 90° суммы углов B и D (или углов A и C)



а) *б)*

Рис. 91.

четырехугольника $ABCD$. В самом деле, из рис. 91, *б* видно, что

$$\angle ABD=\angle UDA,\quad \angle DBC=\angle CDV,$$

так что сумма $\angle B+\angle D=\angle UDA+\angle ADC+\angle CDV$ как раз равна углу UDV между окружностями DAB и DBC. Таким образом, последнее предложение можно сформулировать следующим образом: *если сумма противоположных углов четырехугольника ABCD равна* 90°, *то сумма квадратов произведений его противоположных сторон равна квадрату произведения диагоналей* (ср. с теоремой Птолемея, которую можно сформулировать так: *если сумма противоположных углов четырехугольника равна* 180°, *то сумма произведений его противоположных сторон равна произведению диагоналей*).

Ясно, что число примеров теорем, получаемых из теорем евклидовой геометрии при помощи «принципа перенесения», отвечающего инверсии I, можно неограниченно увеличивать.

Не представляет также труда составить «словарь», соответствующий гиперболической инверсии (§ 1, стр. 59), в котором, в частности, прямым будут отвечать гиперболы (см. стр. 75). Применение связанного с этим «словарем» принципа перенесения позволяет получить целый ряд любопытных теорем, относящихся к гиперболам.

9.4. Принцип перенесения, отвечающий полярному отображению. Каждому неточечному отображению, например полярному отображению П, также отвечает свой «принцип перенесения».

Отображение Π переводит прямую в точку и точку в прямую; параллельные прямые оно переводит в точки, лежащие на одной прямой с центром O отображения, а точки, принадлежащие проходящей через O прямой, — в параллельные прямые (рис. 92). Прямые a и b, образующие угол α, отображение Π переводит в такие точки A и B, что $\angle AOB = \alpha$ (ибо $OA \perp a$ и $OB \perp b$, так что отмеченные на рис. 92 углы имеют взаимно перпендикулярные стороны). Точки A и B, удаленные друг от друга на расстояние d, переходят в такие прямые a и b, что

$$A'B' = \frac{d}{OA \cdot OB} = d \cdot OA' \cdot OB',$$

где A' и B' — проекции точки O на прямые a и b (рис. 92; это следует из того, что точки A' и B' получаются из точек A и B

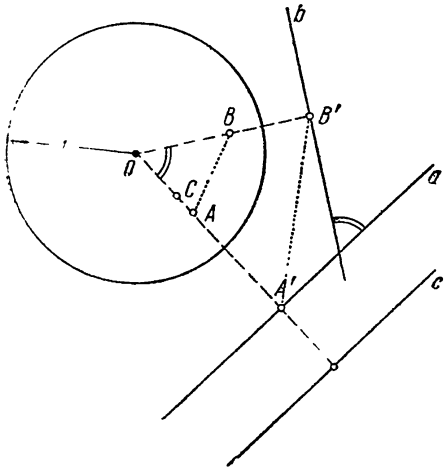


Рис. 92.

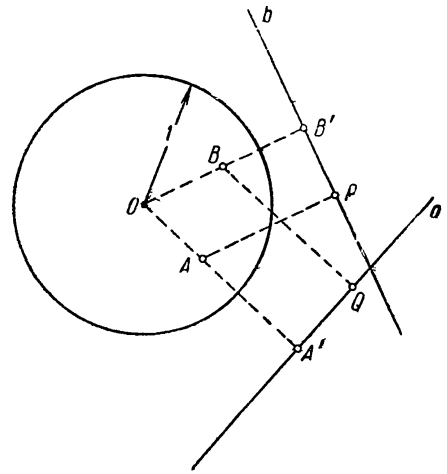


Рис. 93.

инверсией с центром O и степенью 1). Точку A и прямую b (рис. 93), обладающие тем свойством, что расстояние AP от A до b равно d, полярное отображение Π переводит в прямую a и точку B, причем расстояние BQ от B до a равно

$$d \frac{OB}{OA} = d \cdot OB \cdot OA'.$$

Для доказательства этого достаточно воспользоваться подобием изображенных на рис. 93 прямоугольных трапеций $OAPB'$ и $OBQA'$, имеющих общий угол $\angle AOB' = \angle BOA'$ и пропорциональные стороны, заключающие этот угол: $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$ и следовательно, $\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'}$; из подобия этих трапеций следует, что $\frac{OA}{AP} = \frac{OB}{BQ}$.

Остановимся еще на вопросе о том, во что переводит полярное отображение П окружность S. Ясно, что если центр окружности S совпадает с центром O отображения П, то S переходит в окружность S' с тем же центром O, радиус r которой обратен радиусу r исходной окружности $\left(r' = \frac{1}{r}\right)$; при этом если первая окружность понимается как совокупность точек, то вторая — как совокупность прямых (своих касательных), и наоборот (рис. 94). Пусть теперь центр D окружности S отличен от точки O; радиус ее по-прежнему обозначим через r. Окружность S мы будем понимать как совокупность («геометрическое место») прямых a, удаленных от точки D на расстояние r. Если d есть образ точки D при полярном отображении, то прямая a перейдет в точку A, расстояние AP которой от прямой d равно

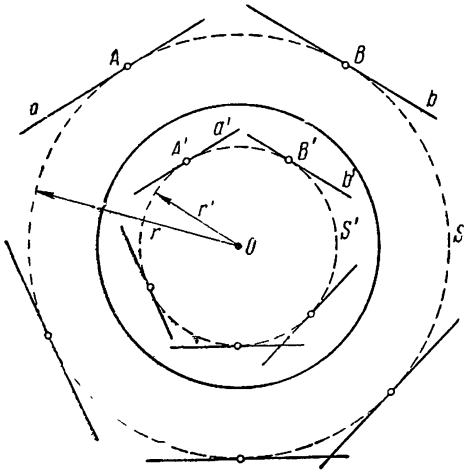


Рис. 94.

$$r \cdot \frac{OA}{OD}.$$

Таким образом, окружность S перейдет в множество всех таких точек A, что

$$\frac{AO}{AP} = \frac{OD}{r} = \text{const} \quad (\text{не зависит от } A),$$

т. е. *в множество всех точек, отношение расстояний от которых до данной точки O и до данной прямой d равно постоянной величине* $\frac{OD}{r} = \varepsilon$. Но это множество точек представляет собой коническое сечение (эллипс, параболу или гиперболу) S' с фокусом O и директрисой d; величина ε называется эксцентриситетом линии S' [1]). При этом S' будет являться эллипсом, параболой или гиперболой в зависимости от того, меньше ли расстояние OD, чем r, равно r или больше r, т. е. от того, лежит ли центр O отображения П внутри S, на окружности S или вне S (рис. 95, *а* — *в*). Обратно, каждая точка окружности S (точка, принадлежащая единственной из прямых a) переводится преобразованием П в касательную конического сечения S' (прямую, содержащую единственную точку A)

[1]) См. в кн. V ЭЭМ статью о конических сечениях.

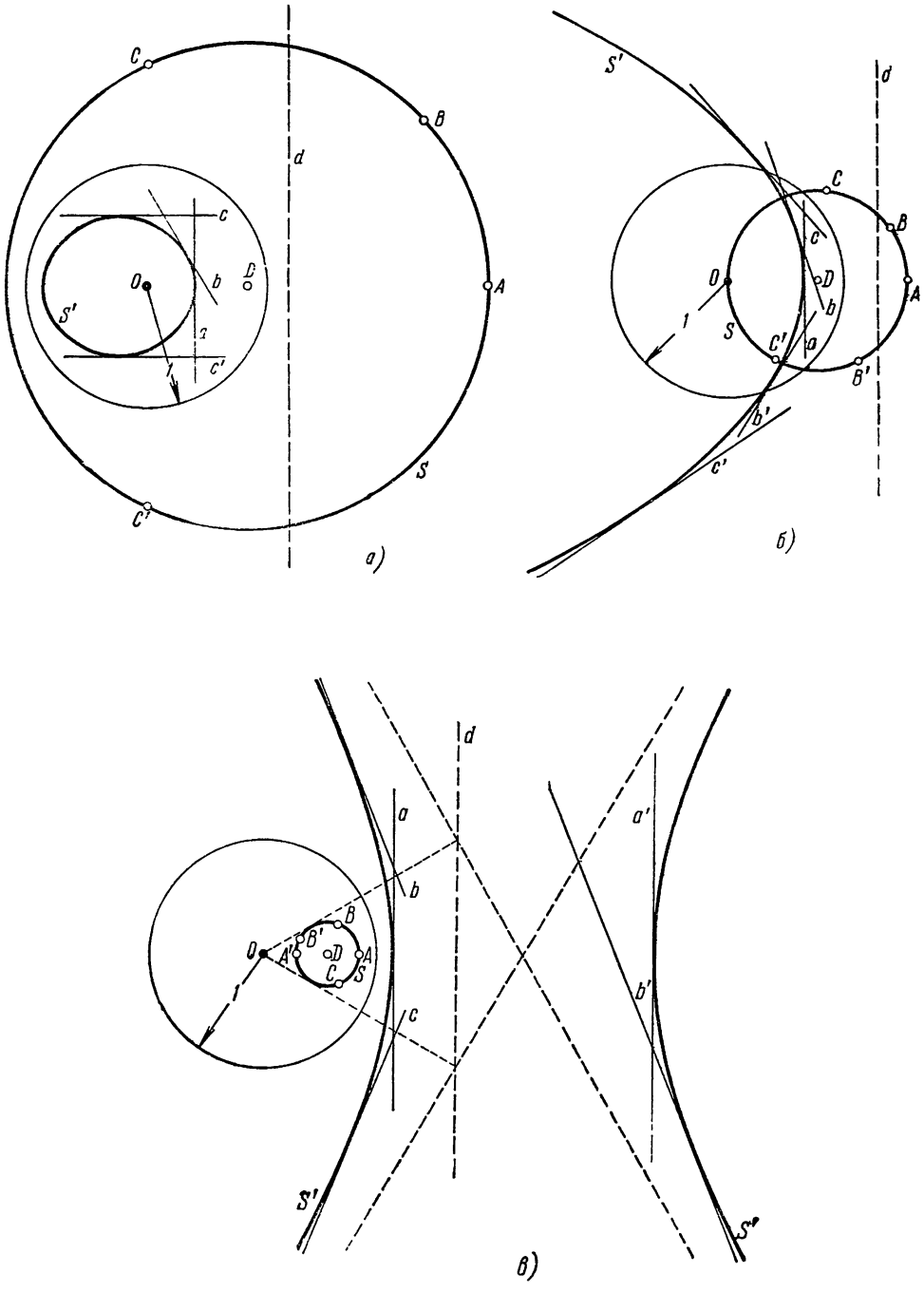


Рис. 95.

Таким образом, мы приходим к следующему «словарю»:

Исходное понятие	Преобразованное понятие
Точка A	Прямая a
Прямая a	Точка A
Точка A, лежащая на прямой b	Прямая a, проходящая через точку B
Расстояние OA от O до точки A	Величина $\frac{1}{OA'}$, обратная расстоянию OA' от O до прямой a
Параллельные прямые	Точки, принадлежащие проходящей через O прямой
Угол между прямыми a и b	Угол AOB
Расстояние между точками A и B	Величина $\frac{A'B'}{OA' \cdot OB'}$, где A' и B' — проекции точки O на прямые a и b.
Расстояние AP от точки A до прямой b	Величина $\frac{BQ}{OB \cdot OA'}$, где Q и A' — проекции точек B и A на прямую a
Окружность с центром O и радиусом r	Окружность с центром O и радиусом $\frac{1}{r}$
Окружность с отличным от O центром D и радиусом r	Коническое сечение с фокусом O, директрисой d и эксцентриситетом $\frac{OD}{r}$
Касающиеся окружность и прямая	Коническое сечение и принадлежащая ему точка
Касающиеся окружности	Касающиеся конические сечения

и т. д. Этот «словарь» позволяет составить много новых геометрических теорем, получаемых из известных теорем при помощи полярного отображения Π.

В качестве примера использования отвечающего полярному отображению Π «принципа перенесения» рассмотрим теорему о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке H. Нетрудно понять, что высоту A_1D_1 исходного треугольника $A_1B_1C_1$ полярное отображение Π переводит в такую точку M стороны BC преобразованного треугольника, что угол MOA является прямым. Поэтому теорема о точке пересечения высот переходит в следующую теорему: *если через какую-либо точку O в плоскости треугольника ABC провести*

три прямые, перпендикулярные прямым OA, OB и OC, то точки M, N и P пересечения этих прямых с соответствующими сторонами треугольника ABC принадлежат одной прямой h (рис. 96).

Можно применить еще раз полярное отображение (с новым центром Q) к полученной только что теореме; тогда она перейдет в более сложное предложение. В свою очередь и эту последнюю теорему можно преобразовать при помощи нашего «принципа перенесения» и получить новое, еще более сложное предложение. Таким образом, при помощи нашего приема из одной теоремы можно получить неограниченно много новых теорем.

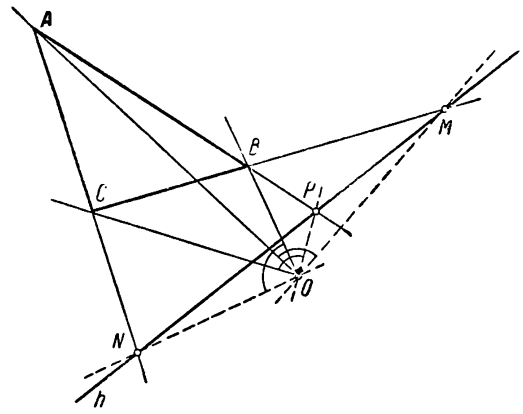


Рис. 96.

Приведем еще несколько примеров, показывающих, как преобразует наш «принцип перенесения» теоремы, трактующие о свойствах окружностей.

Начнем с теоремы о том, что *вписанный в окружность S угол ACB, опирающийся на диаметр AB,— прямой.* Если центр полярного отображения П совпадает с центром O окружности S, то «принцип перенесения» переводит эту теорему в следующую: *если a, b, c—три касательные к окружности S, причем* $a \parallel b$ (это соответствует тому, что прямая AB проходит через O), *то отрезок, высекаемый a и b на c, виден из центра O окружности под прямым углом* (рис. 97, *а*).

Если принять за центр отображения П вершину C прямого угла, то окружность S перейдет в параболу с фокусом C и директрисой o, получающейся полярным отображением из центра окружности S; точки A и B перейдут во взаимно перпендикулярные касательные a и b параболы, и мы получим теорему: *точка пересечения взаимно перпендикулярных касательных параболы принадлежит ее директрисе* (рис. 97, *б*; эту теорему можно также сформулировать следующим образом: *геометрическое место вершин описанных вокруг параболы прямых углов есть директриса параболы).* Наконец, приняв за центр отображения П произвольную точку Q плоскости, мы придем к теореме: *две касательные a и b произвольного конического сечения S', пересекающиеся на его директрисе o* (это отвечает тому, что прямая AB проходит через O), *высекают на произвольной третьей касательной с отрезок, видный из фокуса Q кривой S' под прямым углом* (рис 97, *в*).

В качестве еще одного примера рассмотрим теорему о том, что *касательная t окружности S в ее точке A перпендикулярна радиусу OA;* из нее следует, что *отрезок произвольной касательной a конического сечения* S_1, *заключенный между директрисой o и точкой касания T прямой a с* S_1, *виден из фокуса Q под прямым углом* (рис. 98). Любопытные следствия можно также получить из известной теоремы о прямой Симпсона, согласно которой *основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки P окружности S на стороны вписанного в S треугольника ABC, лежат на*

одной прямой [1]). Примем за центр полярного отображения центр O окружности S. При этом окружность S перейдет в другую окружность S_1 с тем же центром O (рис.99,а); вписанному в S треугольнику ABC будет отвечать

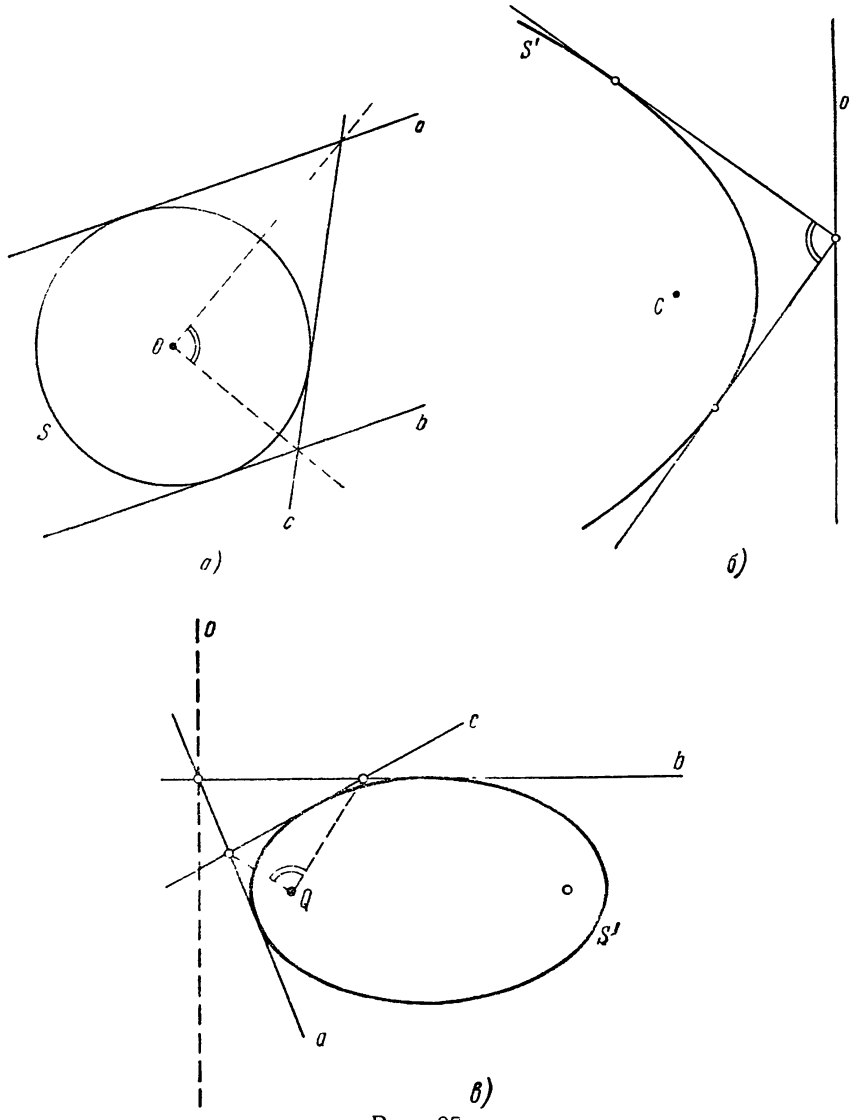


Рис. 97

описанный около S_1 треугольник $A_1B_1C_1$, а точке P окружности S — касательная p окружности S_1; основание K перпендикуляра, опущенного из P на сторону AB, перейдет в прямую C_1D, где D — такая точка касательной p,

[1]) См., например, первую часть книги Ж. Адамара, указанной в конце статьи, задачу 72.

что $\angle C_1OD = 90°$, т. е. точка пересечения p с прямой OD, параллельной биссектрисе внешнего угла при вершине C_1 (ибо OC_1 — биссектриса внутреннего угла). Окончательно мы приходим к следующей теореме: *прямые, соединяющие вершины треугольника $A_1B_1C_1$ с точками пересечения произвольной касательной p к вписанной в $A_1B_1C_1$ окружности S_1 с проведенными через центр O окружности S_1 прямыми, параллельными биссектрисам внешних углов при тех же вершинах треугольника пересекаются в одной точке* (рис. 99, *а*). Если принять за центр полярного отображения точку P, то окружности S будет соответствовать парабола S_1 с фокусом P, а вписанному в S треугольнику ABC — описанный около S_1 треугольник $A_1B_1C_1$, т. е. треугольник, сторонами которого являются касательные параболы. Основания опущенных из P на стороны BC, AC, AB перпендикуляров перейдут в перпендикулярные к PA_1, PB_1 и PC_1 прямые, проходящие через вершины треугольника (заметим, что точка P переходит в несобственную прямую). Таким образом, мы можем заключить, что *три прямые проведенные через вершины описанного около параболы S_1 треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярно прямым, соединяющим вершины A_1, B_1, C_1 с фокусом P параболы, пересекаются в одной точке R* (рис. 99, *б*; отсюда, в частности, следует, что окружность с диаметром PR проходит через точки A_1, B_1 и C_1, т. е. что *описанная вокруг $A_1B_1C_1$ окружность проходит через фокус параболы*). Наконец, приняв за центр полярного отображения произвольную точку Q, мы придем к теореме: если $A_1B_1C_1$ — *произвольный треугольник, описанный вокруг конического сечения S_1* (т. е. треугольник, стороны которого являются касательными линии S_1) *и QK, QL, QM — прямые проведенные через фокус Q кривой S_1 перпендикулярно QA_1, QB_1 и QC_1 и пересекающие произвольную четвертую касательную p конического сечения S_1 в точках K, L и M, то прямые A_1K, B_1L и C_1M пересекаются в одной точке* (рис. 99, *в*).

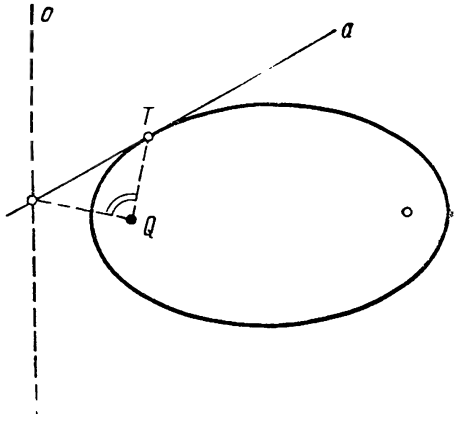


Рис 98.

Вспомним еще теорему о степени точки P относительно окружности S, согласно которой *произведение $PA \cdot PB$ отрезков любой проходящей через P прямой, пересекающей окружность, постоянно* (т. е. зависит лишь от S и от P, но не от секущей PAB). Приняв точку P за центр полярного отображения, мы преобразуем эту теорему в следующую: *произведение расстояний от фокуса P конического сечения S_1 до параллельных касательных a и b* (параллельность касательных a и b отвечает тому, что прямая AB проходит через P) *постоянно*, т. е. зависит лишь от S_1, но не от выбора касательных (рис. 100).

Иногда, обратно, свойства конических сечений позволяют доказывать новые теоремы об окружностях. В качестве примера можно упомянуть здесь о так называемых фокальных свойствах конических сечений, согласно которым *сумма (разность) расстояний от произвольной точки A_1 эллипса (гиперболы) S до двух фокусов P и Q постоянна*[1]); в силу симметричности кривой S отсюда также следует, что *сумма (разность) расстояний от фокуса P эллипса (гиперболы) до точек A_1 и B_1, касательные в которых параллельны, постоянна* (т. е. $PA_1 \pm PB_1 = PA_1 \pm QA_1 = \text{const}$; рис. 101, *а, б*).

[1]) См. в кн. V ЭЭМ статью о конических сечениях.

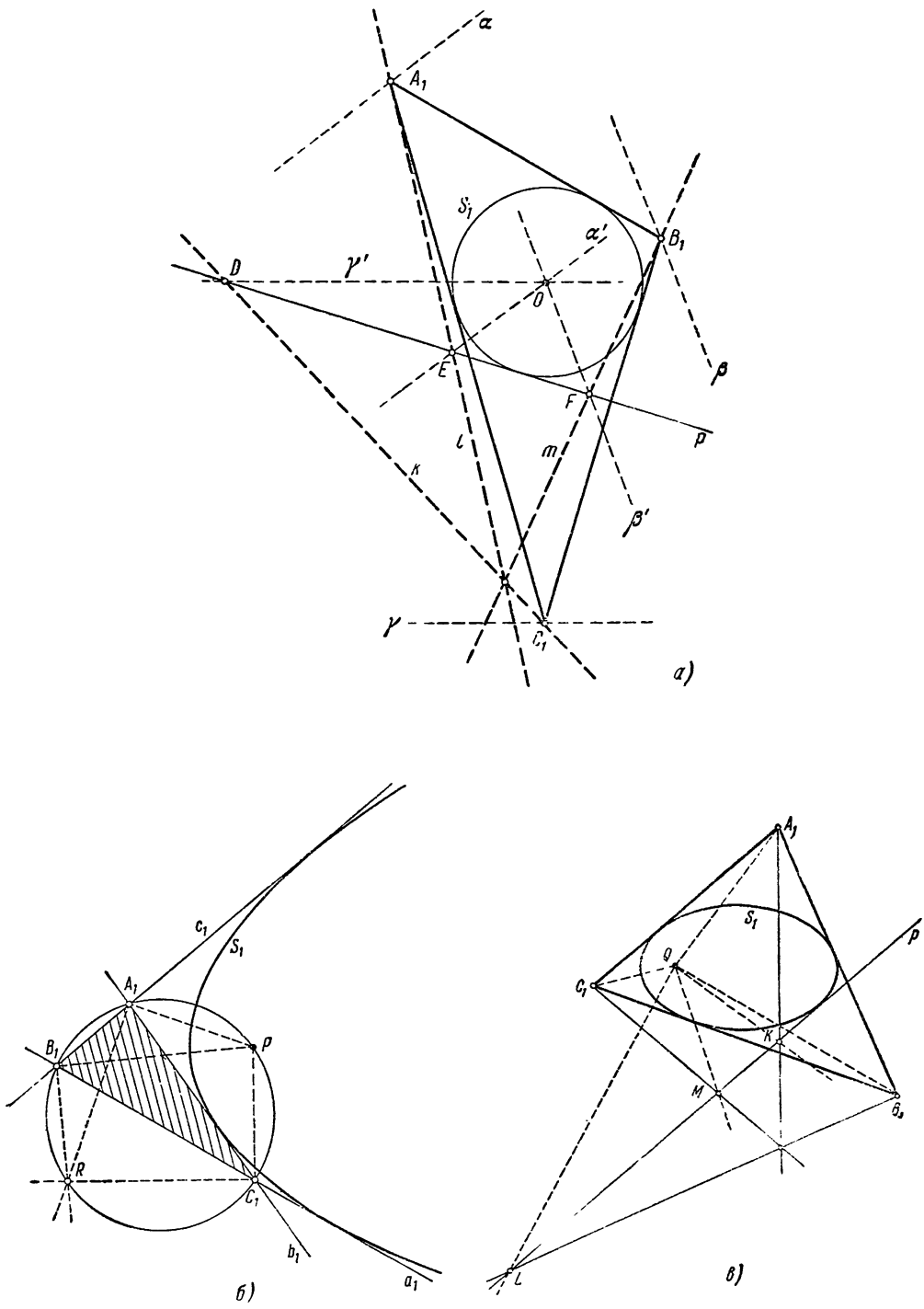

α
A1
S1
α'
B1
D
γ'
O
E
F
β
p
l
m
K
β'
γ
C1
а)
c1
S1
A1
B1
P
R
C1
b1
a1
б)
A1
S1
p
Q
C1
K
M
B1
L
в)

Рис. 99.

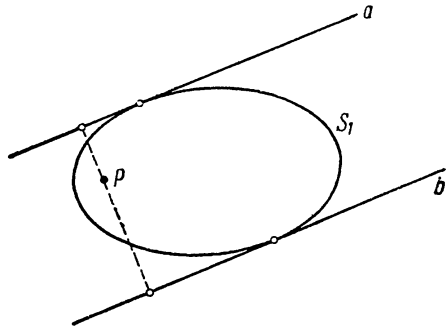
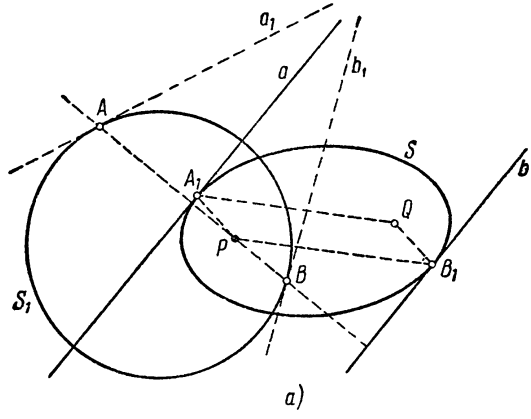
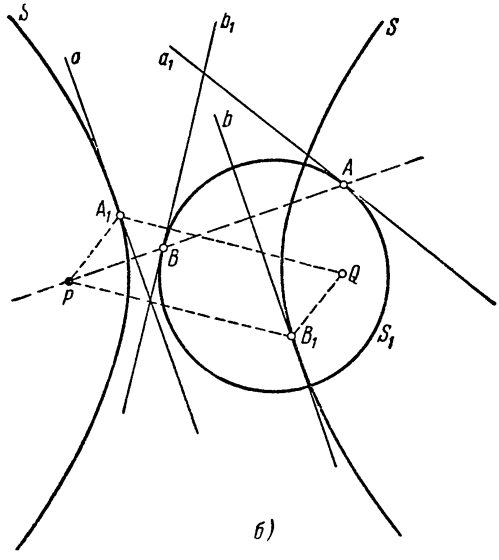


Рис. 100.



а)



б)

Рис. 101.

Переходя теперь с помощью полярного отображения с центром P от конического сечения S к окружности S_1, мы получим, что *если через внутреннюю (внешнюю) точку P окружности S_1 проводить всевозможные секущие AB, то сумма (разность) величин, обратных расстояниям точки P до касательных a_1 и b_1 к окружности S_1 в точках A и B будет постоянна.*

Читатель без труда самостоятельно отыщет много других интересных примеров использования порожденного полярным отображением П «принципа перенесения». Содержательные применения имеет также связанный с подерным преобразованием Δ «принцип перенесения», исследование которого мы полностью предоставляем читателю.

9.5. Принцип перенесения и модели геометрических систем. «Принцип перенесения» (точнее, любой из многочисленных «принципов перенесения») позволяет сопоставить с каждым геометрическим предложением другое, совершенно новое предложение. Это новое предложение может быть проще первоначального, и тогда, доказав его, мы убедимся тем самым и в справедливости исходного предложения. Но и в том случае, когда новое предложение доказывается не более просто, чем исходное, мы не остаемся в проигрыше — ведь это предложение не надо доказывать самостоятельно, и, сформулировав его, мы «даром» получим лишнюю геометрическую теорему. Однако «принцип перенесения» имеет и иное значение — он проливает дополнительный свет на самую сущность геометрии (или разных «геометрий», которых, как мы теперь знаем, существует много). В самом деле, отвечающий «принципу перенесения» «словарь» служит для «перевода на новый язык» всех геометрических фактов и теорем. Полученное при таком «переводе» предложение может весьма сильно отличаться от исходного, однако так как его истинность следует из истинности исходного предложения автоматически, надо его считать лишь иной формой того же самого предложения. Если теперь мы применим наш «принцип перенесения» ко всем геометрическим фактам и теоремам, то мы получим некоторое видоизменение знакомой нам геометрии лишь внешне от нее отличающееся, но на самом деле полностью с ней совпадающее. Мы можем, например, в обычной геометрии Евклида называть «прямыми» окружности, проходящие через фиксированную точку O, а под «расстоянием» между двумя точками A и B понимать выражение $\frac{AB}{OA \cdot OB}$ (см. «словарь» на стр. 144—145); при этом все геометрические теоремы сохраняют силу, т. е. мы будем иметь новую «модель»[1]) евклидовой геометрии. Так, по-прежнему можно будет утверждать, что, скажем, сумма квадратов катетов прямоугольного треугольника равна квадрату гипотенузы или что множество всех точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая линия, хотя все фигурирующие в этих теоремах геометрические понятия будут иметь новый, отличный от привычного нам смысл. Можно также называть «точками» прямые линии, а «пря-

[1]) О понятии модели см. статью «Аксиомы и основные понятия геометрии» (стр. 21—27 этой книги ЭЭМ).

мыми» — точки (см. «словарь» на стр. 150) — и все равно все знакомые нам геометрические теоремы сохранят свою силу, т. е. мы получим еще одну модель евклидовой геометрии. Этим подтверждается весьма важный вывод о том, что *содержание основных геометрических понятий совершенно несущественно для геометрии*, а важны лишь их свойства [1]). Именно поэтому возможно, видоизменив подходящим образом содержание основных понятий, получить новую модель исходной геометрической системы, лишь по форме отличающуюся от ранее имевшейся. При этом все подобные модели следует считать совершенно равноправными, поскольку у нас нет никаких серьезных оснований предпочесть одну из них всем остальным; в самом деле, лишь привычка заставляет нас понимать под словом прямая именно траекторию светового луча, а не иной геометрический образ [2]).

Отметим еще, что, разумеется, и для отличных от геометрии Евклида «геометрий» можно образовать много разных «принципов перенесения» и с их помощью много разных моделей. Для того чтобы прийти к какому-то подобному «принципу перенесения», достаточно лишь преобразовать все понятия этой «геометрии» при помощи произвольного преобразования π, не принадлежащего группе $\mathfrak{G}$ преобразований, играющих в этой «геометрии» роль «движений». На иллюстрациях, подтверждающих это утверждение, достаточно ясное после всего сказанного выше, мы здесь не остановимся.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Клейн, Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований («Эрлангенская программа»), перев. с нем., Сб. «Об основаниях геометрии», М., Гостехиздат, 1956, стр. 399—434.

Основополагающее сочинение знаменитого немецкого математика, в котором впервые были сформулированы принципы теоретико-группового построения геометрии.

[2] И. М. Яглом, Геометрические преобразования, тт. I—II, М., Гостехиздат, 1955—1956;

Обширное сочинение, рассчитанное на широкий круг читателей, в котором подробно рассказывается о разных типах геометрических преобразований и их применениях. В книге освещены также принципиальные вопросы, связанные с теоретико-групповым определением геометрии; содержится много задач, иллюстрирующих применения учения о геометрических преобразованиях. Первый том книги посвящен движениям и преобразованиям подобия; второй — аффинным, проективным и круговым преобразованиям.

---

[1]) Ср. стр. 20—21 этой книги ЭЭМ.

[2]) С точки зрения приложимости геометрических выводов к вопросам практической жизни может даже показаться предпочтительным называть «точкой» малый кружок, а «прямой» — узкую полосу; соответствующая «модель» обычной геометрии, получающаяся из нее расширением (ср. стр. 125 и след.), полностью равносильна общепринятой «модели».

[3] Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, чч. 1—2, М.—Л., Гостехиздат, 1948—1949.

Подробный учебник элементарной геометрии, в котором весьма тщательно изложены вопросы, связанные с движениями и преобразованиями подобия, в частности содержится исчерпывающая классификация движений и преобразований подобия. Наряду с этим в книге рассматриваются и простейшие круговые преобразования — инверсия и расширение. Первая часть книги посвящена планиметрии, а вторая — стереометрии.

[4] Ж. Адамар, Элементарная геометрия, чч. 1—2, перев. с франц., М., Учпедгиз, 1957—1958.

Подробный учебник элементарной геометрии, по охвату материала близкий к книге Д. И. Перепелкина. Среди разделов книги, касающихся геометрических преобразований, можно отметить изящное построение правильных многогранников, базирующееся на рассмотрении конечных групп вращений (см. прибавление *H* ко второй части). Первая часть книги посвящена планиметрии, а вторая — стереометрии.

[5] П. С. Александров, Введение в теорию групп, М., Учпедгиз, 1938.

Популярная книга по теории групп, в которой большое внимание уделяется группам движений.

[6] А.И Мальцев, Группы и другие алгебраические системы, в книге «Математика, ее содержание, методы и значение», т. III, М., Изд-во Академии наук СССР, 1956, стр. 248—331

Обстоятельная статья, посвященная некоторым понятиям современной алгебры. Основное место в содержании статьи занимает учение о группах, в частности о группах геометрических преобразований. В статье подробно рассматривается вопрос о дискретных группах движений, обойденный в настоящем изложении вопроса.

[7] Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. II (геометрия), перев. с нем., М.—Л., ОНТИ, 1954.

Лекции, читавшиеся Ф. Клейном для учителей немецких школ; вопросам, связанным с геометрическими преобразованиями, уделяется в них весьма большое внимание.

[8] Ф. Клейн, Высшая геометрия, перев. с нем., М.—Л., ОНТИ, 1939.

Эта книга возникла в результате обработки записей специальных курсов, читавшихся некогда Ф. Клейном в Геттингенском университете. Одна из трех частей книги имеет заголовок «Теория преобразований» и весьма широко трактует относящийся сюда круг вопросов.

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Некоторые вопросы практического использования геометрических построений . . . 160
1.1. Введение . . . 160
1.2. Инструменты для практического осуществления геометрических построений . . . 160
1.3. Точность построения . . . 164
§ 2. О решении задач на построение в зависимости от принятых инструментов . . . 167
2.1. Построения линейкой, циркулем, чертежным треугольником и транспортиром . . . 167
2.2 Построения с помощью одного циркуля (построения Мора—Маскерони) . . . 168
2.3. Построения с помощью одной линейки (построения Понселе—Штейнера) . . . 171
2.4. О построениях с помощью иных наборов инструментов . . . 175
§ 3. О построениях на ограниченном куске плоскости . . . 177
3.1. Построения с помощью линейки ограниченной длины . . . 177
3.2. Построение на ограниченном куске плоскости . . . 179
§ 4. Общие методы решения задач на построение на плоскости . . . 182
4.1. Метод расчленения условий задачи (метод «геометрических мест») . . . 182
4.2. Общая схема решения задачи на построение . . . 184
4 3. Алгебраический метод . . . 185
§ 5 Использование геометрических преобразований при решении задач на построение на плоскости . . . 189
5 1 Общие замечания . . . 189
5.2 Примеры . . . 190
§ 6 Приближенные методы геометрических построений и их значение для практики . . . 193
6.1. Точные и приближенные решения задач на построение . . . 193
6.2. Задачи на спрямление дуг окружности . . . 194
6.3. Графоаналитический метод и метод последовательных приближений . . . 197
§ 7. Геометрические построения в пространстве . . . 200
7.1. Система постулатов для построений на плоскости . . . 200
7 2. Система постулатов для «воображаемых построений» в пространстве . . . 201
7.3. Пример . . . 202
7 4. Заключение . . . 203
Литература . . . 203

§ 1. Некоторые вопросы практического использования геометрических построений

1.1. Введение. Решение задач на построение на плоскости сводится к выполнению некоторых операций с помощью чертежных инструментов. Решить задачу на построение — значит по *заданным в условии задачи элементам* (точкам, прямым, окружностям и т. д.) с помощью определенных *средств построения* (указанных в условии задачи или выбранных исполнителем) найти *искомые элементы*, удовлетворяющие сформулированным в условии задачи требованиям. Обычно эти требования указывают отношения, в которых должны находиться искомые элементы друг с другом или с заданными элементами.

Геометрические построения нашли широкое применение в чертежно-конструкторской и производственной практике. Поэтому нам представляется целесообразным, прежде чем переходить к математическому рассмотрению геометрических построений, уделить внимание некоторым вопросам, связанным с практическим использованием геометрических построений, а именно:

общим требованиям к выполнению построений,

выбору инструментов и некоторым приемам решения наиболее распространенных конструктивных задач,

вопросам точности геометрических построений.

С краткого рассмотрения указанных вопросов мы и начнем первый параграф.

1. 2. Инструменты для практического осуществления геометрических построений. Геометрические построения используются в том или ином виде почти во всех областях народного хозяйства. Выполнение разнообразных чертежей, вычерчивание графиков, применение графических методов расчетов, разметка деталей — все это требует геометрических построений.

Во многих случаях при выполнении геометрических построений на практике большое, а иногда и решающее значение для оценки их пригодности имеют простота выполнения построений и получаемая точность результата. Вследствии этого на производстве, в конструкторских бюро, всюду, где приходится иметь дело с большим числом построений, используются инструменты и приемы построений, обеспечивающие выполнение этих требований.

Так, например, широкое распространение в чертежно-конструкторской практике получила чертежная машина (рис. 1), с помощью которой проводятся параллельные и перпендикулярные прямые, строятся углы. Чертежная машина заменяет знакомый еще школьникам набор чертежных инструментов: рейсшину, линейку, чертежный треугольник, транспортир. Заметим, что при выполнении построений с помощью этого набора (с добавлением циркуля) основные построения осуществляются наиболее целесообразными приемами. Так, например, постро-

ение параллельных и перпендикулярных прямых выполняется с помощью чертежного треугольника и линейки (рис. 2, *а* и *б*); построение касательной к окружности при данной вне окружности точке, через которую проходит эта касательная, — с помощью одной линейки (рис. 3) и т. д.

Так как обычный набор инструментов (циркуль, линейка, чертежный треугольник, транспортир и даже чертежная машина) не всегда может обеспечить достаточно простое и точное решение задачи, то для более сложных построений, особенно если их приходится выполнять в большом числе, используются разнообразные специализированные инструменты и приборы.

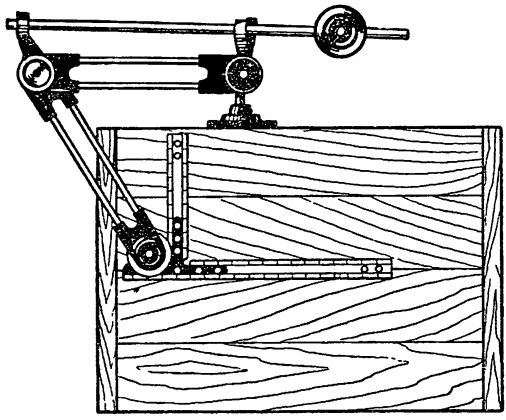


Рис. 1.

Среди них можно указать пантограф для подобного преобразования фигур, эллипсограф — для вычерчивания эллипсов по заданным осям,

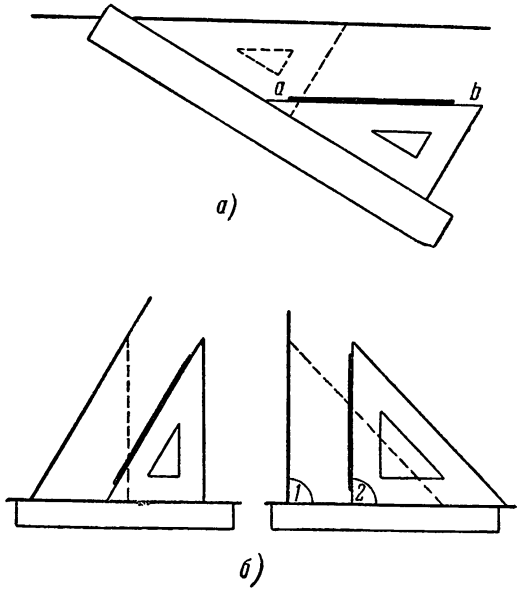


Рис. 2.

координограф — для построения параллельных и взаимно перпендикулярных прямых и нанесения точек по заданным их координатам — и другие, более специальные приборы.

Разнообразен выбор инструментов и при разметке[1]). Так, например, разметочные линии наносятся на поверхность металла (часто покрываемую специальной краской для лучшей их видимости) стальными чертилками (рис. 4); точки пересечения проведенных линий (рисок), а иногда и сами линии, намечаются керном (рис. 5).

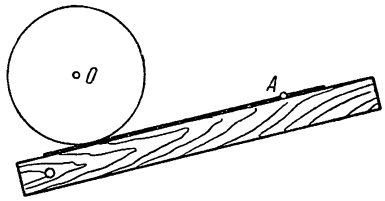


Рис. 3.

Для проведения горизонтальных линий на деталях используются специальные рейсмасы (рис. 6). Для выполнения геометрических построений и измерений используются угольники (рис. 7), линейки, штангенциркули (рис. 8) и др.

В случае необходимости выполнения построений с большой точностью применяются мерные плитки, циркули и рейсмасы

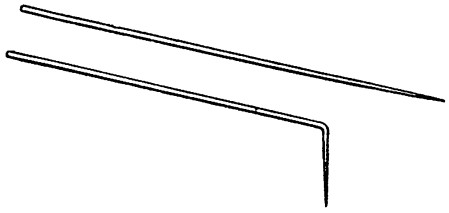


Рис. 4.

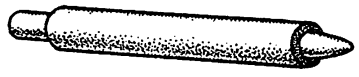


Рис. 5.

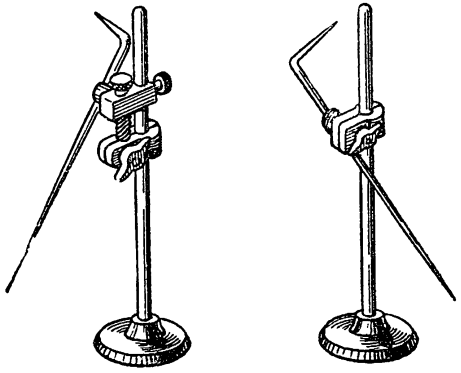


Рис. 6.

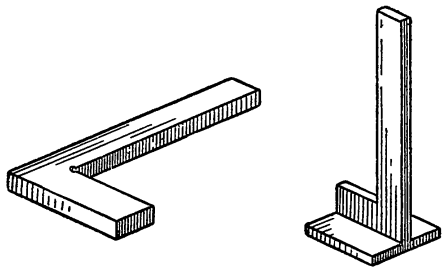


Рис. 7.

с микрометрическими винтами. При этом может быть достигнута точность откладывания и измерения отрезков порядка 0,02 *мм*.

Покажем, например, как на обработанной плоскости детали выполняются некоторые построения, применяющиеся в чертежно-конструкторской практике, в частности, построение параллельных и перпендикулярных прямых.

[1]) Разметкой называется операция нанесения на заготовку детали точек и линий, указывающих места последующей механической обработки в соответствии с данным рабочим чертежом.

Наиболее простой случай будет, если смежные плоскости (*1*, *2*, *3* на рис. 9) детали уже обработаны и составляют друг с другом прямой угол. Если деталь тонкая и края ее неровны, то разметка ведется на разметочной плите (рис. 10) или так, как указано на рис. 11. В некоторых случаях при недостаточно ровной поверхности детали параллельные и перпендикулярные прямые строятся обычными приемами с помощью циркуля и линейки.

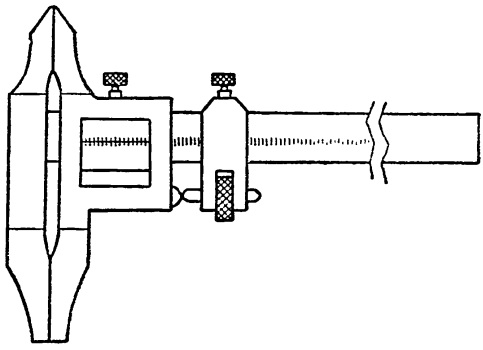


Рис. 8.

Часто при разметке употребляются также специализированные комбинированные инструменты. Например, имеется большое число приспособлений для нахождения центров отверстий и цилиндрических выступов, для построения окружностей с недоступным центром и пр.

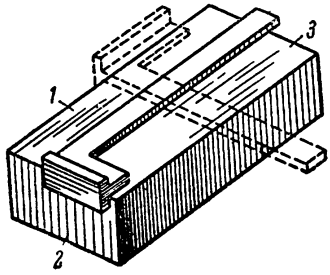


Рис. 9.

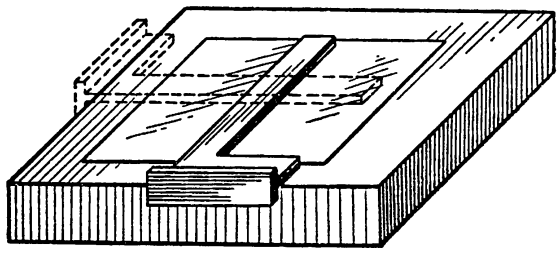


Рис. 10.

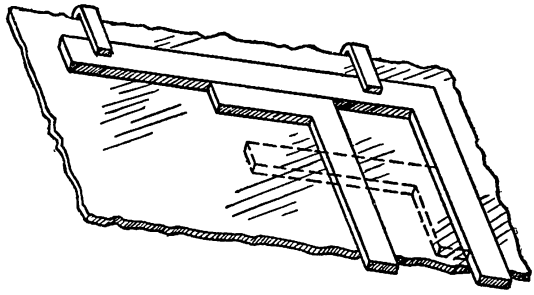


Рис. 11.

В последнее время в разметке используются оптические методы. Так, например, при выполнении разметки контуров шаблонов в судостроении вначале с большой тщательностью выполняются на чертежной бумаге

чертежи-шаблоны деталей. Затем эти чертежи фотографируются, и негативы проектируются на разметочный стол с соответствующим увеличением Разметчику остается накернить контуры детали. В этом случае точность разметки существенно зависит не только от правильного выбора масштаба увеличения и точности накернивания линии, но и от точности выполнения чертежей для фотосъемки.

1.3. Точность построения. Геометрические построения по требованиям к точности их выполнения могут быть условно разделены на две группы:

1) Геометрические построения, не требующие при их выполнении особой точности; они используются при изготовлении, например, рабочих чертежей деталей, схем узлов, станков и пр.; на этих чертежах в случае необходимости проставляются все нужные размеры.

2) Геометрические построения, к точности выполнения которых предъявляются повышенные требования. Таковы, например, построения, выполняемые при изготовлении чертежей, по которым ведется обработка деталей на оптико-шлифовальных станках, при разметке контрольных шаблонов, по которым проверяются контуры изготовленных шаблонов и пр. Большая точность построения требуется и при выполнении численного решения алгебраических или аналитических задач графическими методами.

При графическом решении задач могут встретиться случаи, когда

а) точность результата обусловливается исключительно точностью выполнения построений (например, нахождение с помощью циркуля и линейки середины данного отрезка), так как решения этих задач теоретически точные;

б) точность построения не оказывает сколь-нибудь существенного влияния на точность результата — это будет в тех случаях, когда в задаче исходные данные заданы приближенно, с точностью, меньшей той, которую дает само построение (например, графическое определение толщины угольного пласта, выполняемое при предварительной оценке его мощности);

в) точность построения существенно зависит от метода решения задачи; это важно в тех случаях, когда построение дает заведомо приближенный результат, даже если предположить, что исходные данные заданы точно и идеально точны выполняемые построения (*приближенные построения*, например построение отрезка, равного длине окружности, деление произвольного угла на три части с помощью линейки и циркуля и др.).

Рассмотрим сначала, какие причины влияют на точность построения. Вопросам приближенных построений будет посвящен отдельный параграф.

Несмотря на то, что графические методы решения задач появились достаточно давно, вопросами точности таких построений начали заниматься по существу только в последние 50 лет. Это объ-

ясняется тем, что выяснение точности графических построений ранее не требовалось так настойчиво практикой, как в настоящее время.

В результате теоретического выполнения решения задачи на построение (рассматривается случай, когда задача имеет решение и оно выполнено верно) находится фигура, удовлетворяющая всем требованиям, поставленным в условии задачи. Однако при фактическом выполнении построения полученная фигура будет, вообще говоря, отличаться от искомой вследствие неизбежных погрешностей, возникающих в процессе построения. Эти погрешности могут быть разделены на три группы:

1. *Систематические погрешности,* возникающие, например, вследствие использования приборов с неточной градуировкой, построений с помощью чертежных треугольников, у которых углы выполнены неточно.

Систематические погрешности, естественно, влияют на точность результата построения и иногда могут быть в той или иной мере учтены. Для уменьшения их влияния необходимы, например, тщательная проверка и отбор чертежных инструментов.

2. *Случайные погрешности* зависят, как видно из самого названия, от ряда случайных, трудно поддающихся анализу, но всегда в той или иной мере присутствующих причин. Их величины не могут быть точно определены, но поддаются оценке [1]).

Эти погрешности по характеру происхождения могут быть:

а) объективными погрешностями, не зависящими от исполнителя, и

б) субъективными погрешностями.

Объективные погрешности происходят по той причине, что в действительности не существует идеально точных инструментов, не существует идеально остро заточенной ножки циркуля, грифеля карандаша, идеально гладкой бумаги. Поэтому невозможно проводить на чертеже линии в математическом понимании этого слова (линии «без ширины»), вместо них получаются полосы, вообще говоря, переменной ширины (из-за неизбежного стирания грифеля), вместо точки пересечения прямых (в математическом смысле), мы получаем некоторый криволинейный четырехугольник.

Точно так же при определении точки уколом острия грифеля или ножки циркуля мы получаем вместо точки «пятно» или отверстие. При повторных уколах отверстие «разрабатывается», увеличивается в диаметре, что влияет на увеличение погрешности построения.

Кроме того, на точность построения влияют факторы субъективного характера. Влияние некоторых из них может быть уменьшено (например, точность построения увеличивается при внимательности исполнителя), но не может быть полностью исключено.

---

[1]) См. таблицу на стр. 166, заимствованную из кандидатской диссертации А. А. Миронович а «Анализ точности графических расчетов» Ленинград, 1950.

Таблица средних значений погрешностей элементарных операций

№ п. п.	Элементарные операции	Погрешность
1	Диаметр «круглой точки» при уколе ножки циркуля	0,20 *мм*
2	Диаметр «круглой точки» при уколе карандашом	0,25—0,30 *мм*
3	Средняя толщина тонкой линии	0,15 *мм*
4	Ошибка укола в данную точку	0,08 »
5	Повторные уколы (от 2 до 9) дают добавочную ошибку	0—0,25 »
6	Ошибка укола циркулем в произвольную точку прямой	0,03 »
7	Ошибка укола карандаша в произвольную точку прямой	0,05 »
8	Определение точки пересечения прямых	0,08 »
9	Ошибка проведения прямой через точку	0,08 »
10	Точность нанесения угла по транспортиру ($r \approx 100$ *мм*)	4
11	Точность проведения параллельных и перпендикулярных прямых треугольником и линейкой	16″ на 100 *мм*
12	Точность прикладывания линейки к двум точкам	0,03 *мм*
13	Точность прикладыва ия линейки к прямой	0,002 *мм*
14	Угловая точность прикладывания линейки к двум точкам	0,05:2
15	Угловая точность прикладывания линейки к прямой	0,03:1

3. Наконец, к третьей группе могут быть отнесены *промахи* и *ошибки*, ведущие к негодности результата, так как при этом получаются неверные построения.

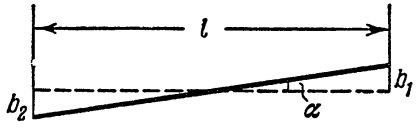


Рис. 12.

На основании анализа систематических и случайных погрешностей можно вывести некоторые элементарные требования к построениям, выполнение которых способствует повышению точности. Сформулируем некоторые из этих требований. Для увеличения точности построения необходимо проводить возможно более тонкие *линии*. Для уменьшения погрешности следует брать точки, определяющие прямую на возможно более далеком расстоянии друг от друга, так как угловая погрешность $\left(\sin\alpha \approx \frac{b_1 + b_2}{l}\right)$ уменьшается при увеличении l (рис. 12). Радиусы вспомогательных окружностей следует выбирать так, чтобы окружности пересекались под углами, возможно более близкими к прямым и т. д.

4. *Необходимо также выдерживать принцип однообразия порядка малости отрезков;* иными словами, в построении должны использоваться отрезки приблизительно одной величины [1]).

§ 2. О решении задач на построение в зависимости от принятых инструментов

2.1. Построения линейкой, циркулем, чертежным треугольником и транспортиром. Хорошо известно, что не всякая задача на построение может быть решена конструктивно; иными словами, не всякая геометрическая фигура, математически вполне определенная, может быть теоретически точно построена с помощью данного набора инструментов. Так, например, по заданному единичному отрезку не может быть построен с помощью циркуля и линейки квадрат, площадь которого равна площади круга единичного радиуса [2]). Точно так же не могут быть выполнены только с помощью этих инструментов удвоение куба (см. стр. 220), трисекция произвольного угла (стр. 221), построение треугольника по его биссектрисам (стр. 223), построение правильного семиугольника или девятиугольника (стр. 225) и т. п. Разумеется, одна и та же задача на построение может оказаться разрешимой при одном выборе набора инструментов и неразрешимой при другом.

Мы будем считать, что речь идет о построениях, выполняемых не циркулем и линейкой, как это обычно делается в работах по геометрическим построениям, а бóльшим числом инструментов — линейкой, циркулем, чертежным треугольником и транспортиром. Это расширение инструментов произведено с целью привести теоретическое рассмотрение вопроса о конструктивных элементах в большее соответствие с чертежной практикой.

Укажем теперь наиболее характерные построения, которые могут быть осуществлены при однократном использовании приведенных выше инструментов.

Циркуль. Характерная для циркуля операция заключается в помещении острия циркуля в некоторую (данную или произвольную), точку и проведения окружности (или дуги окружности) данным или произвольным радиусом; радиус может быть задан двумя точками.

Линейка. Характерная операция для чертежной линейки — прикладывание края линейки к двум точкам и проведение прямой по этому краю [3]).

---

[1]) Обычно считают, что отношение отрезков не должно превышать 20.

[2]) См. в этой книге ЭЭМ статью «О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки», стр. 226—227.

[3]) На практике линейкой пользуются также для построения касательной к данной окружности, проходящей через данную вне ее точку (см. рис. 3) и для построения общих внешних и внутренних касательных к двум окружностям.

Поэтому считают, что с помощью линейки могут быть построены прямая (или луч, или отрезок прямой), проходящая через две данные (или произвольные) точки.

Чертежный треугольник обладает всеми свойствами односторонней линейки и, следовательно, ему свойственны те же характерные операции, что и для линейки. Кроме того, характерная для треугольника операция заключается в наложении треугольника на чертеж так, чтобы одна из его сторон совместилась с данной прямой, и проведении прямой по другой стороне угла [1]).

Следовательно, с помощью чертежного треугольника могут быть выполнены те же построения, что и с помощью линейки, а также построение прямой, проходящей через данную точку и образующей с данной прямой угол, равный одному из углов чертежного треугольника.

Транспортир. Характерной операцией для транспортира является прикладывание прямолинейного края «0°—180°» транспортира к данной прямой, совмещение его нулевой отметки с данной на прямой точкой и построение точки, находящейся на луче, проходящем через нулевую отметку и образующем заданный угол с данной прямой. Применение транспортира дает возможность найти точку луча, образующего некоторый (заданный) угол с данной прямой и исходящего из данной на ней точки.

Итак, мы получили характеристику выбранных инструментов. Следует заметить, что все указанные операции могут быть также выполнены циркулем и линейкой, так что при указанном употреблении перечисленных инструментов класс разрешимых задач на построение совпадает с классом задач, разрешимых циркулем и линейкой (хотя, конечно, использование большего набора инструментов практически приводит к упрощению самих построений).

Вопрос о том, какие задачи на построение могут быть решены при помощи выбранного набора инструментов или, что то же самое, при помощи циркуля и линейки, детально обсуждается в специальной статье, помещенной в этой же книге ЭЭМ (стр. 205—227). Там же обсуждается вопрос о роли произвольных элементов в геометрических построениях.

2.2. Построения с помощью одного циркуля (построения Мора—Маскерони). Укажем теперь некоторые результаты о разрешимости задач на построение при ином выборе набора инструментов.

Здесь следует прежде всего отметить, что набор, состоящий из циркуля и линейки, эквивалентен в некотором смысле «набору», состоящему из одного только циркуля: *всякая задача на построе-*

---

[1]) На практике это построение выполняется с использованием линейки и угольника.

ние, разрешимая с помощью циркуля и линейки, разрешима также с помощью одного циркуля. Однако использование линейки позволяет фактически провести прямолинейные отрезки, содержащиеся в искомой фигуре (если задача требует нахождения этих отрезков), в то время как построения одним циркулем определяют лишь концы таких отрезков. Следовательно, включение линейки по сути дела не расширяет числа задач, которые могут быть решены с помощью одного циркуля. Это положение было впервые высказано в книге датского математика Георга Мора «Датский Евклид», 1672 г., а затем в работе итальянского инженера Лоренцо Маскерони «Геометрия циркуля», 1797 г. Иное доказательство этого же утверждения было дано в 1890 г. А. Адлером.

Для доказательства теоремы Мора — Маскерони достаточно убедиться, что с помощью одного циркуля можно определить точку пересечения двух прямых (каждая из которых задается двумя своими точками), а также точку пересечения заданных прямой и окружности. Мы воспользуемся

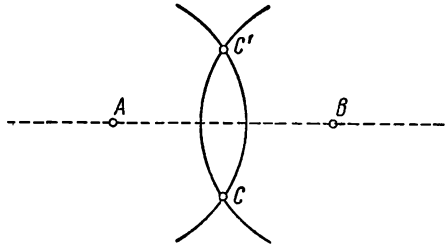


Рис. 13.

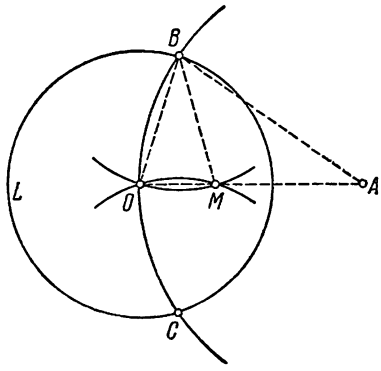


Рис. 14.

с этой целью *преобразованием инверсии* (см. стр. 56 этой книги ЭЭМ), изложив доказательство теоремы Мора—Маскерони в виде решения следующих шести задач.

Задача 1. *Даны три точки A, B, C. Найти точку C', симметричную точке C относительно прямой AB.*

Решение непосредственно получается проведением двух окружностей (рис. 13).

Задача 2. *Даны окружность L, ее центр O и произвольная точка A. Найти точку M, в которую переходит точка A при инверсии относительно окружности L.*

Решение. Проведем через точку O окружность с центром A, и пусть B и C — точки пересечения этой окружности с окружностью L (рис. 14). Далее, проведем через точку O еще две окружности с центрами B и C. Тогда точка M пересечения двух последних окружностей и будет искомой.

Доказательство правильности этого построения вытекает из того, что равнобедренные треугольники OBM и OBA с общим углом O подобны и потому

$$\frac{OB}{OM}=\frac{OA}{OB}, \quad \text{или} \quad OA\cdot OM=OB^2.$$

Задача 3. *Даны окружность L, ее центр O и две точки A, B. Найти центр окружности, в которую переходит прямая AB при инверсии относительно окружности L.*

Решение. Найдем точку C, симметричную точке O относительно прямой AB (задача 1). Тогда точка M, в которую переходит точка C при инверсии относительно окружности L (задача 2), является искомой. Для доказательства правильности построения обозначим через D основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую AB, а через E — точку пересечения прямой OD с окружностью, в которую при инверсии переходит прямая AB (рис. 15). Тогда имеем

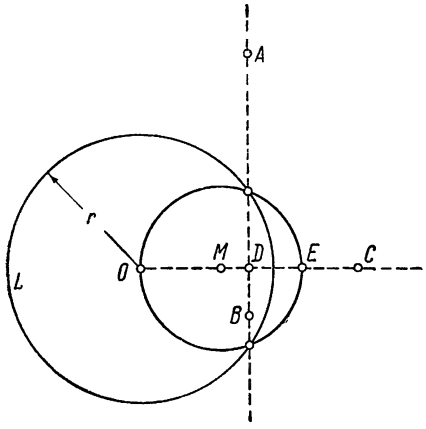


Рис. 15.

$$OM \cdot OC = OD \cdot OE \qquad (= r^2).$$

Так как, далее, $OC = 2OD$ (по определению точки C), то, очевидно, $OM = \frac{1}{2} OE$, и потому M — центр окружности (ибо OE диаметр).

Задача 4. *Даны три точки A, B, C. Найти центр окружности, проходящей через эти точки.*

Решение. Проведем произвольную окружность L с центром в точке A. Обозначим через M и N точки, в которые переходят B и C при инверсии относительно окружности L (задача 2). Тогда окружность, проходящая через точки A, B, C, перейдет при инверсии в прямую MN (рис. 16). Таким образом, нам остается найти центр окружности, в которую переходит прямая MN при инверсии относительно L (задача 3).

Задача 5. *Найти точку пересечения данной окружности L с данной прямой MN.*

Решение. Прежде всего заметим, что на основании задачи 4 мы можем считать центр окружности L неизвестным. Обозначим его через A. Найдем теперь центр O окружности, в которую переходит прямая MN при инверсии относительно окружности L (задача 4). Далее проведем окружность с центром O, проходящую через точку A (т. е. окружность, в которую при инверсии переходит прямая MN). Две точки P, Q, в которых последняя окружность пересекается с окружностью L, являются искомыми (рис. 16).

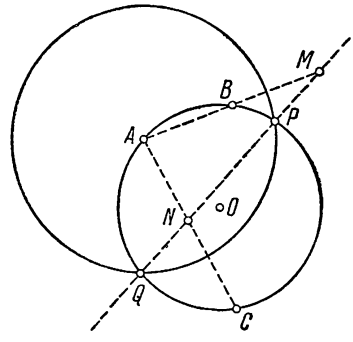


Рис. 16.

Задача 6. *Даны четыре точки A, B, C, D. Найти точку пересечения прямых AB и CD.*

Решение. Проведем произвольную окружность L с центром в точке A. При инверсии относительно окружности L прямая AB перейдет в себя, а прямая CD—в некоторую окружность L', проходящую через точку A; центр M этой окружности мы можем найти (задача 3). Найдем теперь точку P (отличную от A) пересечения окружности L' и прямой AB (задача 5). Тогда точка Q, в которую переходит P при инверсии относительно

окружности L (задача 2), является искомой точкой пересечения прямых AB и CD (рис. 17).

Очевидно, что из возможности решения задач 5 и 6 с помощью циркуля и вытекает теорема Мора — Маскерони.

2.3. Построения с помощью одной линейки (построения Понселе — Штейнера). Швейцарский геометр Якоб Штейнер, считавший наиболее точным инструментом линейку, в 1833 г. показал, что *любая задача на построение, разрешимая с помощью циркуля и линейки, может быть решена с помощью проведения только прямых линий, если только в плоскости чертежа задана окружность и ее центр.* (При этом некоторая окружность считается построенной, если найдены ее центр и радиус.) Несколько ранее эта же теорема была установлена совершенно другим методом французским математиком Ж. Понселе.

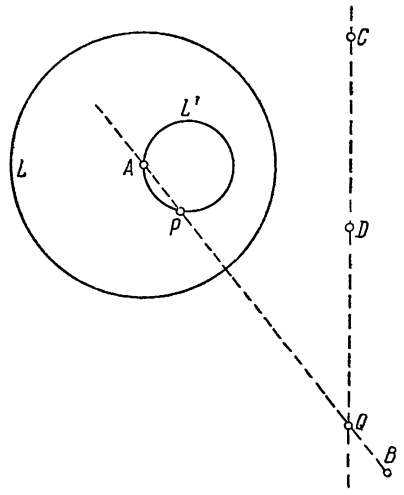


Рис. 17.

Для доказательства теоремы Понселе — Штейнера мы решим с помощью линейки следующие 9 задач на построение, считая, что в плоскости начерчена окружность L и задан ее центр O.

Задача 1. *Построить некоторый прямоугольник.*

Решение. Через точку O проведем две произвольные прямые (рис. 18). Точки A, B, C, D, в которых эти прямые пересекаются с окружностью L, являются вершинами прямоугольника.

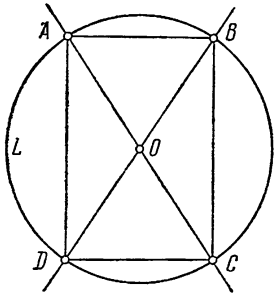


Рис. 18.

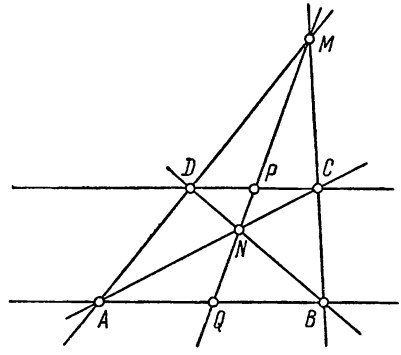


Рис. 19.

Задача 2. *Даны две параллельные прямые и две точки A, B на одной из них. Разделить отрезок AB пополам.*

Решение. Обозначим прямую, параллельную AB, через l. Возьмем на прямой l произвольную точку C, проведем прямую BC и на ней выберем произвольную точку M (рис. 19). Теперь проведем прямую AM и

обозначим через D точку пересечения этой прямой с прямой l. Наконец, проведем прямые AC и BD и обозначим через N их точку пересечения. Тогда прямая MN проходит через середину отрезка AB. Доказательство правильности этого построения легко вытекает из рассмотрения подобных треугольников (через P и Q обозначены точки пересечения прямой MN с прямыми l и AB):

$$\frac{AQ}{PC}=\frac{QN}{NP}=\frac{QB}{DP};$$
$$\frac{AQ}{DP}=\frac{QM}{PM}=\frac{QB}{PC}.$$

Почленно перемножая получающиеся равенства

$$AQ\cdot DP=PC\cdot QB,$$
$$AQ\cdot PC=DP\cdot QB$$

и производя сокращение, получаем $AQ^2=QB^2$, т. е. $AQ=QB$ [1]).

Задача 3. *Построить квадрат*

Решение. Построим прямоугольник $ABCD$, вписанный в окружность L (задача 1). Так как $AB \parallel CD$, то мы можем разделить отрезки AB и CD пополам (задача 2) Точно так же можно разделить отрезки AD и BC пополам (рис. 20). Мы получим четыре точки M, N, P, Q, являющиеся серединами сторон прямоугольника $ABCD$ Прямые MP и NQ проходят через точку O (являющуюся центром прямоугольника и центром окружности L) и параллельны сторонам прямоугольника. Следовательно, MP и NQ—две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр окружности L. Поэтому точки E, F, G, H, в которых эти прямые пересекаются с окружностью L, являются вершинами квадрата.

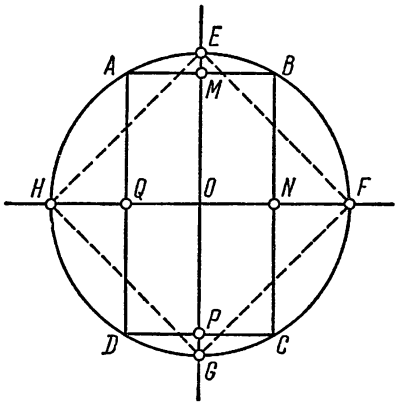


Рис. 20.

Задача 4. *Дана прямая l и точка E вне ее. Провести через точку E прямую, параллельную l.*

Решение. Построим прямоугольник $ABCD$ (задача 1) и найдем середины M, N, P, Q его сторон (задача 2). Далее, проведем прямые MP и NQ (рис. 21, *а*). Прямая l не может быть параллельна всем сторонам прямоугольника $ABCD$. Пусть сторона AB не параллельна прямой l. Тогда прямые AB, NQ и CD пересекаются с прямой l в некоторых точках R, S, T. Так как прямая NQ находится на равных расстояниях от параллельных ей прямых AB и CD, то $RS=ST$, т. е. S—середина отрезка RT.

Дальнейшее построение по сути дела представляет собой решение задачи, обратной задаче 2. Именно, проведем прямую TE (рис. 21, *б*) и на ней выберем произвольную точку U. Затем проведем прямые US, UR, ER и обозначим через G точку пересечения прямых ER и US. Наконец, проведем прямую TG и обозначим через F точку пересечения этой прямой с прямой UR. Тогда EF—искомая параллельная к прямой l.

---

[1]) Другое доказательство приведено на стр. 69 этой книги ЭЭМ.

Для доказательства правильности этого построения обозначим через F' такую точку прямой UR, что $EF' \| TR$, а через G' — точку пересечения прямых ER и TF'. Тогда прямая UG' проходит через середину отрезка TR (ср. задачу 2 и рис. 19), т. е. совпадает с прямой US. Таким образом, точка G' лежит на прямой US. Так как она, кроме того, ле-

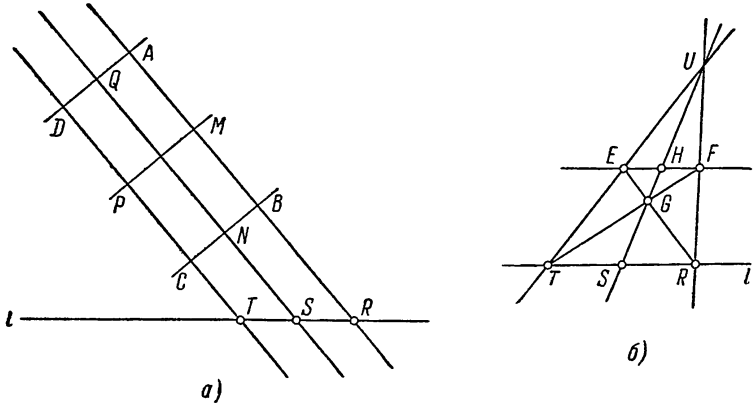


Рис. 21.

жит на прямой ER, то точка G' совпадает с точкой пересечения прямых US и ER, т. е. совпадает с точкой G. Следовательно, прямая TG' совпадает с прямой TG, и потому точка F' лежит на прямой TG. Кроме того, точка F' лежит на прямой UR. Итак, точка F' совпадает с точкой пересечения прямых TG и UR, т. е. совпадает с точкой F. Но тогда прямая EF совпадает с EF', т. е. $EF \| TR$.

Задача 5. *Даны прямая l и точка M. Провести через точку M прямую, перпендикулярную l.*

Решение. Построим квадрат $EFGH$ (задача 3). Далее через его центр O (т. е. через точку пересечения диагоналей EG и FH) проведем прямую,

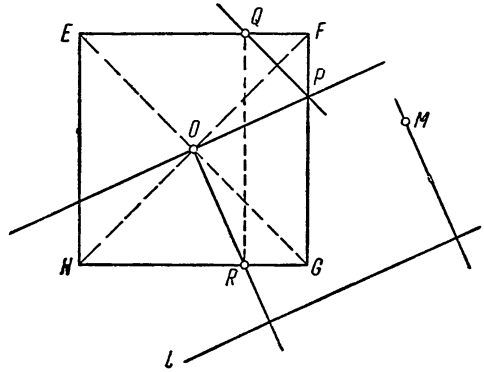


Рис. 22.

параллельную l (задача 4). Пусть P — одна из точек пересечения этой прямой с квадратом (рис. 22) Пусть, для определенности, точка P лежит на стороне FG Проведем через точку P прямую, параллельную EG (задача 4) и обозначим через Q точку пересечения этой прямой со стороной EF.

Очевидно, что $FP=FQ$. Теперь через точку Q проведем прямую, параллельную FG (задача 4) до пересечения в точке R со стороной GH. Тогда $RG=QF=FP$. Теперь из равенства треугольников OPF и ORG (по сторонам $RG=PF$, $QG=OF$ и заключенному между ними углу) вытекает, что $\angle POF=\angle ROG$, и потому $\angle ROP=\angle GOF=90°$. Итак, OR — перпендикуляр к прямой OP, а значит, и к прямой l. Остается провести через точку M прямую, параллельную OR (задача 4).

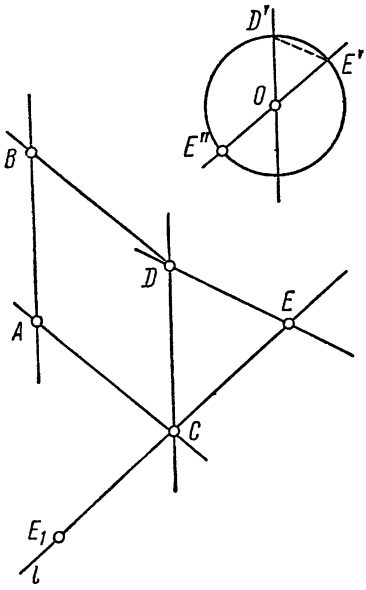


Рис. 23.

Задача 6. *Даны отрезок AB и, кроме того, прямая l и на ней точка C. Найти на прямой l такую точку E, что $CE=AB$.*

Решение. Проведем через точку B прямую, параллельную AC, а через точку C — прямую, параллельную AB (задача 4). Мы получим параллелограмм $ABDC$ (рис. 23). Теперь через центр O окружности L проведем прямые, параллельные CD и l (задача 4) и обозначим через D' и E' точки пересечения этих прямых с окружностью L. Тогда треугольник $OD'E'$ — равнобедренный. Следовательно, проведя через точку D прямую, параллельную $D'E'$ (задача 4), до пересечения в точке E с прямой l, мы получим равнобедренный треугольник CDE, и потому $CE=CD=AB$. (Заметим, что, заменив E' диаметрально противоположной точкой E'', мы получили бы на прямой l вторую точку E_1, находящуюся от C на расстоянии $CE_1=AB$.)

Задача 7. *Найти радикальную ось*[1]) *двух окружностей, если заданы их центры O_1, O_2 и радиусы r_1, r_2.*

Решение. Проведем прямую O_1O_2 и в точках O_1, O_2 восставим к этой прямой перпендикуляры (задача 5). На этих перпендикулярах отложим отрезки $O_1A=r_2$ и $O_2B=r_1$ (задача 6). Теперь проведем прямую AB (рис. 24) и разделим отрезок AB пополам (задачи 2 и 4). Наконец, через середину M отрезка AB проведем перпендикуляр к прямой AB (задача 5) до пересечения в точке D с прямой O_1O_2. Нетрудно видеть, что точка D лежит на искомой радикальной оси. Действительно, обозначив через d_1 и d_2 расстояния от точки D до O_1 и O_2, мы найдем

$$d_1^2+r_2^2=DA^2=DB_2^2=d_2^2+r_1^2,$$

т. е.

$$d_1^2-r_1^2=d_2^2-r_2^2,$$

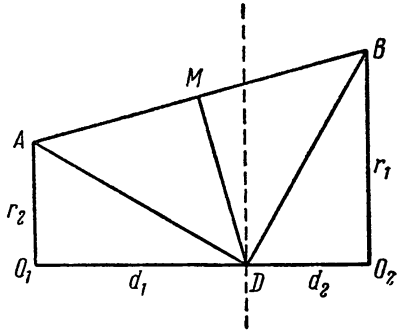


Рис. 24.

а это и означает, что точка D лежит на радикальной оси. Остается про-

[1]) Определение и свойства радикальной оси см. в статье «Окружности», стр. 455—459 этой книги ЭЭМ.

вести через точку D перпендикуляр к прямой O_1O_2 (задача 5) — это и будет искомая радикальная ось.

Задача 8. *Даны прямая l, точка M и отрезок r. Найти точки пересечения прямой l с окружностью, имеющей центр M и радиус r.*

Решение. Выберем на прямой l произвольную точку H и проведем прямую MH. На прямой MH отложим от точки M отрезок $MP=r$ (задача 6). Теперь проведем через центр O окружности L прямую, параллельную MH (задача 4) до пересечения в точке P' с окружностью L. Далее, проведем прямые MO и PP' и обозначим через A их точку пересечения (рис. 25). Точку пересечения прямых AH и OP' обозначим через H'. Наконец, проведем через точку H' прямую, параллельную l и, обозначив через B' и C' точки пересечения этой прямой с окружностью L, проведем прямые AB' и AC' до пересечения в точках B, C с прямой l. Тогда B и C — искомые точки пересечения прямой и окружности. Для доказательства правильности этого построения заметим, что из соотношений $OP' \| MP$, $B'C' \| l$ вытекает подобие ряда треугольников с общей вершиной в точке A. В частности,

$$\frac{MA}{OA}=\frac{HA}{H'A}=\frac{CA}{C'A},$$

и потому треугольники MAC и OAC' подобны. Следовательно,

$$\frac{MC}{OC'}=\frac{MA}{OA}=\frac{MP}{OP'}.$$

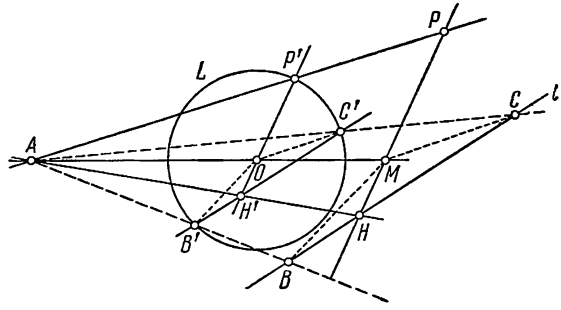


Рис. 25.

Так как $OC'=OP'$, то отсюда вытекает, что $MC=MP=r$, т. е. точка C — искомая. Аналогично устанавливается, что $MB=r$.

Задача 9. *Найти точки пересечения двух окружностей, заданных своими центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2.*

Решение. Построим радикальную ось l этих окружностей (задача 7). Если окружности пересекаются, то радикальная ось l является продолжением их общей хорды, т. е. прямая l проходит через точки пересечения окружностей. Поэтому достаточно найти точки пересечения прямой l с одной из окружностей (задача 8).

Очевидно, что из возможности решения задач 8 и 9 с помощью линейки (при условии, что в плоскости начерчена окружность L и задан ее центр O) и вытекает теорема Понселе — Штейнера.

2.4. О построениях с помощью иных наборов инструментов. В заключение этого параграфа укажем некоторые результаты, касающиеся применения других наборов инструментов.

В 1890 г. Август Адлер доказал возможность решения всех задач на построение, разрешимых циркулем и линейкой, при помощи так называемой двусторонней линейки (т. е. линейки с двумя параллельными краями), или при помощи прямого или острого угла (а следовательно, и угольника).

Таким образом, для решения всякой задачи на построение, разрешимой циркулем и линейкой, достаточно одного из следующих

инструментов: циркуль, двусторонняя линейка, прямой или острый угол, угольник. Разумеется, комбинируя те или другие из этих инструментов, можно получить решение, более простое по технике выполнения.

Существуют также наборы инструментов, с помощью которых могут быть решены и задачи более высоких степеней (неразрешимые циркулем и линейкой). Иногда для этого необходимо, чтобы в плоскости чертежа была задана некоторая фигура. Так, например, каждая задача на построение третьей и четвертой степени может быть решена с помощью циркуля и линейки, если в плоскости чертежа дано отличное от окружности коническое сечение.

Мы приведем для иллюстрации только один пример — *решение задачи трисекции угла при помощи так называемой вставки.* Пусть на рис. 26 $AB = BO = OC = OD$. Тогда $\angle BAO = \angle BOA = \alpha$; далее, угол CBO (внешний угол треугольника ABO) равен 2α; точно так же равен 2α и второй угол BCO равнобедренного треугольника OBC; наконец, угол COD (внешний угол треугольника OAC) равен $\alpha + 2\alpha = 3\alpha$ Из этого вытекает простой способ деления на три равные части произвольного угла с помощью циркуля и вставки, т. е. линейки с нанесенными на ней двумя делениями A и B. Именно из вершины O данного угла описываем радиусом, равным AB, окружность. Пусть C и D — точки пересечения этой окружности со сторонами угла $COД$ (рис. 26), который нужно разделить на три равные части. Будем теперь двигать вставку в плоскости так, чтобы точка A, отмеченная на вставке, скользила по прямой OD, а край вставки (т. е. линейки) проходил все время через точку C. Движение вставки будем производить до тех пор, пока точка B, отмеченная на вставке, не попадет на окружность. Тогда мы будем иметь расположение вставки, указанное на рис. 26, и $\angle BAO$ будет в точности равен третьей части данного угла COD.

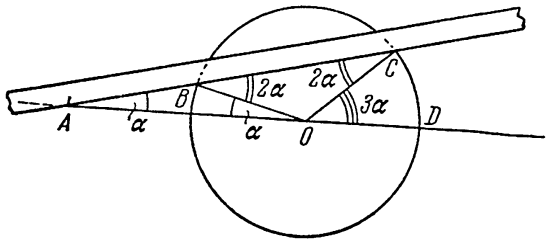


Рис. 26.

Это описание может создать впечатление, что задача деления произвольного угла на три равные части решена при помощи циркуля и линейки — ведь, имея карандаш и линейку, можно сделать на крае линейки две отметки. Однако когда идет речь о решении задачи на построение с помощью того или иного набора инструментов, то считаются указанными не физически реализованные инструменты, с помощью которых производятся построения, а лишь перечень тех «элементарных» операций, которые с помощью этих «идеаль-

ных» инструментов можно выполнять [1]). Перечисленные же на стр. 167 «элементарные» операции, осуществимые с помощью циркуля и линейки, не включают такого использования линейки, которое применено в описанном построении. Именно поэтому линейку с отмеченными на ней двумя точками мы назвали «вставкой», чтобы подчеркнуть, что этот инструмент отличен от линейки.

Как же быть с решением так называемых трансцендентных задач? Классическим примером такой задачи может служить задача о спрямлении длины окружности, т. е. о построении отрезка, длина которого равна $2\pi r$, где r — радиус окружности, а π — отношение длины окружности к диаметру, — трансцендентное число. Данная задача не может быть решена не только с помощью обычного циркуля и линейки, но и с помощью эллиптического циркуля и вообще инструмента, чертящего алгебраическую кривую [2]).

§ 3. О построениях на ограниченном куске плоскости

3.1. Построения с помощью линейки ограниченной длины. При решении задач на построение мы всегда так или иначе ограничены в применяемых средствах построения. Выше мы подробно рассмотрели вопрос о тех ограничениях, которые накладываются выбором того или другого набора «чертежных инструментов». Однако могут встречаться и ограничения совершенно другого характера

Ясно, например, что возможность неограниченного проведения прямых линий и окружностей, постулированная в классической постановке задачи о построениях «циркулем и линейкой», практически не может быть реализована, так как в нашем распоряжении всегда имеется лишь «линейка» ограниченной длины, позволяющая соединять отрезком две точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, не большем l, а также «циркуль» ограниченного раствора, позволяющий строить окружности не слишком малого и не слишком большого радиуса (т. е. окружности, радиус r которых удовлетворяет условию $a \leqslant r \leqslant b$, где a и b характеризуют возможности «циркуля» — длину его ножек и т. п.). Поэтому представляет практический интерес решение вопроса о построениях, которые можно производить «короткой» линейкой и циркулем ограниченного раствора.

---

[1]) Недаром у Евклида, от которого идет постановка вопроса о построениях циркулем и линейкой, отсутствуют даже сами слова «циркуль» и «линейка», а лишь постулируется возможность проводить прямые линии и окружности (постулаты 1—3 Евклида; см. статью «Аксиомы и основные понятия геометрии» в этой книге ЭЭМ, стр. 15).

[2]) Решение ее может быть получено только при помощи инструмента, чертящего трансцендентные кривые. В частности, для этой цели может служить прибор для вычерчивания кривых $y = \arccos x$, $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда) и др.

Остановимся здесь для примера на вопросе о возможности построений с помощью линейки ограниченной длины. Именно мы докажем, что *конструктивные возможности линейки ограниченной длины нисколько не меньше конструктивных возможностей идеальной линейки неограниченной длины.* Иначе говоря, если имеется набор инструментов, содержащий идеальную неограниченную линейку (и, возможно, еще другие инструменты, например циркуль), то, заменив в этом наборе идеальную линейку линейкой ограниченной длины l, мы получим новый набор инструментов, эквивалентный прежнему, т. е. позволяющий решать все задачи, разрешимые первоначальным набором инструментов.

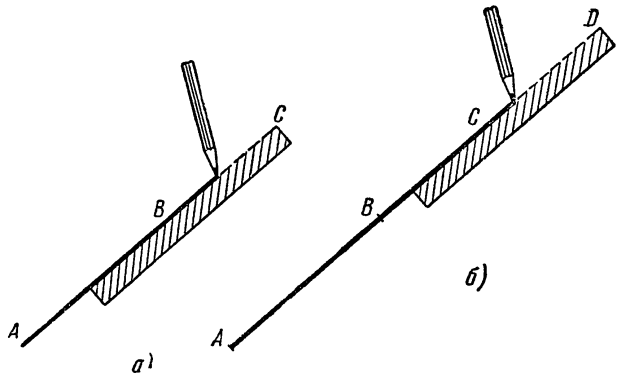


Рис. 27.

Уточним прежде всего конструктивные возможности идеальной линейки и линейки длины l. Именно мы считаем, что *идеальная линейка позволяет проводить прямую через две точки, находящиеся на произвольном (сколь угодно большом!) расстоянии друг от друга,* т. е. позволяет соединить две точки отрезком и неограниченно продолжать этот отрезок за его концы в обе стороны. Что же можно делать при помощи линейки длины l? Естественно считать, что с помощью такой линейки можно во-первых соединять отрезком две точки, расстояние между которыми не превосходит l, и, во-вторых, можно, последовательно перекладывая линейку, неограниченно продолжать любой отрезок в обе стороны (рис. 27). Объединяя обе возможности вместе, мы можем сказать, что *линейка длины l позволяет проводить прямую линию (неограниченную!) через две заданные точки, расстояние между которыми не превосходит l.*

Для того чтобы доказать, что линейка длины l эквивалентна идеальной (неограниченной) линейке, достаточно убедиться в том, что *с помощью линейки длины l можно провести прямую, соединяющую две точки A и B, расстояние между которыми больше l.* Для этого нам понадобится следующая теорема, доказательство которой читатель может найти в статье «Геометрические преобразования» (стр. 114 этой книги ЭЭМ).

Теорема. *Дан угол MAN и точка Q, не лежащая на сторонах этого угла. Через точку Q проведены три прямые, пересекающие стороны угла в точках D_1, D_2, D_3, и соответственно E_1, E_2, E_3* (рис. 28). *Обозначим через B точку пересечения прямых*

E_1D_2 и E_2D_1, а через C — точку пересечения прямых E_2D_3 и E_3D_2. Тогда точки A, B и C лежат на одной прямой.

Из этой теоремы почти непосредственно вытекает требуемое построение прямой AB. Нужно провести через точку A две прямые AM и AN, весьма «близко» (т. е. на расстоянии, значительно меньшем чем l) проходящие от точки B (напомним, что с помощью линейки длины l можно проводить отрезки сколь угодно большой длины). Далее через B проведем два отрезка, пересекающие прямые AM, AN в точках D_1, E_2 и D_2, E_1. Проведем теперь отрезки D_1E_1 и D_2E_2 и продолжим их до пересечения в точке Q (рис. 28). Проведя теперь через Q еще одну прямую, пересекающую AM и AN в точках D_3 и E_3, и проводя отрезки D_2E_3 и D_3E_2, мы найдем в пересечении этих отрезков точку C, лежащую на прямой AB. Остается соединить отрезком точки B и C и продолжить отрезок BC до точки A. Для возможности выполнения этого построения достаточно позаботиться о том, чтобы каждый из отрезков D_1E_1, D_2E_2, D_2E_3, D_3F_2 и BC имел длину, меньшую l, чего легко достичь.

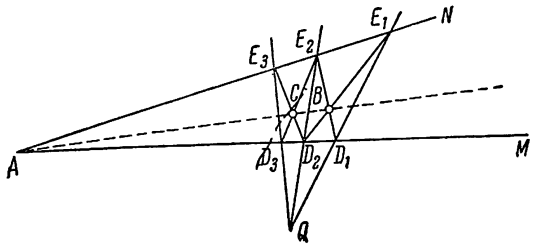


Рис. 28.

3.2. Построения на ограниченном куске плоскости. Несколько иного характера ограничения связаны с тем, что практически построения всегда приходится производить на *ограниченном куске плоскости* (скажем, на листе бумаги, на классной доске и т. п.). Эта жизненная ситуация делает интересными и нужными задачи на построение *с недоступными элементами*. Именно, мы будем считать для простоты, что задан ограниченный кусок плоскости, например прямоугольник П, внутри которого только и можно производить построения. Если внутри П заданы два прямолинейных отрезка, которые при продолжении пересекаются вне П, то точку пересечения соответствующих прямых называют *недоступной точкой*. Аналогично можно говорить о недоступной (т. е. лежащей вне П) точке пересечения прямой и окружности (окружность задается, например, некоторой своей дугой, лежащей внутри П) или двух окружностей. Можно также рассматривать *недоступные прямые* (определяемые двумя недоступными точками), окружности с недоступным центром и известным радиусом (быть может, радиус равен отрезку, соединяющему две недоступные точки), окружности, проходящие через три недоступные точки, и т. д.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. *Через данную точку B и недоступную точку A пересечения прямых l_1 и l_2 провести прямую.*

Решение легко можно получить из теоремы, приведенной на стр. 178—179. Именно достаточно повторить построение, использованное выше при проведении отрезка AB с помощью «короткой» линейки (рис. 29; ср. с рис. 28).

Можно также предложить другое решение этой задачи, основанное на использовании преобразования подобия. Именно выберем в прямоугольнике Π точку O, примем ее за центр подобия и в качестве коэффициента подобия выберем число k, значительно меньшее единицы. Совершим теперь гомотетию [1]) с центром O и коэффициентом k. При этой гомотетии прямые l_1 и l_2 перейдут в некоторые прямые l_1' и l_2' (рис. 30), а точка B — в точку B'. Если коэффициент гомотетии k достаточно мал, то прямые l_1' и l_2' пересекутся внутри прямоугольника Π в некоторой точке A'. Следовательно, прямая $A'B'$ является образом прямой AB в рассматриваемой гомотетии и, в частности, $AB \| A'B'$. Остается через точку B провести прямую, параллельную $A'B'$.

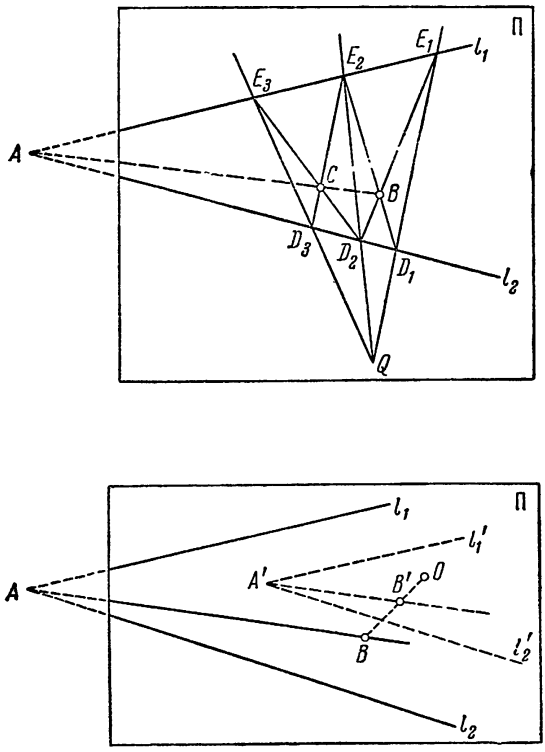


Рис. 30.

Это второе решение использует тот факт, что с помощью гомотетии с достаточно малым коэффициентом можно преобразовать чертеж (состоящий из данных точек и линий, а также тех точек и линий, которые нужно было бы провести для решения задачи) таким образом, чтобы он целиком уместился внутри прямоугольника Π, что позволяет «в уменьшенном масштабе» провести все построение. Это соображение относится, разумеется, не только к данной задаче, но и вообще к любой задаче на построение, содержащей недоступные элементы. Иначе говоря, справедливо следующее утверждение, детали доказательства которого мы предоставляем читателю [2]): *всякая за-*

[1]) Определение и свойства гомотетии см. на стр. 55 и 60—61.

[2]) См. также книгу И. М. Яглома, Геометрические преобразования, I, Гостехиздат, М., 1955, стр. 89.

дача на построение, разрешимая (циркулем и линейкой) на неограниченной плоскости, разрешима также и в том случае, если допускаются лишь построения, производимые внутри заданного прямоугольника П. (Разумеется, если, например, в задаче требуется построить некоторую точку, расположенную вне прямоугольника П, то задача считается решенной, как только указаны две прямые, проходящие через эту точку; аналогично отрезок, не умещающийся в П, построен, если, например, внутри П найдены три отрезка, для которых искомый отрезок является четвертым пропорциональным).

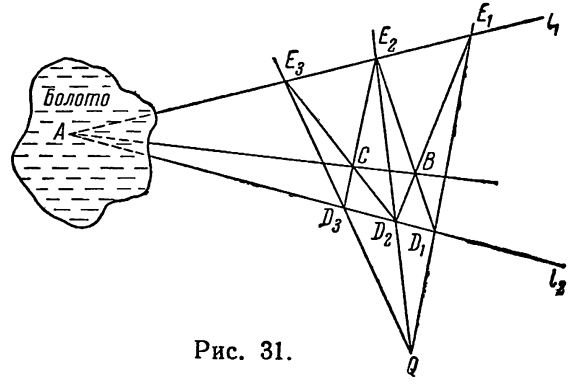


Рис. 31.

Заметим, что первое решение задачи, приведенной на стр. 179, представляет интерес для геодезии. Если точка пересечения A двух отмеченных на местности прямых l_1 и l_2 находится в недоступном месте (скажем, в болоте), то для проведения прямой через точку A и данную точку B можно использовать построение, показанное на рис. 29 (рис. 31). Оно удобно тем, что для его выполнения требуется только проведение прямых линий (что только и можно делать на больших участках местности — ведь циркуль с раствором в пару сотен метров практически изготовить невозможно!). Это замечание подчеркивает практическую ценность построений, выполняемых *на ограниченном куске плоскости с помощью одной линейки* — здесь накладываются сразу два ограничения различного характера.

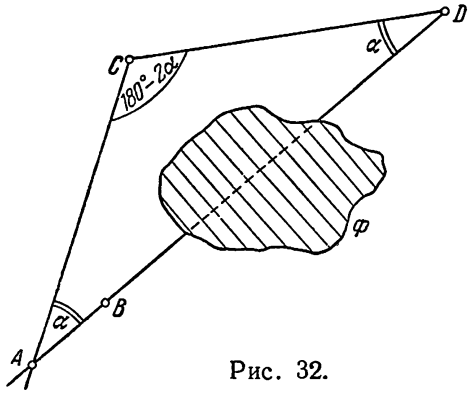


Рис. 32.

Сказанное выше делает интересными построения, выполняемые не только в прямоугольнике, но также на куске плоскости произвольной формы. Например, может потребоваться выполнить построение, не проводя никаких линий в нескольких запретных зонах (озера, болота, леса). Не рассматривая в общей форме вопрос о выполнимости построений на произвольном куске плоскости, мы ограничимся решением еще одной задачи.

Задача 2. *Даны две точки A и B, а также зона* Ф, *в которой нельзя проводить построения* (рис. 32), *причем прямая AB упирается в зону* Ф. *Найти по другую сторону зоны* Ф *продолжение прямой AB.*

Зона Ф может быть лесом, не позволяющим произвести визуальное провешивание прямой, или горой, в которой нужно пробить прямой туннель и т. д.

Р е ш е н и е. Можно воспользоваться теоремой, сформулированной на стр. 178—179 (предоставляем это сделать читателю). Можно также провести через точку A прямую, не задевающую зоны Ф и в некоторой ее точке C провести прямую под углом $180° - 2\alpha$, где через α обозначен угол BAC. Тогда, отмерив на этой прямой отрезок $CD = AC$, мы получим точку D, лежащую на продолжении отрезка AB. Разумеется, можно предложить множество иных построений.

§ 4. Общие методы решения задач на построение на плоскости

4.1. Метод расчленения условий задачи (метод «геометрических мест»). Каждая задача на построение сводится, по существу, к нахождению по данным в задаче условиям одной или нескольких т о ч е к. Например, построение треугольника (или многоугольника) сводится к нахождению его вершин; построение окружности — к нахождению ее центра и одной лежащей на окружности точки и т. д. Между тем, имеющиеся в нашем распоряжении чертежные средства (линейка, угольник, циркуль, лекала и пр.) приспособлены, как правило, для вычерчивания л и н и й. Поэтому при решении задачи на построение каждая точка (кроме непосредственно заданных) обычно определяется п е р е с е ч е н и е м д в у х л и н и й. Так, при построении треугольника ABC по трем сторонам a, b и c мы определяем вершину C как точку пересечения двух окружностей: окружности с центром A и радиусом $AC = b$ и окружности с центром B и радиусом $BC = a$; при отыскании вписанной в заданный треугольник окружности центр ее находится как точка пересечения двух биссектрис треугольника и т. д.

В соответствии с тем, что искомая точка определяется как точка пересечения двух линий, требования, налагаемые задачей на искомую точку, обычно можно расчленить на два отдельных условия; назовем их условие «μ» и условие «ν». Ни первое, ни второе из этих условий, взятое в отдельности, еще не определяет искомой точки.

Все точки, удовлетворяющие условию «μ», составляют *множество* точек, которое обозначим через M. В школьной практике это множество принято называть, в соответствии с устаревшей терминологией Аристотеля [1]), «геометрическим местом точек», удовлетворяющих условию «μ»; в дальнейшем мы будем пользоваться более современным и более коротким термином «множество». Итак, мы

---

[1]) См. стр. 17 этой книги ЭЭМ.

обозначили через M множество всех точек, удовлетворяющих условию «μ». Точно так же, рассмотрев все точки, удовлетворяющие условию «ν», мы получим некоторое другое множество точек, которое обозначим через N. Теперь нам остается только найти пересечение множеств M и N, т. е. все точки, принадлежащие одновременно обоим множествам M, N — это и будут все точки, удовлетворяющие обоим условиям «μ» и «ν».

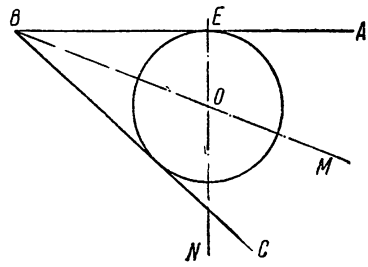


Рис. 33.

Проиллюстрируем сказанное несколькими примерами.

Задача 1. *Провести окружность, касательную к сторонам данного угла* (ABC) *и притом одной из его сторон в данной точке* (E).

Для решения задачи достаточно найти центр искомой окружности S. Так как окружность S должна касаться обеих сторон угла (условие «μ»), то центр окружности S должен лежать на биссектрисе угла ABC (рис. 33, множество M). Так как, кроме того, окружность S должна касаться стороны AB в заданной точке E (условие «ν»), то центр окружности S должен также лежать на перпендикуляре, проведенном в стороне AB угла ABC через точку E (рис. 33, множество N).

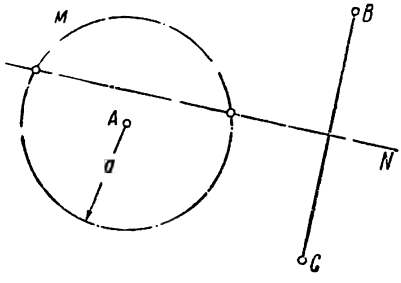


Рис. 34.

Таким образом, искомый центр O определится как точка пересечения двух прямых M и N.

Задача, как видно из сказанного выше, всегда имеет решение, и притом единственное.

Задача 2. *Пусть на плоскости заданы три точки A, B и C. Требуется найти точку, которая находилась бы на расстоянии a от точки A и на равных расстояниях от точек B и C* (рис. 34).

В этой задаче искомая точка также должна удовлетворять двум условиям. Выделим их.

Во-первых, искомая точка должна находиться на расстоянии a от точки A (условие «μ»). Множество M всех точек, удовлетворяющих этому условию, является окружностью радиуса a с центром в точке A. Во-вторых, искомая точка должна находиться на одинаковом расстоянии от точек B и C (условие «ν»). Известно, что множество всех точек, удовлетворяющих этому условию, представляет собой перпендикуляр к отрезку BC, проведенный через его середину (рис. 34, множество N).

Искомая точка должна принадлежать как первому, так и второму множеству, т. е. является точкой пересечения линий M и N. В зависимости от расположения прямой N и окружности M задача может иметь два, одно или ни одного решения.

4.2. Общая схема решения задачи на построение. Решение задачи на построение обычно содержит четыре этапа, которые мы сейчас и опишем.

1°. Анализ. Расчленение требований задачи на два отдельных условия «μ» и «ν» не всегда производится просто. В сложных задачах решение начинают с так называемого *анализа,* в результате которого устанавливаются соотношения между искомыми и заданными элементами и определяется план решения задачи.

Анализ задачи заключается в следующем. Мы предполагаем, что задача уже решена и изготовляем примерный чертеж. С помощью этого чертежа мы внимательно изучаем требования задачи. Цель анализа заключается в том, чтобы выделить два отдельных условия «μ» и «ν», определяющих искомую точку. Иногда сразу выделить эти условия не удается, и тогда нужно обнаружить цепочку точек, каждая из которых может быть построена, исходя из данных задачи и предшествующих точек; завершаться эта цепочка должна искомой точкой. Для каждой из точек этой цепочки в свою очередь ищутся два условия «μ» и «ν», определяющие ее. При проведении анализа зачастую приходится проводить на чертеже те или иные вспомогательные линии; во многих случаях именно выбор целесообразных вспомогательных линий представляет основную трудность решения задачи. В тех случаях, когда решение не требует проведения вспомогательных линий, а искомая цепочка точек (состоящая, быть может, из одной единственной точки) и условия «μ» и «ν» без труда усматриваются непосредственно, стадия анализа может быть опущена.

2°. Построение, в процессе которого в соответствии с планом решения, найденным в процессе анализа, фактически осуществляется (с помощью указанных заранее инструментов, или указанных заранее элементарных операций) нахождение искомых геометрических элементов (точек, линий или фигур).

3°. Доказательство того, что построенная фигура является искомой, т. е. что эта фигура удовлетворяет всем поставленным в условиях задачи требованиям. Стадия доказательства является строго необходимой во всех тех случаях, когда в процессе анализа мы тем или иным способом преобразовывали первоначальные условия задачи, заменяя их иными, позволяющими, осуществить построение. Задача, которую мы решаем в процессе доказательства, заключается в установлении эквивалентности этих новых условий исходным. В тех случаях, когда анализ задачи не связан с преобразованием исходных данных задачи, стадия доказательства может быть опущена.

4°. Исследование, в результате которого выясняется, в каких случаях решение задачи возможно и какое число решений задача может иметь в зависимости от заданных элементов (их числа, взаимного расположения, величин и т. д.)[1]).

Более подробно мы рассмотрим эти этапы на некоторых из приведенных ниже примеров.

4.3. Алгебраический метод. Условие задачи на построение может быть выражено аналитически, если исходить из соотношений между искомыми и данными элементами.

Пусть, например, дана задача: *построить квадрат, площадь которого в три раза больше площади данного квадрата.*

Обозначив сторону искомого квадрата через x, а сторону данного через a, получим уравнение

$$x^2 = 3a^2;$$

его решение

$$x = a\sqrt{3}$$

(отрицательное значение корня уравнения не удовлетворяет условию задачи) дает аналитическое выражение искомого отрезка.

Аналитическое выражение задачи на построение в виде уравнения, а его решения в виде корня этого уравнения помогает найти геометрическое решение, определить, с помощью каких инструментов оно может быть выполнено (иногда это сразу можно сказать по виду полученного уравнения), облегчает исследование решения[2]).

Эти соображения получили свое полное развитие в аналитической геометрии, в которой геометрические исследования осуществляются средствами алгебры.

В самом начале школьного курса геометрии выполняются построения отрезков, равных алгебраической сумме данных отрезков:

$$x = a \pm b; \quad x = a + b - c + d; \quad x = 3a \pm 2b \text{ и т. д.}$$

Позже рассматривается построение *четвертого пропорционального* к трем данным отрезкам, выражаемого формулой

$$x = \frac{bc}{a};$$

---

[1]) В качестве примера задачи, исследование которой существенно связано с числом заданных элементов, укажем известную задачу о построении n-угольника по заданным на плоскости серединам его сторон (см., например, И. М. Яглом, Геометрические преобразования, т. I, задача 13), всегда имеющую единственное решение при n нечетном и ни одного решения или бесконечно много решений при n четном.

[2]) См. статью «О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки» в этой книге ЭЭМ стр. 205—227.

построение *среднего пропорционального* двух данных отрезков:

$$x = \sqrt{ab};$$

построение формулы:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

и т. д. Именно к этим построениям во многих случаях сводится применение алгебраического метода к решению задач на построение.

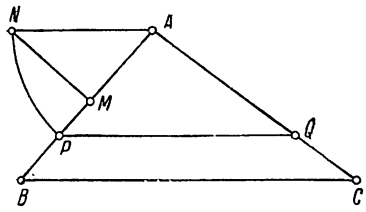


Рис. 35.

Проиллюстрируем сказанное примерами.

Задача 1. *Дан треугольник ABC. Провести прямую, параллельную его основанию и делящую пополам его площадь.*

Решение. Анализ. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 35). Предположим, что PQ — искомая прямая. Тогда в силу подобия треугольников PAQ и BAC имеем

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APQ}} = \frac{AB^2}{AP^2} = \frac{2}{1},$$

откуда

$$AP = \frac{AB}{\sqrt{2}}.$$

Это соотношение дает нам очень простое построение: делим отрезок AB пополам (точка M) и строим прямоугольный равнобедренный треугольник AMN ($\angle AMN = 90°$). Тогда гипотенуза AN последнего и даст искомый отрезок:

$$AN = \sqrt{MN^2 + MA^2} = \frac{AB}{\sqrt{2}}.$$

Откладываем от точки A отрезок $AP = AN$ и проводим $PQ \| BC$.

Доказательство правильности описанного построения в обратном порядке повторяет рассуждения, проведенные в «анализе».

Исследование тоже не представляет труда: решение, очевидно, всегда имеется, и притом единственное.

Рассмотрим теперь более сложную задачу.

Задача 2. *Даны угол LMN (меньший 180°) и точка A на его биссектрисе MP. Требуется через данную точку A провести прямую так, чтобы точки ее пересечения со сторонами данного угла определили отрезок BC данной длины a (задача Паппа).*

Анализ. Предположим, что задача решена (рис. 36). Опишем окружность около треугольника MBC. Точку пересечения биссектрисы с окружностью обозначим через D. Соединим точки B и D. Легко видеть,

что

$$\triangle BMD \backsim \triangle BAD.$$

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DM}{BD},$$

или

$$AD \cdot DM = BD^2.$$

Обозначив $MA = m$, $BD = b$, $AD = x$, получим, что для решения задачи достаточно найти отрезок x, определяемый уравнением

$$b^2 = (x + m)\, x.$$

При этом отрезок b определится как гипотенуза треугольника BDF, один из катетов которого (BF) равен $\frac{a}{2}$, а прилежащий к нему острый угол ($\angle FBD$) равен $\frac{\alpha}{2}$, где α — исходный угол LMN (рис. 36). KD — диаметр окружности; заметим, что $\frac{\alpha}{2} < 90°$, так как $\alpha < 180°$.

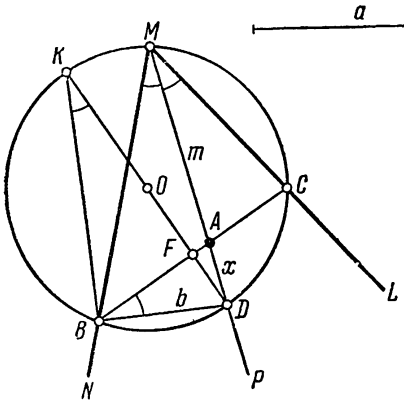


Рис. 36.

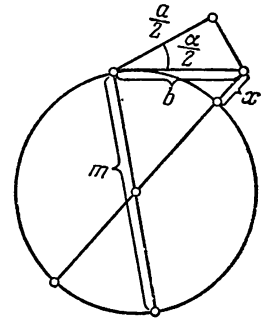


Рис. 37.

Построение. Прежде всего построим вспомогательный отрезок b. После того как отрезок b построен, строим отрезок x, пользуясь формулой

$$x\,(x + m) = b^2.$$

Очевидно, отрезок x можно рассматривать как внешнюю часть секущей, равной $x + m$, проведенной из некоторой точки к окружности диаметра m, если длина касательной, проведенной из этой же точки к этой окружности, равна b. Соответствующее построение приведено на рис. 37.

Положение искомого отрезка BC найдется теперь следующим образом. От точки A на продолжении отрезка MA откладываем отрезок AD, равный x (рис. 36), затем раствором циркуля, равным b, на прямой MN отмечаем точку B. Таким образом, $BD = b$. Точка B является одним из концов искомого отрезка BC. Вторым концом будет точка пересечения прямых BA и ML.

Доказательство опять легко вытекает из проведенного выше анализа.

Проведем исследование решения этой задачи.

Очевидно, что отрезки b и x всегда могут быть построены, и притом однозначно, при любых a, m и $\alpha < 180°$.

Решения не будет, если не будет существовать точки пересечения прямой MN и окружности радиуса b с центром в точке D, т. е. если (рис. 38)

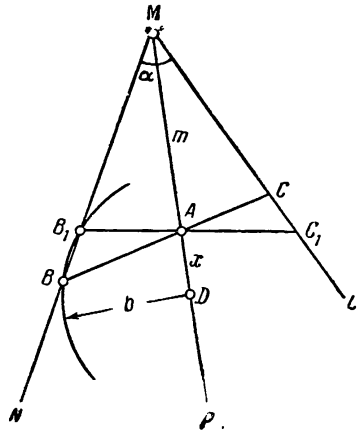


Рис. 38.

$$b < (x+m)\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (*)$$

При

$$b = (x+m)\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (**)$$

решение будет единственным (окружность радиуса b с центром в точке D касается прямой MN), а в случае

$$b > (x+m)\sin\frac{\alpha}{2} \qquad (***)$$

задача будет иметь два решения, причем отрезки BC и B_1C_1 будут, как легко видеть, симметричны относительно биссектрисы MP.

Условия (*)—(***) нетрудно преобразовать так, чтобы они содержали лишь первоначально данные величины m, a, α. Именно, поскольку $x(x+m) = b^2$, т. е.

$$\frac{x}{b} = \frac{b}{x+m},$$

то условие (*) равносильно следующему:

$$\frac{x}{b} < \sin\frac{\alpha}{2},$$

или

$$x < b\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Подставляя это неравенство в соотношение $x(x+m) = b^2$, получаем

$$b\sin\frac{\alpha}{2}\left(b\sin\frac{\alpha}{2}+m\right) > b^2,$$

или

$$m > \frac{b^2 - b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{b\sin\frac{\alpha}{2}} = b\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Наконец, так как $b = \dfrac{\frac{a}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, то окончательно имеем

$$m > \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Это условие эквивалентно соотношению (*), т. е. при его выполнении задача не имеет решений. Аналогично, задача имеет единственно решение при

$$m = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

и два симметричных решения при

$$m < \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

§ 5. Использование геометрических преобразований при решении задач на построение на плоскости

5.1. Общие замечания. В ряде случаев в процессе преобразования исходных данных задачи могут принести пользу те или иные геометрические преобразования. Наиболее часто употребляются следующие преобразования:

1) симметрия относительно оси;
2) вращение (в частности, симметрия относительно точки);
3) параллельный перенос;
4) преобразования подобия (в частности, гомотетия);
5) инверсия.

Однако в иных случаях может оказаться полезным также использование иных преобразований, например, аффинных или проективных[1]).

Следует заметить, что применение геометрических преобразований к решению задач может проводиться двумя принципиально разными путями.

Один из них заключается в применении геометрического преобразования к о в с е м у чертежу (изготовленному в процессе анализа). Благодаря преобразованию чертеж может упроститься и это облегчит решение задачи. Например, инверсия может перевести прямую в окружность или окружность в прямую, и это может оказаться существенным упрощением в решении задачи; пример такого применения инверсии читатель найдет в следующем пункте (задача 5). Аналогично могут применяться и аффинные преобразования; например, произвольный треугольник может быть с помощью аффинного преобразования превращен в равнобедренный (или даже равносторонний) треугольник, и это в ряде случаев чрезвычайно упрощает задачу. Ясно, однако, что применение д в и ж е н и й в этом плане бессмысленно, так как движение преобразует чертеж в р а в н ы й ему чертеж и никакого упрощения не произойдет.

Другой путь применения геометрических преобразований (позволяющий с успехом использовать и движения) заключается в том, что мы применяем преобразование не ко всему чертежу в целом,

[1]) По поводу определения и свойств всех упомянутых преобразований мы можем отослать читателя к помещенной в этой книге ЭЭМ статье «Геометрические преобразования».

а лишь к некоторой его части. В ряде случаев это позволяет каким-то образом сблизить заданные в условии задачи геометрические элементы, и тем самым найти нить к осуществлению требуемого построения. Примеры, иллюстрирующие такое применение преобразований, читатель также найдет в следующем пункте (задачи 1—4).

5.2. Примеры. Перейдем к рассмотрению задач, иллюстрирующих применение геометрических преобразований.

Задача 1. *Построить треугольник ABC по основанию $BC=a$, высоте $AD=h$ и разности углов при основании, равной* φ (т. е. $\angle B-\angle C=\varphi$).

Решение. В этой задаче удобно использовать симметрию относительно прямой. Предположим, что задача решена, и пусть точка B' симметрична точке B относительно прямой l, проведенной через точку A параллельно стороне BC (рис. 39). Очевидно, что $\angle 2=\angle 1=\angle B$, и потому $\angle 3=180^\circ-\angle B$. Далее, $\angle 4=\angle C$ и, следовательно, $\angle B'AC=\angle 3+\angle 4=180^\circ+\angle C-\angle B=180^\circ-\varphi$. Это и дает решение задачи. Именно возьмем на плоскости отрезок BC длины a и на расстоянии h от прямой BC проведем параллельную ей прямую l. Построим, далее, точку B', симметричную точке B относительно прямой l. Тогда точка A может быть найдена как точка пересечения прямой l и дуги окружности, стягиваемой хордой $B'C$ и вмещающей вписанный угол $180^\circ-\varphi$.

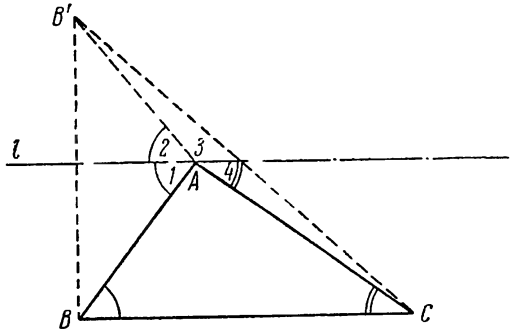


Рис. 39.

Задача всегда имеет решение (разумеется, при $|\varphi|<180^\circ$), и притом единственное.

Задача 2. *Даны две окружности S_1, S_2 и точка A. Построить равнобедренный треугольник ABC ($AB=AC$) с данным углом* φ *при вершине A так, чтобы точки B и C лежали соответственно на окружностях S_1 и S_2.*

Предположим, что задача решена (рис. 40), и повернем окружность S_1 вокруг точки A на угол φ. Она займет новое положение S_1'.

При этом вращении точка B окружности S_1 перейдет, очевидно, в точку C окружности S_2. С другой стороны, точка C должна принадлежать преобразованной окружности S_1'. Таким образом, искомая точка C является точкой пересечения окружностей S_2 и S_1'. Таким образом, для решения задачи достаточно построить окружность S_1'

(для нахождения ее центра нужно построить равнобедренный треугольник $AO_1'O_1$ с углом φ при вершине A) и найти точки ее пересечения с окружностью S.

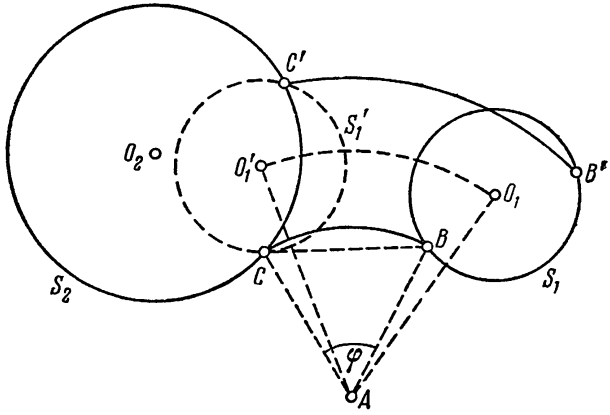


Рис. 40.

Так как две различные окружности могут иметь две, одну или ни одной общей точки и так как окружность S_1 можно в любую сторону (по или против часовой стрелки) поворачивать на угол φ, то задача может иметь до четырех решений. В случае равенства окружностей S_1 и S_2 задача может иметь и бесчисленное множество решений (если S_1' совпадает с S_2).

Задача 3. *Даны окружность S, две ее точки A, B и прямая l. На данной окружности S найти такую точку C, чтобы прямые AC и BC отсекали на прямой l отрезок PQ данной длины m.*

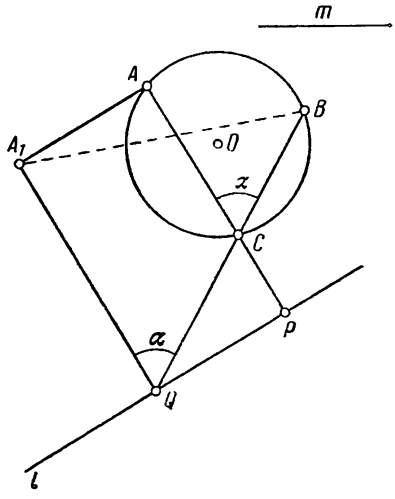


Рис. 41.

Анализ. Предположим, что задача решена и точка C — искомая (рис. 41). Перенесем параллельно точку A в направлении прямой l на отрезок m. Полученную точку A_1 соединим с точкой Q. Тогда AA_1QP — параллелограмм (ибо $AA_1 = QP$, $AA_1 \parallel QP$) и, следовательно, $\angle A_1QB = \angle ACB = \alpha$, где α — вписанный в окружность S угол, опирающийся на хорду AB.

Отсюда получаем такое

Построение. Перенесем точку A параллельно данной прямой l на отрезок, равный m. Полученную точку обозначим через A_1. На

отрезке A_1B строим сегмент, вмещающий известный из условия угол α. Точку пересечения дуги сегмента с данной прямой обозначим через Q. Точку C мы теперь найдем в пересечении окружности S и прямой BQ.

Предоставляя самим читателям провести доказательство и исследование, укажем лишь, что в зависимости от величины и

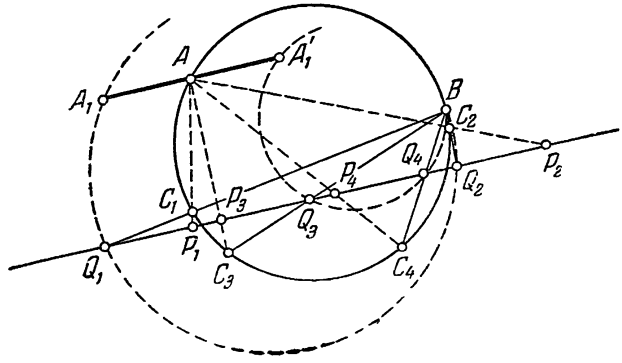


Рис. 42.

взаимного положения заданных элементов задача может иметь до четырех решений (ибо параллельный перенос точки A на отрезок m можно совершить в двух направлениях; см. рис. 42).

Задача 4. *Даны точка A и две пересекающиеся прямые f и g. Через данную точку A провести секущую так, чтобы отрезки ее AF и AG, заключенные между точкой A и точками пересечения секущей с данными прямыми имели данное отношение k:* $\frac{AG}{AF} = k$.

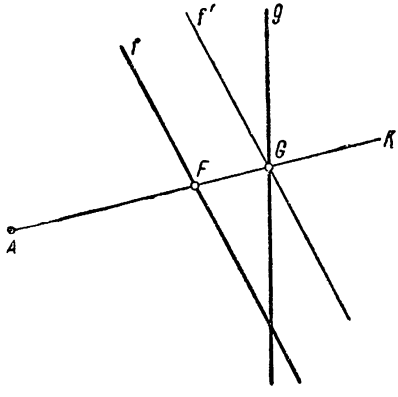


Рис. 43.

Предположим, что прямая AG (рис. 43) дает решение задачи, т. е.

$$\frac{AG}{AF} = k.$$

Применим к прямой f преобразование гомотетии с центром A и коэффициентом k. Прямая f перейдет в прямую f' и точке F будет соответствовать точка G (рис. 43). Точка G принадлежит одновременно прямым f' и g; следовательно, она является их точкой пересечения. Отсюда легко получаем необходимое построение. Если прямые f и g непараллельны, то задача имеет единственное решение. Если же $f \parallel g$, то задача либо не имеет ни одного решения (f' не совпадает с g), либо имеет бесконечно много решений (f' совпадает с g).

Задача 5. *Построить окружность, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной прямой l* (рис. 44).

Анализ. Для решения этой задачи, очевидно, достаточно найти точку касания искомой окружности и данной прямой.

Пусть окружность S (рис. 44) — искомая. Обозначим через C точку касания окружности S с прямой l. Произведем преобразование инверсии [1]), приняв за центр инверсии одну из данных точек, например B, а радиус окружности инверсии возьмем равным AB.

При этой инверсии прямая l перейдет в окружность L, проходящую через центр B инверсии, а окружность S — в некоторую прямую m, проходящую через точку A (точка A переходит в себя при инверсии) и касающуюся окружности L в точке C_1, в которую переходит при инверсии точка C.

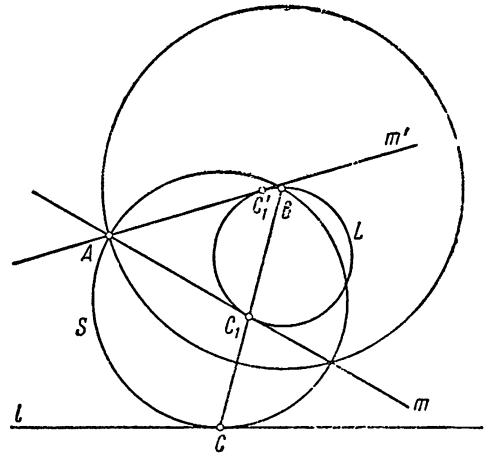


Рис. 44.

Построение. Проведя из точки A касательную m к окружности L, получим точку касания C_1. Прямая BC_1 пересекает данную прямую l в искомой точке C.

Доказательство правильности построения непосредственно вытекает из проведенного анализа.

Исследование. В зависимости от расположения точки A и окружности L задача может иметь два, одно или ни одного решения.

§ 6. Приближенные методы геометрических построений и их значение для практики.

6.1. Точные и приближенные решения задач на построение. Наряду с теоретически точными решениями задачи в теории задач на построение рассматриваются и *приближенные* решения.

Приближенным решением задачи называется результат выполнения некоторого построения, который мы принимаем за искомое решение, сознательно допуская при этом некоторую погрешность. Само построение в этом случае называется приближенным.

Приближенные построения давно уже применяются при выполнении самых разнообразных графических работ, в том числе и расчетных.

---

[1]) Определение и свойства инверсии см. в статье «Окружности», стр. 468—474 этой книги ЭЭМ.

Объясняется это тем, что замена теоретически точных построений приближенными во многих случаях значительно упрощает техническую сторону работы, обеспечивая вместе с тем удовлетворительную для практики точность, что особенно важно в тех случаях, когда требования к практической точности невелики.

Часто приближенные построения используются при решении конструктивных задач, которые не могут быть точно разрешены при помощи имеющегося в распоряжении исполнителя набора инструментов.

Приближенными графическими способами решаются многие виды уравнений, для которых точное аналитическое решение или не может быть получено или его получение сопряжено с большими трудностями вычислительного характера.

В случае приближенного построения на суммарную погрешность фактически выполненного построения влияют не только неизбежные погрешности элементарных операций, но и погрешность выбранного способа приближенного решения задачи. Поэтому для выяснения целесообразности применения того или иного приема приближенного решения задачи необходимо оценить его теоретическую точность.

Теоретически приближенно решить задачу на построение можно *с любой степенью точности.* Это вытекает, например, из следующей теоремы, которую мы здесь приводим без доказательства:

Если среди заданных элементов имеются по крайней мере две различные точки, то точки, которые могут быть построены исходя из данных с помощью одного только циркуля, образуют на плоскости счетное всюду плотное множество.

Отсюда следует, что если искомое точное решение состоит в определении положения некоторой точки M (или совокупности точек) по заданным элементам, среди которых имеется по крайней мере две различные точки, то с помощью одного циркуля (и тем более с помощью циркуля, линейки и других инструментов) можно построить точку M_k, *либо совпадающую с* M, *либо как угодно близкую к ней.*

Однако практическое нахождение удобных приближенных приемов решения задач на построение иногда бывает довольно трудным.

В качестве примеров рассмотрим задачи на спрямление дуг окружностей (построение отрезка, длина которого равна длине данной дуги). Такие задачи часто встречаются в инженерной графике.

6.2. Задачи на спрямление дуг окружностей. Точное их решение с помощью циркуля и линейки, как известно из теории геометрических построений, вообще говоря, невозможно в силу трансцендентности числа π. Поэтому много внимания было направлено на отыскание достаточно простых и достаточно точных графических приемов приближенного спрямления дуг окружностей. Много внимания было уделено также более общей задаче спрямления дуг кривых

второго порядка. Приведем некоторые приемы приближенного решения этих задач.

1. Требуется графически определить длину дуги AB (рис. 45). Пусть C и D — соответственно середины дуги и хорды AB. Из точки C проведем перпендикуляр CE к хорде AC до пересечения его с хордой AB (точка E). Отложим отрезок DF, равный $\frac{2}{3}DE$. Тогда приближенно длина дуги AB равна удвоенному отрезку AF.

Найдем погрешность этого построения. Как легко видеть,

$$DE = R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4};$$

$$\frac{2}{3}DE = \frac{2}{3}R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4};$$

$$AF = AD + \frac{2}{3}DE =$$

$$= R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}\right).$$

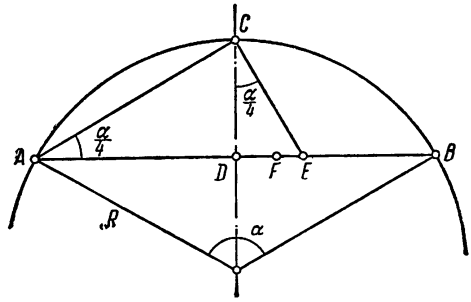


Рис. 45.

Длина дуги точно выражается формулой $AB = \alpha R$, где R — радиус дуги, а α — ее радианная мера. Мы же приближенно принимаем длину дуги AB равной

$$\overset{\smile}{AB} \approx 2AF = 2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}\right).$$

Абсолютная погрешность Δ по определению равна абсолютной величине разности между истинным и найденным приближенным значением искомой величины. Следовательно,

$$\Delta = R\left[2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}\right) - \alpha\right].$$

Относительная погрешность δ будет равна

$$\delta = \frac{2}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}\right) - 1.$$

Легко проверить, разлагая тригонометрические функции в ряд по α, что этот способ дает для не очень больших дуг α сравнительно малую погрешность $\approx \frac{1}{1920}\alpha^4$. Для больших дуг погрешность этого построения велика. Например, при $\alpha = \pi$ имеем $\delta = \frac{10}{3\pi} - 1 \approx 0{,}061$.

2. Другой способ (рис. 46) спрямления обычно применяется для дуг, меньших 40°. (Для больших дуг погрешность становится значи-

тельной.) В этом случае для спрямления дуги AB через центр O ее проводим прямую, перпендикулярную хорде AB, и от середины C дуги AB на прямой OC откладываем отрезок $CL = 3R$; через точку C проводим касательную к дуге до пересечения ее с прямыми AL и BL в точках M и N. Длина отрезка MN и будет приближенно равна длине дуги AB.

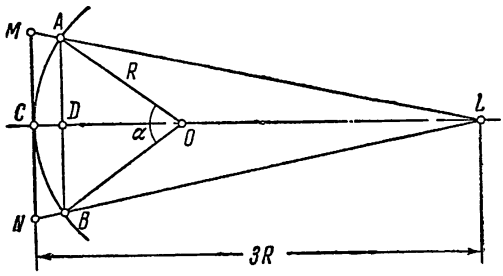


Рис. 46.

Определим погрешность, полученную при этом способе. Так как $AB = \alpha R$, $AB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\triangle ABL \backsim \triangle MNL$, то после несложных выкладок получим:

$$MN = R \cdot \frac{6\sin\frac{\alpha}{2}}{2+\cos\frac{\alpha}{2}},$$

абсолютная погрешность

$$\Delta = |MN - AB| = R\left|\frac{6\sin\frac{\alpha}{2}}{2+\cos\frac{\alpha}{2}} - \alpha\right|.$$

относительная погрешность

$$\delta = \left|\frac{6\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right)} - 1\right|.$$

При малых α эта погрешность примерно равна $\frac{\alpha^4}{2880}$.

3. Для приближенного спрямления полуокружности могут быть использованы следующие два простых приема.

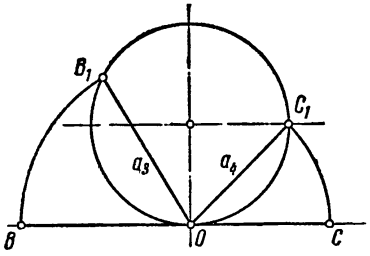


Рис. 47.

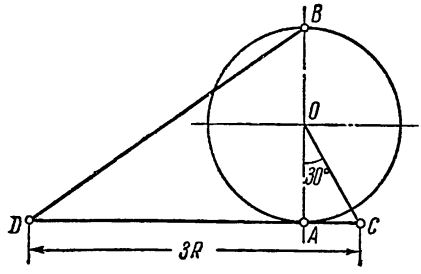


Рис. 48.

Выполнение построения для первого из них вполне понятно из рис. 47, на котором a_3 и a_4 — стороны вписанных в окружность равностороннего треугольника и квадрата. Длина отрезка BC прибли-

женно равна длине полуокружности:

$BC = BO + OC = a_3 + a_4 = R(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \approx R(1{,}732 + 1{,}414) = 3{,}146R$;

относительная погрешность $\delta \approx 0{,}15\%$.

Построение по второму способу заключается в следующем: на диаметре AB (рис. 48) строим угол COA, равный 30°. От точки C в сторону точки A откладываем отрезок $CD = 3R$. Точки B и D соединяем. Длина отрезка BD и будет приближенно равна длине полуокружности. В самом деле, из чертежа следует:

$$AC = R \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{3};$$

$$AD = 3R - \frac{R\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{3}(9 - \sqrt{3});$$

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2}, \quad \text{или} \quad BD = \frac{R}{3}\sqrt{120 - 18\sqrt{3}} \approx 3{,}14R.$$

Относительная погрешность $\delta \approx 0{,}002\%$.

6.3. Графоаналитический метод и метод последовательных приближений. При решении задач на построение зачастую используются также данные, полученные с помощью предварительных расчетов. Соответствующий метод приближенного решения задач на построение называют *графоаналитическим методом.*

Например, задача о делении окружности на n равных частей может быть решена (а на практике, в частности при разметке, часто так и решается) при помощи специально составленных таблиц хорд.

На основании предварительных расчетов часто производится вычерчивание некоторых кривых, построение точек по их координатам, например при разметке шаблонов, при выполнении чертежей для копировальных станков и т. д.

Широкое распространение этого метода объясняется тем, что в ряде случаев он дает возможность осуществить построение более просто, чем при чисто геометрическом решении; во многих случаях это — единственно возможный путь решения задачи. Теоретически погрешность самого метода (точность вычислений) может быть сделана как угодно малой.

Однако применение графоаналитического метода не всегда удобно, так как предварительные расчеты иногда оказываются слишком громоздкими.

Полезным методом приближенного решения конструктивных задач является также так называемый *метод последовательных приближений.* Этот метод заключается в многократном повторении некоторого основного построения, применяемого вначале к заданной совокупности элементов, а затем к фигурам, получаемым в результате предшествующих построений.

Если с увеличением порядкового номера построения абсолютные погрешности результатов неограниченно уменьшаются, то последова-

тельность этих результатов будет сходиться к искомому решению, т. е. тогда теоретически возможна аппроксимация решения с любой степенью точности.

Оценка точности построения при методе последовательных приближений обычно затруднена тем, что при построении часто приходится выполнять большое число операций. Кроме того, аналитическое определение погрешности нулевого приближения затрудняется и тем, что часто нулевое приближение выбирается более или менее произвольно.

В связи с этим обстоятельством построение обычно выполняется до тех пор, пока практически совпадут результаты двух последовательных основных построений.

Число основных построений при решении задач зависит от быстроты сходимости приближений. При удачно выбранном основном построении достаточно одного-двух приближений.

Довольно простым примером метода последовательных приближений является следующее приближенное решение задачи о трисекции угла. Как известно,

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots,$$

или

$$\frac{\varphi}{3}=\frac{\varphi}{4}+\frac{\varphi}{4^2}+\ldots+\frac{\varphi}{4^n}+\ldots$$

Следовательно, если дан угол AOB, равный φ, то графически можно с помощью циркуля и линейки приближенно найти его третью часть с какой угодно степенью точности, выполняя лишь деление углов пополам и их сложение.

Для деления угла на 3 части с помощью циркуля и линейки можно также использовать сумму бесконечно убывающей профессии, первый член которой равен $\frac{1}{2}$, а знаменатель равен $-\frac{1}{2}$. Однако этот ряд сходится медленнее, чем ряд с общим членом $a_n=\frac{1}{4^n}$.

Спрямление дуг окружностей также можно выполнять методом последовательных приближений. Задача состоит в том, чтобы найти достаточно простой способ построения последовательностей периметров вписанных или описанных ломаных. Мы рассмотрим один изящный прием нахождения периметров вписанных ломаных.

Пусть AB — дуга окружности с центром в точке O, стягивающая центральный угол α (рис. 49). Примем за нулевое приближение длину хорды спрямляемой дуги AB. Затем проведем прямую $AN \perp OA$, биссектрису AA_1 угла BAN и $Bb_1 \perp AB$. Биссектриса AA_1 угла BAN пересечет дугу AB в ее середине (точка C_1). Итак, $BC_1 = AC_1 = b_1C_1$;

следовательно,

$$Ab_1 = BC_1 + C_1A,$$

и первое приближение (длина ломаной $4C_1B$) будет

$$P_1 = Ab_1.$$

Второе приближение (длина вписанной ломаной, состоящей из четырех звеньев) находится аналогичным образом: проводим биссектрису AA_2 угла A_1AN и через точку b_1 отрезок $b_1b_2 \perp AA_1$. Так как

$$AC_2 = \frac{1}{4} Ab_2,$$

то

$$Ab_2 = 4AC_2$$

и

$$P_2 = Ab_2.$$

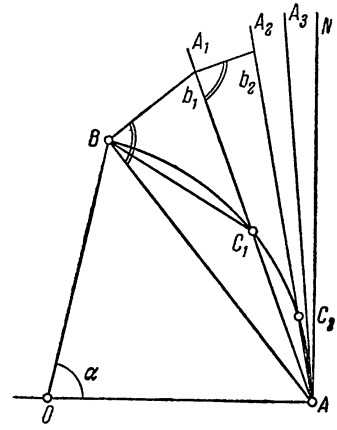


Рис. 49.

Продолжая процесс, получим последовательность отрезков AB, Ab_1, Ab_2, . . . , сходящуюся к отрезку, длина которого равна длине спрямляемой дуги AB.

Оценим быстроту сходимости процесса. Погрешность i-го приближения равна

$$\Delta_i = \alpha R - 2^{i+1} R \sin \frac{\alpha}{2^{i+1}};$$

следовательно,

$$\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i} = \frac{\alpha - 2^{i+2} \sin \dfrac{\alpha}{2^{i+2}}}{\alpha - 2^{i+1} \sin \dfrac{\alpha}{2^{i+1}}}.$$

Нетрудно показать, что предел

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}$$

равен $\frac{1}{4}$.

Таким образом, при повторении основного построения погрешность каждый раз уменьшается примерно в 4 раза.

Из этого построения можно вывести одну изящную формулу, впервые (аналитическим путем) установленную Эйлером. Очевидно, что

$$AB = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Далее $\angle BAN = \frac{\alpha}{2}$, и потому

$$\angle BAb_1 = \frac{\alpha}{4}, \quad \angle b_1Ab_2 = \frac{\alpha}{8}, \quad \angle b_2Ab_3 = \frac{\alpha}{16}, \ldots$$

Теперь из прямоугольных треугольников BAb_1, b_1Ab_2, b_2Ab_3, ..., находим

$$Ab_1=\frac{AB}{\cos\frac{\alpha}{4}}=\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{4}}=\frac{R\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}},$$

$$Ab_2=\frac{Ab_1}{\cos\frac{\alpha}{8}}=\frac{R\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}},$$

$$Ab_3=\frac{Ab_2}{\cos\frac{\alpha}{16}}=\frac{R\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{16}},$$

. . . . . .

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} Ab_n$ равен длине дуги AB, т. е. равен $R\alpha$, то мы приходим (сокращая на R) к следующей формуле Эйлера:

$$\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cos\frac{\alpha}{16}\cdots}.$$

§ 7. Геометрические построения в пространстве

7.1. Система постулатов для построений на плоскости. Постановка вопроса о геометрических построениях в пространстве отличается от постановки аналогичного вопроса на плоскости, и мы начнем с выяснения этого различия.

Геометрические построения на плоскости с помощью циркуля и линейки основаны на следующей системе постулатов:

1. Через две точки можно провести прямую.
2. Можно построить окружность, имеющую данный центр и данный радиус.
3. Можно найти точки пересечения двух уже построенных линий.
4. Можно взять произвольную точку на уже построенной линии.

Разумеется, эти постулаты не заменяют каких-либо аксиом геометрии. Они играют роль аксиом теории геометрических построений [1]) и определяют, какие элементы считаются построенными. Например, первый постулат отличается от аксиомы «существует единственная прямая, проходящая через две данные точки». Эта аксиома устанавливает, что такая прямая существует, а постулат построений добавляет, что ее *можно провести*, т. е. что после задания двух точек ее можно считать *построенной*.

---

[1]) Ср. со статьей «О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки», стр. 208—209 этой книги ЭЭМ.

Перечисленные постулаты отражают практику употребления чертежных инструментов — циркуля и линейки.

Решение задачи на построение (на плоскости) можно понимать двояко.

А. Решить задачу на построение — значит свести ее к цепи основных задач, возможность решения которых постулируется.

Пусть, например, требуется найти середину отрезка AB. Вот решение:

1) построить окружность с центром в точке A, имеющую радиус AB,
2) построить окружность с центром в точке B, имеющую радиус AB,
3) найти две точки пересечения этих окружностей,
4) провести прямую через эти точки,
5) найти точку пересечения этой прямой с AB.

Задача решена. Мы не касаемся доказательства и исследования, а рассматриваем только построение.

Само построение как чертежный процесс мы не производили, заменив его словесным описанием.

Отметим, что способы решения основных задач не требуют объяснений. Не нужно объяснять, как провести прямую через две точки. Это — основная задача, решение которой не расчленяется на более простые шаги. Ее можно решить — это обеспечивается постулатом. Вопрос, как ее решить, не рассматривается.

Б. Решить задачу на построение — значит выполнить это построение на бумаге (или на другой материальной плоскости) при помощи чертежных инструментов.

В геометрии на плоскости между точками зрения А и Б нет принципиального различия, потому что постулаты точно отражают свойства чертежных инструментов.

Если учитель задал ученику задачу на построение, то он может удовлетвориться словесным решением и не требовать вычерчивания [1]). В самом деле, вся трудность заключается в нахождении цепи основных задач. Если найдено решение, сформулированное словесно, то его чертежная реализация не представляет никаких затруднений.

7.2. Система постулатов для «воображаемых построений» в пространстве. В теории геометрических построений в пространстве можно предложить систему постулатов, аналогичную приведенной на стр. 200:

1. Через две точки можно провести прямую.
2. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость.
3. Можно построить сферу, имеющую данный центр и данный радиус.

---

[1]) За исключением тех случаев, когда требуется упражнение в процессе черчения.

4. Можно найти линию пересечения двух уже́ построенных поверхностей (плоскостей или сфер).

5. Можно взять произво́льную точку на уже́ построенной поверхности или линии.

6. В уже́ построенной плоскости можно производить любые построения, допускаемые в геометрии на плоскости.

Эта система постулатов является избыточной. Мы ввели лишние постулаты (например, 3-й) для усиления аналогии с системой постулатов для построений на плоскости.

По аналогии с геометрией на плоскости можно под решением задачи на построение в пространстве считать сведе́ние ее к основным задачам. Но здесь обнаруживается существенная разница с геометрией на плоскости. Приведенные шесть постулатов составлены по аналогии с постулатами геометрических построений на плоскости, но в отличие от последних они не выражают свойств каких-либо инструментов. На плоскости можно провести прямую карандашом по линейке, а в пространстве нельзя материальным образом провести плоскость через три точки.

Иначе говоря, на геометрические построения в пространстве не может быть точек зрения А и Б, а может быть только точка зрения А. Задачу на построение можно решить словесно, но это построение нельзя реализовать.

Выполняемые таким образом (словесно) построения называются воображаемыми построениями.

Зачем они нужны?

Во-первых, иногда построения используются для доказательства существования некоторого объекта.

Во-вторых, воображаемые построения представляют полезное упражнение и содействуют развитию пространственных представлений.

В то же время ясно, что значение этих построений меньше, чем значение построений на плоскости. Возможно и иное истолкование задач на построение в пространстве; оно будет рассмотрено в статье «Методы изображения» (стр. 288—289 этой книги ЭЭМ).

7.3. Пример. Мы рассмотрим только одну очень простую задачу для иллюстрации того, что́ такое воображаемые построения.

Задача. *Из данной точки опустить перпендикуляр на данную плоскость.*

Пусть дана плоскость α и точка M вне ее. Возьмем в плоскости α произвольную точку P и построим сферу с центром в точке M, проходящую через P. Если эта сфера не имеет с плоскостью α общих точек, кроме P, то MP — искомый перпендикуляр. Если же эта сфера пересекает плоскость α по окружности, то построим ее центр O; MO — искомый перпендикуляр.

Мы упоминали выше, что 3-й постулат лишний. Покажем, как можно решить эту задачу, не пользуясь им.

В плоскости α возьмем две произвольные точки A и B и проведем прямую $a \equiv AB$. Проведем плоскость $\beta \equiv MAB$. В плоскости β опустим перпендикуляр из M на a; основание этого перпендикуляра обозначим через N. В плоскости α восставим перпендикуляр к a в точке N. На этом перпендикуляре возьмем произвольную точку L. Проведем плоскость $\gamma \equiv LMN$. В плоскости γ опустим перпендикуляр из точки M на прямую NL; это и есть искомый перпендикуляр к плоскости.

7.4. Заключение. Теорию построений в пространстве можно развивать вполне аналогично теории построений на плоскости. Например, естественно поставить вопрос об общей характеристике всех задач на построение в пространстве, разрешимых на основе постулатов 1—6. Решение этого вопроса использует основы аналитической геометрии в пространстве и близко к результатам, изложенным в статье «О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки» (стр. 205—227 этой книги ЭЭМ).

Можно также ставить вопросы «о построениях с ограниченными средствами». Мы уже упоминали выше о том, что постулат 3 на стр. 201 является излишним и его можно отбросить. С другой стороны, можно доказать, что всякое воображаемое построение, выполняемое на основе постулатов 1—6, можно также осуществить, используя лишь постулат 3 и возможность пользования циркулем для нанесения окружностей на сферах (аналог построений Мора — Маскерони). Все эти вопросы представляют, однако, значительно меньший интерес, чем соответствующие вопросы теории построений на плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Адлер, Теория геометрических построений, перев. с нем., Л., Учпедгиз, 1940.

Классическое руководство по теории геометрических построений, рассчитанное на широкий круг читателей и трактующее вопрос весьма обстоятельно (ограничиваясь, впрочем, лишь случаем построений на плоскости). Книга содержит много задач.

[2] Б. И. Аргунов и М. Б. Балк, Геометрические построения на плоскости, М., Учпедгиз, 1957.

Учебное пособие для студентов педагогических институтов.

[3] Д. И. Перепелкин, Геометрические построения в средней школе, М., Учпедгиз, 1953.

Небольшая брошюра, рассчитанная на самый широкий круг читателей; содержит довольно ограниченный материал, разобранный, однако, весьма тщательно.

[4] Н. Ф. Четверухин, Методы геометрических построений, М., Учпедгиз, 1952.

[5] Н. Ф. Четверухин, Геометрические построения и приближения, М., Учпедгиз, 1935.

В этой книге обстоятельно разработан вопрос о приближенных построениях, в первую очередь о сходящихся приближениях.

[6] И. И. Александров, Сборник геометрических задач на построение, М., Учпедгиз, 1950.

Весьма обширное собрание геометрических задач на построение, частично сопровождаемых решениями. Задачи классифицированы по методам их решения.

[7] Ю. Петерсен, Методы и теории для решения геометрических задач на построение, М., 1892.

Исторически первый сборник задач на построение, классифицированных по методам их решения. Число задач заметно уступает числу задач в книге И. И. Александрова, однако методы решения охарактеризованы несколько полнее.

[8] Я. Штейнер, Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, перев. с нем., М., Учпедгиз, 1939.

Классическое сочинение, содержащее развернутую теорию построений с помощью одной линейки. Книга содержит также весьма интересно изложенный теоретический материал (свойства полного четырехсторонника, теория подобия и др.).

[9] П. Цюльке, Построения на ограниченном куске плоскости, перев. с нем., М.—Л., ОНТИ, 1935.

Небольшая брошюра, рассчитанная на широкий круг читателей; содержит много интересных примеров построений, выполняемых на ограниченном куске плоскости.

[10] Н. В. Наумович, Геометрические места в пространстве и задачи на построение, М., Учпедгиз, 1956; Н. В. Наумович, Простейшие геометрические преобразования в пространстве и задачи на построение, М., Учпедгиз, 1959.

Обе книги посвящены геометрическим построениям в трехмерном пространстве.

[11] L. Bieberbach, Theorie der geometrische Konstruktionen, Basel, 1952.

Обстоятельный обзор теории геометрических построений на плоскости и на поверхности сферы; разобрано весьма большое число разнообразных комплексов инструментов и для каждого полностью охарактеризован круг разрешимых этими средствами задач. Изложение довольно сжатое, но отчетливое, доступно широкому кругу читателей.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 205

§ 1. Геометрическая часть теории 206
1.1. Постановка задачи 206
1.2. Построения циркулем и линейкой 208
§ 2. Перевод задачи на алгебраический язык 210
2.1. Основная лемма 210
2.2. Выводы 215
2.3. Алгебраические рассмотрения 216
2.4. Случай многочленов третьей степени 218
2 5 Теорема Гаусса 219
§ 3. Классические задачи 220
3.1. Удвоение куба 220
3.2. Трисекция угла 221
3.3. Построение треугольника по его биссектрисам 223
3 4. Построение правильных многоугольников 225
3.5. Квадратура круга 226

Литература 227

Введение

Теория геометрических построений с помощью циркуля и линейки была вызвана к жизни многочисленными безуспешными попытками решить с помощью такого построения три древние задачи: трисекции угла, удвоения куба, квадратуры круга.

Значение этой теории исторически заключается в том, что она дала одно из первых доказательств *невозможности* в математике, выполнив его с помощью точного обозрения совокупности объектов, которые *можно* построить, пользуясь только циркулем и линейкой. Оба математических результата, которые в данной теории получаются одновременно, но, вообще говоря, могут достигаться разными средствами, в математике двадцатого века играют особую роль; так, предметом новой науки — *метаматематики* — в значительной степени является изучение вопросов о том, какие выводы в принципе можно и какие нельзя получить, пользуясь данными средствами.

Решение основной задачи теории построений циркулем и линейкой, заключающееся в точном описании совокупности построений,

которые можно осуществить, и в описании алгоритма, который дает возможность решить всякую конкретную задачу или узнать, что эта задача неразрешима, является по существу алгебраическим; это решение не могло быть достигнуто до появления необходимых алгебраических средств. Первое их появление датируется (1796 г.) знаменитой работой юного Гаусса о правильных многоугольниках, которые можно построить с помощью циркуля и линейки. Эта работа уже содержала в зачаточном виде основы новой алгебраической теории (позже развитой замечательным французским математиком Эваристом Галуа, по имени которого ее называют теорией Галуа) для некоторых полей частного вида, причем эти алгебраические рассмотрения представляли собой как раз наиболее глубокую часть работы.

Таким образом, теория построений по существу состоит из трех частей.

Первая — чисто геометрическая — должна заключать в себе анализ понятия «построение с помощью циркуля и линейки», с тем чтобы это понятие было определено четко и недвусмысленно. (Известно, например, что утверждение о невозможности построения трети заданного угла с помощью циркуля и линейки перестает быть справедливым, если разрешить некоторые приемы использования линейки [1]).) Эта первая часть подготавливает почву для второй, в которой задача переводится на алгебраический язык и ставится в алгебраических терминах. Этот перевод не является чисто механической перефразировкой: он приводит к появлению новых математических объектов, которые затруднительно или невозможно было бы выразить на геометрическом языке. С другой стороны, именно появление этих новых объектов позволяет в конце концов решить задачу. Наконец, третья часть теории является собственно алгебраической, наиболее глубокой и наиболее трудной: в ней решается алгебраическая задача, к которой была приведена соответствующая геометрическая задача — теория построений.

§ 1. Геометрическая часть теории

1.1. Постановка задачи. При строгом описании понятия «построение с помощью циркуля и линейки» следует ясно представить себе ответ на три вопроса:

а) Что мы хотим построить?

б) Каковы исходные данные?

в) Какими средствами мы можем пользоваться?

Прежде всего будем иметь в виду, что все наши построения проводятся на выбранной раз навсегда плоскости.

Для ответа на первый вопрос нужно проанализировать имеющиеся в нашем распоряжении конкретные задачи. Этот анализ показывает,

[1]) См. выше, стр. 176.

что главной целью решения всегда является построение *конечного числа точек* (на плоскости). Сама по себе задача, конечно, не всегда формулируется так. Однако нетрудно проверить, что любая задача сводится к такой.

Например, для отыскания некоторой окружности достаточно построить ее центр и одну из ее точек; для отыскания прямой достаточно построить какие либо две ее точки; задача трисекции угла сводится к построению двух точек (P, Q на рис. 1), через которые проходят прямые, делящие угол на три равные части. Задача построения треугольника (по каким бы то ни было данным)

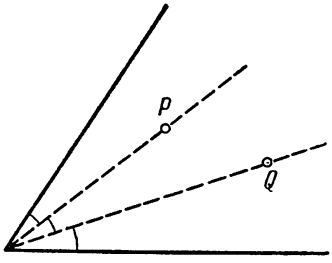


Рис. 1.

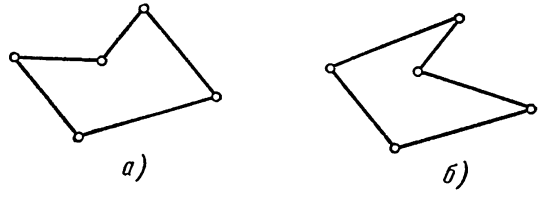


Рис. 2.

сводится к задаче построения трех его вершин. Вообще задача построения многоугольника (в частности, квадрата, равновеликого кругу) сводится к задаче построения его вершин; но дополнительно нужно указать, какие отрезки, соединяющие пары точек, должны входить в число сторон многоугольника. (Рис. 2, на котором изображены два разные многоугольника с одними и теми же вершинами, показывает, что без этого указания ответ не может быть определен однозначно.) Задача удвоения куба сводится к задаче построения двух точек, отстоящих друг от друга на заданное расстояние (ребро куба, объем которого вдвое больше объема данного куба). Читатель может сам умножать количество примеров. В принципе, разумеется, могут быть задачи, для решения которых нужно в каком-то смысле найти бесконечно много точек (например, построить эллипс с заданными полуосями). Однако если они не сводятся к задаче об отыскании конечного числа точек, мы не станем их рассматривать.

Мы не станем также заниматься вопросом о дополнительных сведениях, которые нужно получить, когда искомая конечная система точек построена (например: указать пары точек, являющиеся смежными вершинами искомого многоугольника). Обычно эти сведения получаются прямым геометрическим рассмотрением чертежа.

Итак, мы принимаем следующий ответ на вопрос: а) целью любой задачи на построение является указание конечного числа точек на плоскости.

Теперь ответ на вопрос б) напрашивается сам собой: в качестве первоначальных данных у нас также должна иметься конечная совокупность точек на плоскости. В самом деле, для задания угла достаточно задать его вершину и две точки на сторонах; для задания окружности достаточно задать три ее точки или центр и одну точку; для задания квадрата достаточно задать его вершины и т. п. [1]).

Итак, мы принимаем следующий ответ на вопрос б): исходными данными любой задачи на построение является система конечного числа точек на плоскости.

1.2. Построения циркулем и линейкой. Перейдем теперь к вопросу в). Ответ на этот вопрос заключается в самом названии статьи: построение должно осуществляться *с помощью циркуля и линейки.* Следует лишь уточнить, что мы имеем право делать с помощью циркуля и линейки.

Удобно описать процесс построения индуктивно. Мы начинаем с конечного числа точек на плоскости и хотим получить конечное число точек на плоскости; процесс построения состоит в том, что к уже имеющейся системе точек мы добавляем по известным правилам еще некоторые, а затем отбираем среди всех получившихся точек те, которые доставляют решение нашей задачи. Вторая часть, конечно, определяется спецификой задачи; нас интересует сейчас, по каким правилам добавляются точки.

Назовем *шагом построения* добавление *одной* новой точки к уже имеющимся. Отыскание этой новой точки производится в результате проведения некоторых операций; *по определению,* в построении циркулем и линейкой шаг может состоять только из следующих операций (причем операции 1 и 2 могут применяться несколько раз, а операция 3 — один раз).

1. *Проведение прямой через пару точек имеющейся совокупности.* (Эта совокупность является результатом предыдущего шага или представляет собой первоначально заданную систему точек.)

2. *Проведение окружности с центром в одной из точек имеющейся совокупности и проходящей через некоторую другую точку этой совокупности.*

(Такие прямые и окружности мы назовем построенными на базе имеющейся совокупности точек.)

3. *Выбор одной точки пересечения построенных прямых и окружностей между собой и добавление этой точки к имеющейся совокупности.*

---

[1]) Если в качестве данных может быть указано бесконечно много точек, не сводящихся к точкам конечной совокупности прямых и окружностей, это резко расширяет область разрешимых задач. Например, задание кривой, являющейся графиком функции $y=x^3$ (и даже любой ее дуги), позволит затем с помощью циркуля и линейки решить задачу об удвоении куба.

Вместо операции 3, которая представляет собой выбор определенной точки, иногда оказывается необходимым пользоваться операцией

3а. *Выбор «произвольной» точки и добавление ее к имеющейся совокупности.*

Следует уточнить здесь употребление слова «произвольный». По определению это означает, что точку можно «произвольно» выбирать либо на некотором отрезке прямой, либо на дуге окружности, либо же в части плоскости, ограниченной отрезками или дугами, и, возможно, уходящей в бесконечность. При этом все фигурирующие прямые и окружности должны быть построены на данном шаге, а концы отрезков и дуг должны быть точками имеющейся совокупности. Можно считать, конечно, что «произвольная» точка не должна лежать на концах отрезков и дуг или на границе упомянутой части плоскости.

Построением с помощью циркуля и линейки называется последовательность, состоящая из конечного числа описанных шагов.

Еще раз подчеркнем, что при таком определении часть реального геометрического содержания данной задачи может остаться в стороне. Например, останется в стороне вопрос о сведении данной задачи и желаемого ответа к построению конечного числа точек и о выборе из построенной совокупности точек, необходимых для окончательного решения задачи; останется в стороне также выяснение вопросов типа: какие из построенных точек являются смежными вершинами в искомом многоугольнике, и т. п. Эти вопросы относятся скорее к «анализу построения», а не к решению проблемы о *выполнимости* требуемого построения.

Итак, пусть задана некоторая конечная совокупность точек на плоскости; мы считаем, что точку A *можно построить* (с помощью циркуля и линейки), если существует такое построение, что (независимо от промежуточных «произвольных» выборов точек!) система точек, полученная в результате этого построения, содержит точку A. Задачу на построение мы считаем *разрешимой*, если совокупность точек, которые следует найти для решения этой задачи, состоит только из таких точек, которые можно построить с помощью циркуля и линейки.

Теперь мы можем сформулировать и «основной вопрос теории построений с помощью циркуля и линейки». *Дано конечное число точек на плоскости. Какие точки можно построить, исходя из них?*

Мы уже упоминали, что имеется точный ответ на этот вопрос (т. е. условия, *необходимые и достаточные* для возможности построения точки); существенную роль играет также частичный ответ, указывающий *необходимые* условия для того, чтобы точку можно было построить.

§ 2. Перевод задачи на алгебраический язык

2.1. Основная лемма. Нам понадобятся некоторые сведения из теории полей: определение числового поля, конечного расширения и степени конечного расширения. Все эти сведения можно найти в статье «Кольцо многочленов и поле рациональных функций» из кн. II ЭЭМ.

Кроме того, мы будем предполагать, что читатель знаком с геометрическим изображением комплексных чисел точками плоскости, при котором число $a+bi$ (a, b — вещественные числа) изображается точкой с координатами (a, b) в фиксированной раз навсегда прямоугольной системе координат.

Это изображение будет играть в дальнейшем основную роль. Именно мы отождествим плоскость, на которой проводятся все наши построения, с *полем комплексных чисел*. Говоря о сложении, умножении и других алгебраических операциях над *точками*, мы будем иметь в виду соответствующие операции над *числами*, которые изображаются этими точками. Описание всех точек, которые можно получить из данных посредством построения циркулем и линейкой, равносильно описанию всех отвечающих этим точкам чисел. Мы даже будем говорить, например, о принадлежности точки к некоторому полю и т. п.

Итак, пусть в числе данных задачи содержится задание двух точек на плоскости. Выберем одну из этих точек в качестве начала координат 0, второй припишем координаты (1, 0) (т. е. число 1). (Кроме этих двух точек, в данные задачи могут входить еще некоторые другие точки.) Проведем в точке 0 перпендикуляр к прямой, соединяющей 0 и 1, и отложим единичный отрезок по нему от начала координат. Все эти построения осуществляются с помощью циркуля и линейки; результатом построения является некоторая декартова система координат, которую мы и будем использовать для сопоставления с точками комплексных чисел.

Теперь мы рассмотрим какое-нибудь одно (совершенно произвольное) построение циркулем и линейкой. В процессе этого построения строятся совокупности точек. Символом A_n мы обозначим совокупность n точек, которая получается на очередном шаге построения. Следующий шаг, тем самым, состоит в добавлении к совокупности A_n еще одной точки, т. е. в переходе к совокупности A_{n+1}. Обозначим символом K_n *наименьшее подполе поля комплексных чисел, содержащее число i, все числа из совокупности A_n и вместе с каждым числом содержащее сопряженное к нему число.* Первым важным результатом является следующая основная лемма, устанавливающая связь между геометрическими операциями над точками и алгебраическими операциями над соответствующими им числами.

Лемма. а) *Любую точку поля K_n можно построить циркулем и линейкой, исходя из совокупности точек A_n.*

б) *Если переход от совокупности* A_n *к совокупности* A_{n+1} *состоит в добавлении точки, полученной пересечением пары прямых, пары окружностей или прямой с окружностью, построенных на базе точек* A_n, *то либо* $K_{n+1} = K_n$, *либо* $K_{n+1} = K_n(\sqrt{z})$, *где число* z *принадлежит полю* K_n *и не является в нем полным квадратом. При этом для любого такого числа* z *можно построить циркулем и линейкой число* $\sqrt{z}$.

в) *Если переход от совокупности* A_n *к совокупности* A_{n+1} *состоит в добавлении точки, лежащей на данном отрезке прямой или на данной дуге окружности, или в данной области плоскости, то эту точку можно выбрать так, чтобы было* $K_{n+1} = K_n(\sqrt{z})$, *где* $z \in K_n$

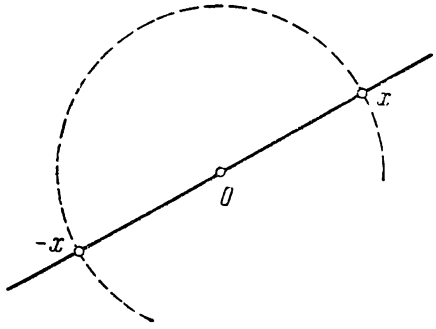


Рис. 3.

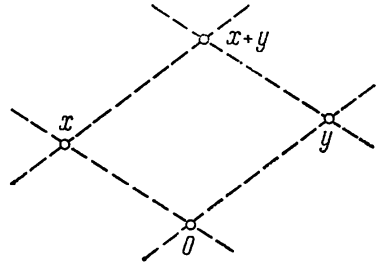
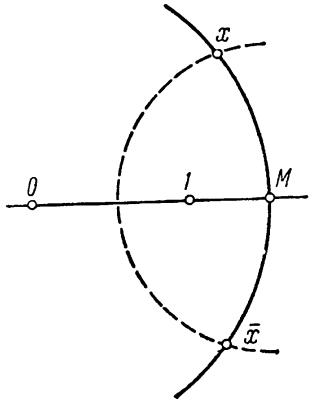


Рис. 4.

Доказательство. Начнем с утверждения а). Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — все точки из совокупности A_n (которые, как и раньше, мы будем отождествлять с соответствующими комплексными числами). По определению поля K_n любой его элемент получается из чисел $i, z_1, \ldots, z_n$ в результате конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия сопряженного числа. Поэтому достаточно установить следующий результат: *если даны две точки* x, y, *то с помощью циркуля и линейки можно построить точки* $-x$; $x+y$; $\bar{x}$; x^{-1}; xy. (Возможность построить число i мы уже отмечали: напомним, что среди чисел $z_1, \ldots, z_n$ содержится единица — она была выбрана из начальных данных.)

Но этот результат проверяется вполне элементарно. В самом деле, для построения точки $-x$ нужно провести через O и x прямую и циркулем отложить отрезок от O до x на этой прямой по другую сторону от точки O (рис. 3). Для построения точки $x+y$ нужно провести через точку x прямую, параллельную Oy, а через точку y — прямую, параллельную Ox (рис. 4). Их пересечение и даст $x+y$, если эти прямые не совпадают, т. е. если точки x, y, O не лежат на одной прямой. Если же эти три точки лежат на одной прямой,

то задача снова сводится к откладыванию (циркулем) данных отрезков на данной прямой. Для построения точки x^{-1} достаточно построить отдельно ее аргумент и модуль. Построение аргумента сводится к проведению окружности, проходящей через точку x, с центром в начале координат, отысканию ее точек пересечения с прямой 01 и к откладыванию дуги от одной из этих точек до точки x в другую сторону по окружности (это даст $\bar{x}$, рис. 5). Построение $|x|^{-1}$—это построение четвертого пропорционального к отрезкам $|x|$, 1, 1. Хорошо известно, как его строить циркулем и линейкой. Затем полученный отрезок $|x|^{-1}$ нужно отложить по прямой $0\bar{x}$ от точки 0 в сторону точки $\bar{x}$ (рис. 6). Наконец, построение точки xy сводится



Ри . .

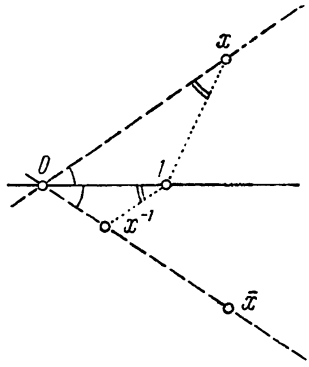


Рис. 6

совершенно аналогичным образом к построению суммы двух углов (аргументов точек x, y) и к построению отрезка $|xy|$, т. е. четвертого пропорционального к отрезкам 1, $|x|$, $|y|$ (рис. 7).

Мы доказали таким образом, утверждение а) нашей теоремы. Доказательство утверждения б) удобно начать со второй его части, т. е. установить, что если дана точка z (и, разумеется, точка 1), то можно циркулем и линейкой построить (оба значения) $\sqrt{z}$. Читателю уже должно быть ясно построение: нужно разделить аргумент точки z пополам и отложить отрезок длины $\sqrt{|z|}$ (среднее пропорциональное между отрезками $|z|$ и 1; оно строится циркулем и линейкой) от точки 0 в обе стороны по прямой, угол наклона которой к действительной оси 01 равен половине аргумента числа z (точки M и N на рис. 8).

Несколько труднее установить первую часть утверждения б). Прежде всего мы должны научиться записывать уравнения прямой и окружностей на комплексной плоскости. Можно, однако, на время условиться разделять вещественные и мнимые части комплексного числа, обозначая их символами X, Y. (Это и будут координаты со-

ответствующей точки.) Уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совокупности A_n, запишется в виде

$$(X-x_1)(y_2-y_1)-(Y-y_1)(x_2-x_1)=0, \tag{1}$$

т. е. в виде

$$aX+bY+c=0,$$

где коэффициенты a, b, c легко вычисляются через координаты точек (x_1, y_1), (x_2, y_2). Далее, уравнение окружности с центром

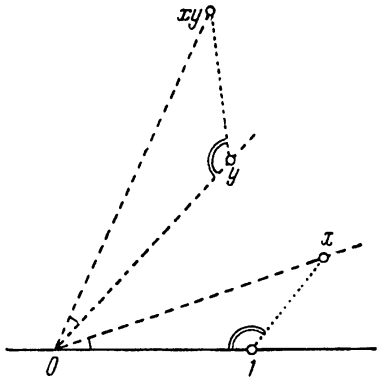


Рис. 7

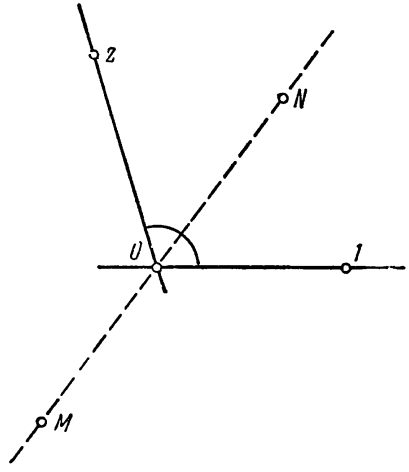


Рис. 8.

в точке (d, e) из совокупности A_n, проходящей через некоторую точку (x, y) этой совокупности, можно записать в виде

$$(X-d)^2+(Y-e)^2=r^2, \tag{2}$$

где $r^2=(x-d)^2+(y-e)^2$.

Коэффициенты уравнений (1) и (2) — вещественные числа. Мы утверждаем прежде всего, что *все они принадлежат полю* K_n. Для доказательства этого достаточно заметить, что вместе с любым числом x в поле K_n содержится также его вещественная часть $\operatorname{Re} x$ и мнимая часть $\operatorname{Im} x$, потому что $\operatorname{Re} x=\frac{x+\bar{x}}{2}$, $\operatorname{Im} x=\frac{x-\bar{x}}{2i}$. Числа же a, b, c, d, e, r^2 в уравнениях (1) и (2), как мы видели выше, рационально выражаются через действительные и мнимые части координат точек из совокупности A_n.

Теперь для отыскания точек пересечения мы должны решить (в вещественных числах!) одну из трех систем уравнений:

$$\begin{cases} aX+bY+c=0, \\ a'X+b'Y+c'=0; \end{cases} \quad \begin{cases} aX+bY+c=0, \\ (X-d)^2+(Y-e)^2=r^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (X-d)^2+(Y-e)^2=r^2, \\ (X-d')^2+(Y-e')^2=r'^2, \end{cases}$$

выбрать одно решение этой системы и присоединить полученные числа X, Y к полю K_n — итогом и будет поле K_{n+1}. Проверка этого утверждения получается прямо с помощью определений, с использованием того факта, что если в поле K_{n+1} содержатся вещественные числа a, b, то содержатся также и числа $a \pm bi$.

Но, очевидно, решение первой системы уравнений принадлежит полю K_n; другими словами, в этом случае $K_{n+1}=K_n$. Решение же двух других систем сводится к решению *одного квадратного уравнения* с коэффициентами в поле K_n [1]). Присоединение корня этого уравнения к полю сводится к присоединению корня квадратного из дискриминанта этого уравнения. Если дискриминант z является полным квадратом, то $K_{n+1}=K_n$. В противном случае $K_{n+1}=K_n(\sqrt{z})$. Утверждение б) доказано [2]).

Остается теперь проверить утверждение в). Мы покажем даже, что точки, удовлетворяющие условию в), всюду плотно лежат на отрезках и дугах.

Пусть дан отрезок прямой, соединяющий две точки x, y из поля K_n. Тогда середина этого отрезка также принадлежит полю K_n, потому что она представляет собой точку $\frac{x+y}{2}$. Применяя это рассуждение к получившимся двум половинам отрезка, затем к его четвертям и т. д., мы получаем, что *внутри* любого отрезка прямой, взятого между точками x, y, содержится точка из поля K_n. Тем самым установлено, что произвольный выбор точки на отрезке прямой, проходящей через две точки из поля K_n, всегда можно осуществить, не выходя за пределы этого поля.

Пусть теперь дана окружность C, построенная на базе совокупности точек A_n, и на ней выделена дуга L, концами которой являются

---

[1]) В случае последней системы полезно предварительно заменить ее системой, состоящей из первого уравнения и линейного уравнения, получаемого почленным вычитанием наших двух уравнений.

[2]) Заметим, что отсутствие вещественных решений у соответствующей системы уравнений означает, что очередной шаг данного построения циркулем и линейкой не может быть проведен по некоторой «рубой» причине, примером которой может служить невозможность построения треугольника, одна из сторон которого больше суммы двух других.

точки, принадлежащие совокупности A_n. Как мы видели выше, уравнение рассматриваемой окружности C, построенной на базе системы точек A_n, можно записать в виде (2), где d, e и r^2 — действительные числа, принадлежащие полю K_n. Далее, любое рациональное число k принадлежит полю K_n (ибо $1 \in K_n$). Будем теперь рассматривать всевозможные точки пересечения окружности C с прямыми, параллельными оси абсцисс и расположенными на рациональном расстоянии от этой оси, т. е. с прямыми $Y = k$, где k — произвольное рациональное число. Ясно, что эти точки пересечения всюду плотно расположены на окружности C и, в частности, на дуге L. Но каждая такая точка пересечения имеет в качестве своих координат X, Y решение системы

$$(X-d)^2+(Y-e)^2=r^2,$$
$$Y=k,$$

и потому, как мы видели выше, эта точка пересечения принадлежит полю вида $K_n(\sqrt{z})$, где $z \in K_n$. Итак, выбор «произвольной» точки на дуге L всегда можно осуществить так, чтобы выбранная точка принадлежала полю $K_n(\sqrt{z})$, и потому либо $K_{n+1} = K_n$, либо $K_{n+1} = K_n(\sqrt{z})$, где $z \in K_n$.

Разобрать случай, когда нужно выбирать точку внутри области, частично ограниченной прямыми и дугами, не представляет труда. Достаточно, например, заметить, что внутри области всегда можно найти точку с рациональными координатами, т. е. точку, принадлежащую полю K_n.

Таким образом, наша лемма полностью доказана.

2.2. Выводы. Доказанная только что лемма в некотором смысле решает основной вопрос теории построений с помощью циркуля и линейки, сформулированный в конце § 1. Для точной формулировки ответа введем несколько новых понятий.

Обозначим буквой A систему *заданных* точек, а буквой K — поле, соответствующее этой системе (напомним, что оно содержит заданные точки, число i и все сопряженные ко всем своим элементам; притом это поле является наименьшим с указанными свойствами). Для любого поля L его *квадратичным расширением* назовем поле вида $L(\sqrt{z})$, где число $z \in L$ не является полным квадратом в поле L. Назовем конечное расширение K' поля K *допустимым*, если оно получается из поля K в результате конечной цепочки квадратичных расширений:

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n = K';$$
$$K_{i+1} = K_i(\sqrt{z_i}),\ z_i \subset K_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Теперь ответ на основной вопрос теории построений можно сформулировать так:

Для того чтобы точку z можно было построить циркулем и линейкой, исходя из совокупности точек A, необходимо и достаточно, чтобы точка z содержалась в некотором допустимом расширении поля K. Этот результат представляет собой простую перефразировку доказанной выше основной леммы.

Теперь следует разобраться в том, как применять этот результат к конкретным геометрическим задачам.

Для возможности такого применения следует прежде всего решить соответствующую алгебраическую задачу. Это означает, что мы должны считать искомые точки (т. е. те, которые нужно построить) неизвестными и составить для них систему уравнений, исходя из условий задачи (в коэффициенты этих уравнений войдут числа, соответствующие данным точкам). После этого мы должны либо суметь записать корни уравнений (т. е. искомые точки) в виде некоторых выражений, содержащих в конечном числе операции сложения, умножения, деления и извлечения квадратного корня, примененные к первоначально заданным числам, либо установить, что таких выражений не может существовать.

В первом случае мы сможем затем геометрически получить ответ на задачу, строя с помощью циркуля и линейки корни нашей системы уравнений.

Гораздо интереснее второй случай, потому что мы сталкиваемся здесь с вопросом нового типа: *как установить, что корни данной системы уравнений не принадлежат допустимому расширению данного поля?*

2.3. Алгебраические рассмотрения[1]). Ответ на поставленный вопрос не прост. Больше того, если не накладывать никаких ограничений на систему уравнений, которая может получиться в результате, то даже не удастся высказать никаких общих соображений по этому поводу. Мы поэтому наложим следующее условие на рассматриваемый класс задач: их решение должно сводиться к решению системы уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \\ F_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где x_i — неизвестные точки, а F_i — *многочлены* от переменных x_i, коэффициенты которых входят в поле K, соответствующее заданной первоначально системе точек. (Задачи трисекции угла и удвоения куба принадлежат к этому типу; задача квадратуры круга не принадлежит. Об этом мы еще скажем позже.)

Если геометрическая задача правильно поставлена, в частности если начальных данных достаточно, то она должна допускать только конечное число ответов. В алгебре доказывается, что тогда систему уравнений (3)

[1]) Этот пункт рекомендуем при первом чтении статьи пропустить и перейти сразу к п 2.4. Ущерба для понимания геометрической части статьи при этом не произойдет.

можно значительно упростить, сведя ее методом исключения к виду

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1(x_1)=0,\\ &\Phi_2(x_2)=0,\\ &\cdots\cdots\\ &\Phi_n(x_n)=0, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

где на этот раз $\Phi_i(x_i)$ — многочлены с коэффициентами в поле K, каждый из которых зависит лишь от *одной* переменной Правда, при этом степени многочленов Φ_i могут значительно вырасти в сравнении со степенями многочленов F_i и, что еще хуже, у системы (4) могут появиться новые решения. Но первое затруднение имеет значение лишь при практическом счете, а второе мы не будем принимать во внимание, как прежде, считая, что если мы разберемся в возможности построения корней системы (4), то отобрать из них решения, дающие ответ геометрической задачи, будет уже делом доступным.

В свою очередь, построение корней системы (4) сводится к построению корней многочленов от одной переменной с коэффициентами в поле K. Пусть $\Phi(x)$ — такой многочлен. Если нам удастся разложить его на два множителя $\Phi(x)=\Phi_1(x)\,\Phi_2(x)$, ни один из которых не является постоянной величиной, и оба эти множителя имеют коэффициенты из поля K, то достаточно будет изучить вопрос о построении корней каждого из этих множителей в отдельности. Многочлен $\Phi(x)$, который нельзя разложить на множители таким образом, называется *неприводимым над полем* K. (Если ясно, какое поле K имеется в виду, мы будем иногда для краткости называть такой многочлен просто *неприводимым*.) Следует, однако, отчетливо понимать, что неприводимость многочлена существенно зависит от поля, над которым этот многочлен рассматривается. Над полем комплексных чисел, например, любой многочлен выше первой степени приводим, — этот результат ранее часто называли «основной теоремой алгебры».

Из всего сказанного вытекает, что при принятых ограничениях мы пришли к следующему вопросу. *Дан неприводимый многочлен с коэффициентами в поле* K. *Содержатся ли его корни в некотором допустимом расширении поля* K?

Вопрос не вполне четко поставлен: некоторые корни, казалось бы, могут содержаться в допустимом расширении, а другие нет. Здесь, однако, предположение неприводимости позволяет установить следующий важный результат.

Теорема 1. *Если один из корней неприводимого многочлена над полем* K *принадлежит допустимому расширению поля* K, *то и остальные корни принадлежат допустимому расширению.*

(Отсюда, конечно, следует, что если хоть какой-нибудь из корней этого многочлена не принадлежит допустимому расширению, то и все остальные обладают этим же свойством.)

Мы не сможем привести здесь доказательства этой теоремы в общем случае. Оно требует введения довольно трудных алгебраических понятий и по существу принадлежит к теории Галуа. При разборе конкретных примеров, однако, нам будут встречаться главным образом неприводимые многочлены третьей степени. Для этого простейшего случая мы ниже докажем теорему 1, тем самым оправдав возможность ее последующих применений.

Читателю следует внимательно отнестись к логической структуре рассуждений, связанных с этой теоремой. В качестве следствия из нее в п. 2.5 мы получим важный результат, который уже можно будет непосредственно применять к доказательству неразрешимости геометрических задач.

2.4. Случай многочленов третьей степени. Пусть $\Phi(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ — неприводимый многочлен третьей степени с коэффициентами в поле K, т. е. такой многочлен, что его нельзя разложить в произведение двух многочленов с коэффициентами из поля K, один из которых имеет степень 1, а другой — степень 2. Мы докажем ниже, что ни один из его корней не может принадлежать допустимому расширению K. Но сначала покажем, что справедлива следующая

Теорема 1′. *Если один из корней многочлена $\Phi(x)$ принадлежит некоторому допустимому расширению поля K, то два других корня также принадлежат допустимому расширению* [1]).

Доказательство. Пусть цепочка квадратичных расширений

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_n = K'$$

выбрана так, что ее длина (т. е. число n) является *наименьшей возможной* из всех длин цепочек, приводящих к допустимым расширениям поля K, которые содержат какой-нибудь корень многочлена Φ. Из неприводимости многочлена Φ следует, что $n \geqslant 1$. Соответствующий корень (содержащийся в поле K') обозначим символом $x_1 = a + b\sqrt{z}$, где $K_n = K_{n-1}(\sqrt{z})$; $a,\ b,\ z \in K_{n-1}$. Так как $x_1 \in K_{n-1}$, то $b \neq 0$. Имеем теперь

$$0 = \Phi(a + b\sqrt{z}) = \Phi_1(a,\ b,\ z) + \Phi_2(a,\ b,\ z)\sqrt{z};$$

$$\Phi(a - b\sqrt{z}) = \Phi_1(a,\ b,\ z) - \Phi_2(a,\ b,\ z)\sqrt{z},$$

где Φ_1 и Φ_2 — некоторые многочлены от трех переменных с коэффициентами в поле K. Поэтому числа $\Phi_1(a,\ b,\ z)$ и $\Phi_2(a,\ b,\ z)$ принадлежат полю K_{n-1}; тогда из первого равенства вытекает, что $\Phi_1(a,\ b,\ z) = \Phi_2(a,\ b,\ z) = 0$ (потому что $\sqrt{z} \in K_{n-1}$), а из второго вытекает, что $\Phi(a - b\sqrt{z}) = 0$. Тем самым показано, что число $x_2 = a - b\sqrt{z} \in K_n$ является другим корнем уравнения $\Phi(x) = 0$ (отличным от x_1, так как $b \neq 0$). После этого найти третий корень уже совсем нетрудно:

$$x_3 = -p - (x_1 + x_2) = -p - 2a.$$

Очевидно, он тоже принадлежит допустимому расширению K_n. Теорема доказана.

Заметим, что достаточно добавить к этому доказательству одну фразу, чтобы установить справедливость следующего предложения.

---

[1]) В самом простом, но важном случае, огда $p = q = 0$, это совсем легко доказать. Действительно, гогда $x_2 = \varepsilon x_1$, $x_3 = \varepsilon^2 x_1$, где $\varepsilon = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ — первообразный корень третьей степени из единицы. Число ε, очевидно, принадлежит допустимому расширению поля K; следовательно, числа εx_1 и $\varepsilon^2 x_1$ также принадлежат допустимому расширению. В общем случае доказательство несколько сложнее.

Теорема 2′. *Если* $\Phi(x)$ *— неприводимый многочлен третьей степени с коэффициентами из поля* K, *то ни один его корень не принадлежит допустимому расширению поля* K.

В самом деле, $x_3 = -p-2a \in K_{n-1}$, что противоречит определению числа n (напомним, что $n \geqslant 1$, и потому поле K_{n-1} определено).

Таким образом, изложенное доказательство теоремы 1′ оперирует с пустым множеством объектов: многочленов третьей степени, удовлетворяющих условию теоремы 1′, вообще не существует!

Тем не менее, конечно, никаких логических несообразностей наши рассуждения не содержат: «условная» теорема 1′ сохраняет свою силу независимо от отрицательного результата теоремы 2′ и мы выделили отдельно эту теорему, поскольку она показывает, какие соображения применяются для доказательства теоремы 1 в общем случае. С другой стороны, указанный способ доказательства теоремы 2′ не поддается обобщению на случай произвольной степени, и сама эта теорема заменяется более сложной по форме теоремой Гаусса (см. теорему 2, п. **2.5**).

2.5. Теорема Гаусса. Мы назовем так следующую теорему, которую выведем из теоремы 1 п. 2.3.

Теорема 2. *Если корни неприводимого над полем* K *многочлена* $\Phi(x)$ *принадлежат допустимому расширению, то степень этого многочлена равна* 2^n, *где* $n \geqslant 1$ *— некоторое целое число.*

Из этой теоремы снова следует, что корни неприводимых многочленов степени 3 вообще не могут принадлежать допустимым расширениям, потому что $3 \neq 2^n$ ни при каком целом значении n [1]).

Хотя в формулировке теоремы 2 участвуют такие понятия, как многочлен и его корни, появляющиеся в результате непосредственных подсчетов, в доказательстве удобно работать не с отдельными числами, а с полями. Дело здесь обстоит так же, как и в доказательстве основной леммы п. 2.1.

Для переформулировки условия теоремы на языке теории полей возьмем какой-нибудь один корень θ многочлена $\Phi(x)$ и рассмотрим расширение $K(\theta)$ поля K. Ясно, что если $\theta \in K'$, то и $K(\theta) \subset K'$. Обратное утверждение тоже, очевидно, справедливо. Поле $K(\theta)$ удобно тем, что в его терминах нетрудно выразить и понятие «степень многочлена $\Phi(x)$»: она просто совпадает со степенью конечного расширения $(K(\theta) \overset{2}{\supset} K)$. [Напомним, что это означает. Любое конечное расширение L поля K является линейным пространством конечной размерности [2]) над этим полем. Иначе говоря, существуют такие n элементов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$, образующие *базис* поля L над полем K, что любой элемент λ поля L представляется однозначно в виде $\lambda = k_1\lambda_1 + \ldots + k_n\lambda_n$, где $k_1, \ldots, k_n \in K$. Число n называется *степенью расширения* и обозначается символом $(L \overset{n}{\supset} K)$. В случае, когда $L = K(\theta)$, в качестве элементов λ_i всегда можно взять просто степени числа θ, т. е. элементы $1 = \theta^0, \theta, \ldots, \theta^{n-1}$, где n — степень многочлена $\Phi(x)$.]

---

[1]) При первом чтении статьи рекомендуем после чтения этого места обратиться к геометрическим следствиям (§ 3).

[2]) См. статью «Векторные пространства и линейные преобразования» в кн. II ЭЭМ.

Теперь мы можем следующим образом переформулировать теорему 2: *если расширение* $L \supset K$ *поля* K *содержится в допустимом расширении поля* K, *то степень* $(L:K)$ *равна* 2^n, *где* $n \geqslant 1$ — *целое число* [1]).

Нам понадобится следующий простой результат. Пусть $K \subset L \subset M$ — цепочка конечных расширений Положим $l = (L:K)$, $m = (M:K)$, $n = (M:L)$ Тогда

$$m = ln \tag{5}$$

Доказывают это равенство обычно следующим образом. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — базис поля L над полем K; $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — базис поля M над полем L. Тогда элементы $(\lambda_1\mu_1, \lambda_1\mu_2, \ldots \lambda_1\mu_n; \ldots; \lambda_l\mu_1, \ldots, \lambda_l\mu_n)$, т. е. совокупность всевозможных попарных произведений $\lambda_i\mu_j$, образуют базис поля M над полем K. Но количество элементов в этом базисе, совпадающее со степенью $(M:K) = m$, в точности равно ln.

Из равенства (5) уже сразу следует теорема 2. В самом деле, пусть $L = K(\sqrt{z})$ — квадратичное расширение поля K. Тогда степень его равна в точности 2, потому что в качестве базиса расширения L над K можно взять элементы $(1, \sqrt{z})$. Поэтому степень любого допустимого расширения

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_m = K', \quad K_i = K_{i-1}(\sqrt{z_{i-1}}), \; z_{i-1} \in K_{i-1}$$

равна (в силу соотношения (5)) 2^m. Но тогда степень $(L:K)$ любого расширения L поля K, содержащегося в допустимом расширении K', должна (снова из-за соотношения (5)) делить число 2^m. Поэтому $(L:K) = 2^n$, $0 \leqslant n \leqslant m$. Теорема 2 доказана.

§ 3. Классические задачи

3.1. Удвоение куба. Теперь мы уже можем применить развитую общую теорию к ряду геометрических задач. Наша основная цель состояла в том, чтобы научиться доказывать неразрешимость некоторых задач, т. е. невозможность построить ряд геометрических объектов с помощью циркуля и линейки. В соответствии с этим и подобраны примеры.

Главным нашим инструментом будет теорема 2. Ход исследования всякой задачи следующий: мы переводим ее на алгебраический язык, составляем уравнения для искомых точек, выясняем их степень и неприводимость. Если степень не равна 2^n, а многочлен неприводим, то искомую точку (см. теорему 2), нельзя построить с помощью циркуля и линейки, так что соответствующая задача на построение неразрешима [2]).

---

[1]) В такой формулировке этот результат представляется даже более сильным — заранее совсем неочевидно, что *всякое* конечное расширение $L \supset K$ имеет вид $L = K(\theta)$, где θ — корень неприводимого многочлена. Это, однако, можно доказать. Нам это утверждение не понадобится, потому что из доказательства переформулированной теоремы 2, во всяком случае, теорема 2 сразу же следует.

[2]) Читатель, ограничившийся ранее изучением теорем 1′ и 2′, будет рассуждать так: если многочлен неприводим, а его степень равна трем, то искомую точку, как явствует из теоремы 2′, нельзя построить с помощью циркуля и линейки, так что соответствующая задача на построение неразрешима. Это позволяет полностью понять приведенные в тексте задачи 1, 2, 3.

Задача 1. *Задан куб (длиной своего ребра). Требуется построить другой куб (т. е. его ребро), объем которого вдвое больше объема данного куба.*

Начало исследования очевидно. Даны две точки (ребро куба). Как обычно, принимаем их за точки 0 и 1 на комплексной плоскости. Длина ребра удвоенного куба равна вещественному значению $\sqrt[3]{2}$; для построения точки $\sqrt[3]{2}$ мы должны изучить многочлен x^3-2. Степень его равна трем, и если он неприводим над основным полем $K=Q(i)$ (Q — поле рациональных чисел), то задача удвоения куба неразрешима. Докажем, что многочлен x^3-2 действительно неприводим.

Если бы многочлен x^3-2 был приводим над полем $Q(i)$, то один из множителей обязательно был бы первой степени. Если бы соответствующий корень не был вещественным, то выделился бы и другой множитель первой степени с сопряженным корнем, а оставшийся третий множитель был бы линейным и имел бы уже вещественный корень. Это рассуждение применимо к *любому многочлену третьей степени* с вещественными коэффициентами: если такой многочлен приводим над полем $Q(i)$, то один из множителей линеен и имеет вещественный, а следовательно, даже рациональный корень.

Но многочлен x^3-2 не имеет рационального корня, потому что единственное вещественное значение $\sqrt[3]{2}$ иррационально.

Напомним доказательство этого факта. Допустим, что $\sqrt[3]{2}=p/q$, где p, q — взаимно простые целые числа. Тогда $p^3=2q^3$, так что число p должно быть четным; пусть $p=2p_1$, тогда $4p_1^3=q^3$ и, следовательно, число q тоже должно быть четным, а это противоречит тому, что p и q взаимно просты.

Интересно, что на последней стадии решения геометрической задачи нам пришлось воспользоваться даже чисто арифметическими соображениями, хотя пока и не очень сложными!

3.2. Трисекция угла. Задача 2. *Дан угол* φ; *построить угол* $\frac{1}{3}\varphi$.

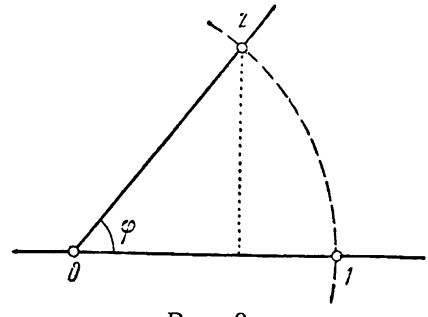


Рис. 9.

Задать угол φ — значит задать три точки: точку 0 — его вершину, точку 1 на одной из сторон, которую мы примем за вещественную ось, и точку z, лежащую на другой стороне и имеющую модуль $|z|=1$ (рис. 9). Очевидно, $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Таким образом, поле K, соответствующее заданной системе точек, имеет вид

$K = Q(i, \cos\varphi + i\sin\varphi)$. Построить угол $\frac{\varphi}{3}$ — значит построить число $\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}$ или, что равносильно, построить число $\cos\frac{\varphi}{3}$. В силу известных формул тригонометрии,

$$\cos\varphi = \cos\left(2\frac{\varphi}{3} + \frac{\varphi}{3}\right) = \cos 2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3} - \sin 2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3} =$$

$$= \left(2\cos^2\frac{\varphi}{3} - 1\right)\cos\frac{\varphi}{3} - 2\sin\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3} =$$

$$= 2\cos^3\frac{\varphi}{3} - \cos\frac{\varphi}{3} + 2\left(1 - \cos^2\frac{\varphi}{3}\right)\cos\frac{\varphi}{3}$$

или

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}.$$

Таким образом, число $\cos\frac{\varphi}{3}$ является корнем уравнения

$$4x^3 - 3x - \cos\varphi = 0. \tag{6}$$

Итак, мы должны построить корень уравнения (6).

Перед нами снова многочлен третьей степени; мы должны разобраться, приводим ли он над полем $K = Q(i, \cos\varphi + i\sin\varphi)$. При *некоторых* значениях φ он, безусловно, приводим; например, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $K = Q(i)$:

$$4x^3 - 3x - \cos\frac{\pi}{2} = 4x^3 - 3x = x(4x^2 - 3).$$

Это соответствует хорошо известному обстоятельству: прямой угол можно разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки (при желании читатель может осуществить «алгебраически» это построение, решив уравнение $4x^2 - 3 = 0$ и построив его корни).

Можно придать точный смысл следующему утверждению, устанавливающему в некотором смысле противоположный результат: при *общем* значении φ многочлен $4x^3 - 3x - \cos\varphi$ *неприводим* над полем $K = Q(i, \cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Слово «общий» в этой фразе можно определять разными способами; обсуждение этих способов и доказательство завели бы нас слишком далеко. Поэтому ограничимся указанием *конкретного* значения угла φ, который нельзя циркулем и линейкой разделить на три равные части. Это — угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Для доказательства следует установить, что при $\varphi = \frac{\pi}{3}$ многочлен, стоящий в левой части уравнения (6), неприводим над полем

$$Q\left(i, \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = Q\left(i, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = Q(i, \sqrt{3}),$$

т. е., что левая часть уравнения

$$8x^3 - 6x - 1 = 0 \tag{7}$$

является неприводимым многочленом над полем $Q(i, \sqrt{3})$. Если мы докажем, что многочлен $8x^3 - 6x - 1$ неприводим над полем рациональных чисел Q, то отсюда будет следовать, что он неприводим и над полем $Q(i, \sqrt{3})$, потому что любое допустимое расширение поля $Q(i, \sqrt{3})$ является допустимым расширением поля Q.

Решая задачу об удвоении куба, мы уже установили, что для доказательства неприводимости кубического многочлена над полем рациональных чисел достаточно установить, что у него нет рациональных корней. Предположим, что такой корень есть; положим $2x = \frac{p}{q}$, где p, q — целые взаимно простые числа. Из равенства (7) находим

$$p^3 - 3pq^2 = q^3,$$

так что q^3 делится на p и, значит, $p = \pm 1$. Тогда q удовлетворяет уравнению $q^3 \pm 3q^2 \mp 1 = 0$; так как q — целое число, то оно должно быть делителем свободного члена этого уравнения, так что если целый корень есть, он равен ± 1. Но, очевидно, соответствующие значения $x = \pm\frac{1}{2}$ не являются решениями уравнения (7). Следовательно, оно вовсе не имеет рациональных решений.

Итак, циркулем и линейкой нельзя разделить на три равные части угол $\frac{\pi}{3} = 60°$, т. е. нельзя построить угол $\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3} = 20°$.

3.3. Построение треугольника по его биссектрисам. Сейчас мы разберем одну менее традиционную задачу. Треугольник определяется своими тремя линейными элементами: тремя сторонами, тремя высотами, тремя медианами или, наконец, тремя биссектрисами. Построить треугольник циркулем и линейкой по заданным сторонам высотам или медианам сравнительно нетрудно. Не так обстоит дело с биссектрисами. Оказывается, что *задача построения треугольника по заданным отрезкам биссектрис его углов от вершины до противоположной стороны неразрешима с помощью циркуля и линейки.*

Как и в задаче о трисекции угла, мы не станем разбирать вопрос о неразрешимости «в общем случае» и проведем соответствующее рассуждение для частных значений длин биссектрис. Удобно считать, что две из них равны, потому что тогда удается свести задачу к исследованию кубического многочлена; если этого предположения не делать, пришлось бы рассмотреть уравнение шестнадцатой

степени. Мы будем опираться на следующую теорему [1]): *если отрезки биссектрис двух углов в треугольнике равны, то эти углы также равны, так что треугольник равнобедренный.* (Доказать геометрически эту теорему вовсе не легко!)

Задача 3. *Построить равнобедренный треугольник по данным отрезкам биссектрис его углов от вершин до противолежащих сторон.*

Воспользуемся одной общей формулой, вывод которой предоставим читателю.

Пусть дан треугольник с полупериметром p и углами α, β, γ; тогда длина биссектрисы угла α равна

$$l_\alpha = 2p\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}. \tag{8}$$

(Подобные же формулы, конечно, справедливы для l_β и l_γ.)

В нашем случае $\beta=\gamma$; отрезки l_α и l_β заданы. Можно считать, что $l_\beta=1$; длину отрезка l_α для краткости обозначим просто буквой l. Если бы мы могли построить циркулем и линейкой искомый треугольник, то мы могли бы построить также отрезок длины $\sin\frac{\beta}{2}$. Из формулы (8) мы выведем сейчас, что число $\sin\frac{\beta}{2}$ является корнем кубического многочлена над полем $Q(l)$ и что при некоторых рациональных значениях величины l этот многочлен неприводим. Таким образом, соответствующая задача неразрешима. (Убедитесь, что тем не менее при всех l, $0<l<\infty$, искомый треугольник существует!)

Применим формулу (8) к l_β и отыщем отношение $\frac{l_\alpha}{l_\beta}=l$, учитывая, что $\beta=\gamma$. Тогда получим

$$l=\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\beta\sin\beta}=\frac{\sin\frac{3\beta}{2}}{2\cos\beta} \tag{9}$$

(мы снова пользовались тем, что треугольник равнобедренный и, значит, $\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}-\beta$). Положим $\sin\frac{\beta}{2}=x$; тогда $\sin\frac{3\beta}{2}=3x-4x^3$; $\cos\beta=1-2x^2$. Из равенства (9) вытекает, что x является корнем уравнения

$$4x^3-4lx^2-3x+2l=0. \tag{10}$$

[1]) См., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 2 (М., Гостехиздат, 1952), задача 96 и ее решение.

Удобно взять $l=3$ и произвести замену переменного, положив $y=2x-2$. Число y является тогда корнем уравнения

$$y^3-15y-10=0.$$

Как и прежде, для доказательства неприводимости многочлена $y^3-15y-10$ достаточно установить, что у него нет рационального корня. Пусть такой корень есть, и он равен $\frac{p}{q}$, где p, q — взаимно простые целые числа. Тогда

$$p^3=5q^2(3p+2q),$$

следовательно, $p=5r$, где r — целое число, так что

$$25r^3=q^2(15r+2q).$$

Но последнее равенство невозможно, потому что q не делится на 5.

Наконец, разберем вкратце еще две классические задачи. Для полного их исследования изложенной выше теории оказывается недостаточно, и некоторые необходимые результаты нам придется принять без доказательства.

3.4. Построение правильных многоугольников. Задача 4 *Дана окружность радиуса единица; требуется вписать в нее правильный многоугольник с заданным числом сторон.*

Пусть число сторон равно n; в удобной системе координат задача сводится к построению корней n-й степени из единицы, т. е. корней многочлена z^n-1. Этот многочлен безусловно приводим: он всегда делится на $z-1$, и даже на $z^{\frac{n}{2}}+1$, если n четно. Согласно общему правилу, следует разложить многочлен z^n-1 на неприводимые множители, однако мы сначала несколько упростим задачу, пользуясь ее геометрическим истолкованием.

Пусть $n=pq$, где p, q — взаимно простые целые числа, оба не равные единице. Покажем, что *если можно построить циркулем и линейкой правильный n-угольник, то можно построить также правильные p-угольник и q-угольник*, и наоборот, *если можно построить правильные p-угольник и q-угольник, то можно построить и правильный pq-угольник*. Первое утверждение очевидно, второе вытекает из того, что если ε_i ($i=1, \ldots, p$), η_j ($j=1, \ldots, q$) — все корни из единицы p-й и q-й степени соответственно, то попарные произведения $\varepsilon_i\eta_j$ представляют собой все корни из единицы pq-й степени. Отсюда следует, что достаточно разобрать вопрос о многоугольниках *с p^k сторонами, где p — простое число, а $k\geqslant 1$ — любое целое положительное число.*

Если $p=2$, то при любом k все корни многочлена $x^{2^k}-1$ принадлежат допустимым расширениям поля $Q(i)$ (и, значит, поля Q). Читателю полезно проверить это утверждение алгебраически; геометрически оно вытекает из того, что любую дугу можно разделить циркулем и линейкой на 2^k равных частей.

Пусть теперь $p\geqslant 3$. Прежде всего $x^{p^k}-1=(x^{p^{k-1}}-1)(x^{p^{k-1}(p-1)}+\ldots+1)$. Корни первого множителя — это все непервообразные корни из единицы p^k-й степени. Для построения p^k-угольника необходимо уметь

строить хотя бы один первообразный корень; этого и достаточно, потому что тогда все остальные корни будут его степенями. Поэтому остается выяснить, принадлежат ли допустимому расширению поля $Q(i)$ (или, что все равно, поля Q) корни многочлена $x^{p^{k-1}(p-1)}+x^{p^{k-1}(p-2)}+\ldots+1$.

Ответ (по крайней мере, частичный) получить очень легко, если принять без доказательства, что *этот многочлен неприводим* (существует ряд доказательств этого факта, и все они используют довольно тонкие арифметические соображения,— причиной неразрешимости геометрической задачи в конечном счете оказываются снова некоторые свойства целых чисел!). Тогда из теоремы 2 (стр. 219) следует, что если $p^{k-1}(p-1)\neq 2^n$, то правильный p^k-угольник нельзя построить циркулем и линейкой.

Тем самым устанавливается, что если p^k-угольник можно построить, то либо $p=2$, либо $p>2$, и тогда обязательно $k=1$ и $p-1=2^n$. Из того, что мы доказали, однако, нельзя заключить, что если $p=2^n+1$ — простое число, то правильный p-угольник можно построить циркулем и линейкой. Это утверждение на самом деле справедливо, и оно было впервые доказано Гауссом. При $n=1$ получается число $p=2^1+1=3$; при $n=2$ — число $p=5$; при $n=3$ получаем не простое число $2^3+1=9$; при $n=4$ получаем $p=17$. Возможность построить циркулем и линейкой правильный 17-угольник вообще не была известна до работы Гаусса, и найти такое построение с помощью только геометрической интуиции очень трудно, если не невозможно. В алгебраической формулировке дело сводится к установлению того, что корни 17-й степени из единицы можно выразить через числа поля $Q(i)$ с помощью извлечения квадратных корней; это — задача не легкая, но вполне доступная для изложения даже на этих страницах и, по существу, не требующая никаких дополнительных знаний Мы, однако, оставим этот вопрос в стороне.

3.5. Квадратура круга. Задача 5. *Дан круг; построить квадрат, равновеликий этому кругу.*

Мы уже упоминали, что эта задача тоже неразрешима с помощью циркуля и линейки. Однако природа этой неразрешимости совершенно не такая, как у разобранных до сих пор задач.

Как обычно, радиус круга можно считать единичным; дело сводится тогда к построению квадрата площади π, т. е. отрезка длины $\sqrt{\pi}$. Если бы мы могли построить отрезок длины π, то мы могли бы построить и отрезок длины $\sqrt{\pi}$, и наоборот. Таким образом, истинная трудность задачи о квадратуре круга заключается в задаче о *спрямлении* (полу)окружности, т. е. в построении отрезка длины π.

Мы пришли к вопросу: принадлежит ли число π допустимому расширению поля рациональных чисел Q?

В прежних задачах отрицательный ответ на такого рода вопросы получался так: искомое число было корнем какого-то многочлена с рациональными коэффициентами, и дальше мы старались применить к этому многочлену или к его делителю теорему $2'$ (или теорему 2). В этом месте стоит напомнить и обратный результат: если число x принадлежит допустимому расширению поля K, то оно, во всяком случае, является корнем какого-то многочлена с коэффициентами в поле K (этот результат справедлив для любых конечных расширений поля K, а всякое допустимое расширение, по определению, конечно).

Оказывается, что число π не является корнем вообще никакого многочлена с рациональными коэффициентами. Принято выражать это, называя число π *трансцендентным*[1]).

Доказательство трансцендентности числа π использует трудные аналитические и арифметические средства. Из этого доказательства и следует невозможность квадратуры круга с помощью циркуля и линейки, и даже с помощью ряда других чертежных средств (например, лекал, ограниченных отрезками алгебраических кривых над полем рациональных чисел, которые дают возможность удвоить куб или произвести трисекцию угла).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Клейн, Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии, перев. с нем., Казань, 1898.

Небольшая книжка, содержащая обработку двух лекций, прочитанных знаменитым математиком Ф. Клейном немецким учителям математики. Первая часть книги содержит изложение вопроса о геометрических построениях, сводящихся к решению алгебраических уравнений, вторая — учение о трансцендентных числах и элементарное (но совсем не простое) доказательство неразрешимости задачи квадратуры круга.

[2] Г. Вебер и И. Вельтштейн, Энциклопедия элементарной математики, перев. с нем., т. 1, Одесса, 1911.

Обширная книга, посвященная вопросам арифметики и алгебры. К теме настоящей статьи имеют отношение: гл. XVIII Деление окружности на равные части, гл. XIX Доказательства невозможности (эта глава начинается с решения вопроса о классе задач на построение, разрешимых с помощью циркуля и линейки) и гл. XXVII. Трансцендентность чисел e и π.

[3] М. М. Постников, Теория Галуа, М., Физматгиз, 1963.

Книга содержит элементарное изложение алгебраической теории Галуа, в частности современное решение вопроса о задачах на построение, разрешимых или неразрешимых циркулем и линейкой.

[4] А. Г. Школьник, Задача деления круга, М., Учпедгиз, 1961.

Небольшая брошюра, рассчитанная на широкий круг читателей.

[5] Г. И. Дринфельд, Трансцендентность чисел π и e, Харьков, Изд. Харьковского университета, 1952.

В этой небольшой книге содержится элементарное решение вопроса о неразрешимости задачи квадратуры круга.

См. также книги А. Адлера и L. Bieberbach'a, указанные в списке литературы к статье «Общие принципы геометрических построений», (стр 203 и 204)

[1]) См. статью «Элементы теории чисел» в кн. I ЭЭМ, гл. VI, в частности § 17.

МЕТОДЫ ИЗОБРАЖЕНИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Постановка задачи 229
1.1 Задача отображения пространства на плоскость 229
1.2 Циклография 229
1.3 Метод Федорова 230
1.4. Основные требования к методам изображения 231
1 5. Неоднозначность обратного отображения 232
1.6 Проекционные методы изображения 233

§ 2. Параллельные проекции 234
2.1. Свойства параллельной проекции 234
2 2. Метод параллельной проекции на одну плоскость 236
2.3 Жесткие и свободные изображения 238
2.4 Изображение плоских фигур 240
2.5. Примеры 244

§ 3. Параллельная аксонометрия 247
3.1. Теорема Польке — Шварца 247
3.2. Полные и неполные изображения 252
3.3 Понятие о параллельной аксонометрии 255
3.4. Условные изображения 258
3.5 Примеры построения аксонометрических изображений 259
3.6 Общие методы построения аксонометрических изображений 261
3 7. Аксонометризация чертежа 266
3.8. Ортогональная (прямоугольная) аксонометрия 271

§ 4 Метод Монжа 275
4.1. Комбинированные изображения 275
4.2. Сущность метода Монжа 275

§ 5. Центральные проекции 277
5.1 Свойства центральной проекции 277
5 2 Проективные координаты 279
5.3 Использование проективных координат для построения изображений 281
5.4 Понятие о центральной аксонометрии 282

§ 6. Построения на изображении 288
6.1. Построения на проекционном чертеже 288
6.2. Примеры 288

Литература 289

§ 1. Постановка задачи

1.1. Задача отображения пространства на плоскость. Существуют инструменты, оставляющие след на бумаге (например, карандаш или кисть), но не существует чертежного инструмента, оставляющего след при движении в пространстве. Поэтому всякий плоский предмет можно точно изобразить на бумаге, и здесь не возникает вопроса о каких-либо методах изображения (кроме только подобного изменения размеров). Если же требуется изобразить пространственный (трехмерный) предмет, то по упомянутой причине его нельзя точно скопировать. Мы исключаем из рассмотрения изготовление моделей, копирующих оригинал. Этот процесс слишком сложен и может применяться лишь в исключительных случаях. В повседневной же практике мы вынуждены довольствоваться изображением пространственных предметов на плоскости.

Условимся о следующих терминах.

Предмет, подлежащий воспроизведению, называется оригиналом.

Плоская фигура, воспроизводящая или представляющая оригинал, называется изображением.

Совокупность правил, определяющих, каким образом, зная оригинал, получить его изображение, составляет метод изображения. По причинам, которые будут выяснены ниже, существует не один, а много различных методов изображения.

1.2. Циклография. При всяком методе изображения точки пространства изображаются какими-либо объектами на плоскости. При этом не обязательно, чтобы изображение точки было точкой. Существует, например, метод изображения, называемый циклографией, дающий изображения точек в виде *ориентированных окружностей* [1]).

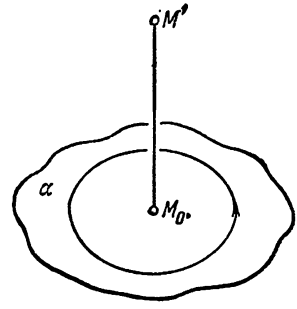


Рис. 1.

Пусть α — плоскость изображения, а M' — произвольная точка пространства (рис. 1). Опустим из M' перпендикуляр на плоскость α и обозначим основание этого перпендикуляра через M_0. Построим, далее, окружность с центром в M_0, радиус которой равен $M'M_0$. Наконец, установим на этой окружности такое направление обхода, которое с точки зрения наблюдателя, находящегося в точке M', воспринимается как направление против часовой стрелки. Полученная ориентированная окружность и считается изображением точки M'. Изображением точки, лежащей в плоскости α, служит она сама.

---

[1]) Т. е. окружностей, на которых задано определенное направление обхода, на рисунках указываемое стрелкой.

В этом случае можно считать изображение окружностью нулевого радиуса.

Циклография осуществляет взаимно однозначное соответствие между точками пространства и ориентированными окружностями на плоскости.

Две точки, симметричные относительно плоскости α, изображаются одной и той же окружностью, но с разными направлениями обхода.

На рис. 2 показаны изображения прямых. На рис. 2,*а* изображена прямая, наклоненная к плоскости α под углом, меньшим 45°, на рис. 2,*б* — перпендикуляр к плоскости α.

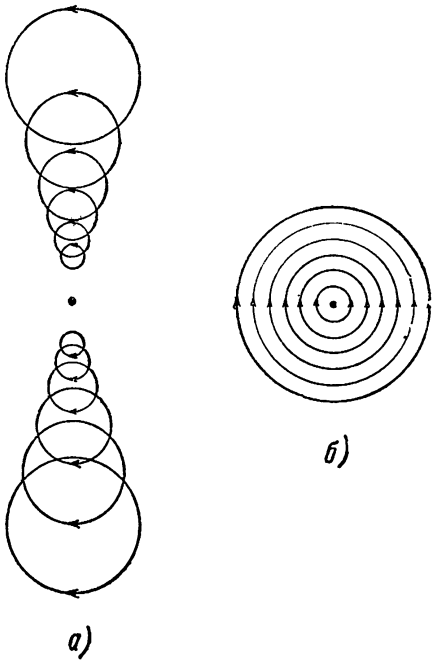


Рис. 2.

1.3. Метод Федорова. Этот метод заключается в том, что точки пространства изображаются на плоскости *параллельными векторами*. На плоскости α на некоторой прямой a одно направление выбирается как положительное; противоположное направление на этой прямой считается отрицательным. Из двух полупространств, определяемых плоскостью α, выбирается одно, которое считается положительным; другое считается отрицательным. Пусть теперь M' — какая-нибудь точка пространства. Опустим из нее перпендикуляр на плоскость α и обозначим основание этого перпендикуляра через M_0. Проведем через M_0 прямую, параллельную a. Отложим на этой прямой отрезок M_0M, длина которого равна расстоянию точки M' от плоскости α, т. е. $M'M_0$. При этом будем откладывать отрезок M_0M в положительном (отрицательном) направлении от точки M_0, если точка M' лежит в положительном (отрицательном) полупространстве. Построенный таким образом (связанный!) вектор [1]) $\overline{M_0M}$ считается изображением точки M'. Изображением точки, лежащей в плоскости α, считается сама эта точка. В этом случае можно считать изображение нуль-вектором.

На рис. 3 изображена пара точек, симметричных относительно плоскости α. На рис. 4,*а* изображена прямая, наклонная к плоскости α, а на рис. 4,*б* — прямая, параллельная плоскости α.

---

[1]) Ср. подстрочное примечание на стр. 295 этой книги ЭЭМ.

Итак, изображение точки может быть и не точкой. Однако методы изображения такого рода не обладают наглядностью и мало распространены. Поэтому, упомянув о них, мы в дальнейшем будем рассматривать только те методы, которые *точку изображают точкой.*

1.4. Основные требования к методам изображения. К методам изображения предъявляются два основных требования:

1) наглядность,

2) удобоизмеримость.

Наглядность — это способность изображения вызывать зрительное впечатление, сходное с тем, какое вызывает оригинал. Изображение должно в некотором смысле заменить оригинал. Разумеется, мы

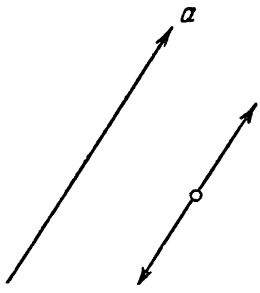


Рис. 3.

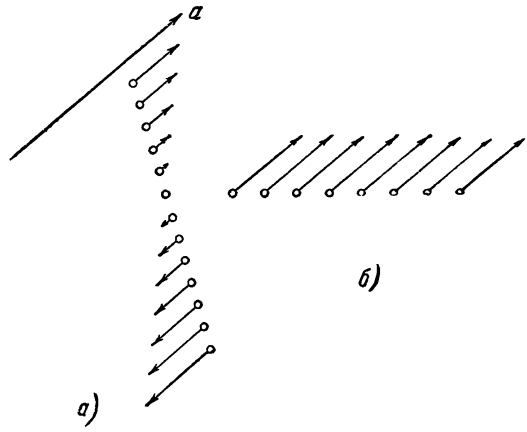


Рис. 4.

имеем в виду только геометрическую форму оригинала. Зрительное впечатление, вызываемое оригиналом, зависит от многих его свойств, например от окраски, но окраска не относится к ведению геометрии. Можно подвергать геометрическому анализу и произведения живописи, но только с точки зрения рисунка, отвлекаясь от красок, фактуры и других особенностей.

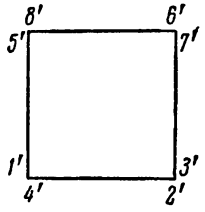
Наглядность можно понимать и так: всякий человек, рассматривающий изображение, должен понимать, что́ оно изображает. Для этого не требуется специальной подготовки или знания каких-нибудь условностей. Изображения, показанные на рис. 1—4, не обладают наглядностью. Не зная соглашений, изложенных в тексте, нельзя понять, что́ изображено на этих рисунках.

Удобоизмеримость понимается так: по изображению можно, и притом несложно, восстановить оригинал как твердое тело, т. е. определить все его размеры. Заметим, что изображение не всегда определяет оригинал метрически точно. Существуют методы изображения, которые определяют оригинал только с точностью до подобия

или до аффинного преобразования и т. п.[1]) Однако в этих случаях достаточно добавления некоторых соглашений, чтобы оригинал определи ся метрически. Инженерный рисунок обычно определяет оригинал, который должен быть изготовлен, например здание, деталь машины и т. п. Ясно, что такой рисунок должен определять оригинал метрически точно.

Изображения на рис. 1—4 обладают удобоизмеримостью.

Требования наглядности и удобоизмеримости противоречат одно другому. При построении изображений для художественных целей предпочтение отдается наглядности. Поэтому художники всегда пользуются методом изображения (он называется центральной проекцией; см. § 5), обеспечивающим наилучшую наглядность по сравнению с другими методами. Удобоизмеримость при этом методе не очень хорошая: определять размеры оригинала хотя и можно, но для этого требуются сравнительно сложные построения.



Инженеры-машиностроители и работники некоторых других специальностей пользуются методом Монжа (см. ниже). Это — лучший метод по удобоизмеримости, но наглядность его мала. Человек, не обладающий специальной подготовкой, не сможет понять, что на рис. 5 изображен куб.

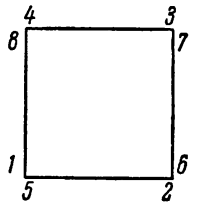


Рис. 5.

Самое большое распространение имеют методы изображения, в которых достигнут некоторый компромисс между требованиями наглядности и удобоизмеримости. Например, метод параллельной проекции лишь незначительно уступает по наглядности методу центральной проекции, зато построения для определения размеров предмета в этом методе значительно проще. Методом параллельной проекции строятся изображения пространственных фигур в книгах по геометрии.

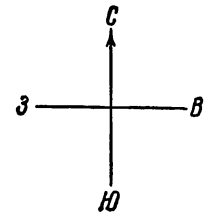
1.5. Неоднозначность обратного отображения. Точка в пространстве определяется тремя координатами, а точка на плоскости — двумя[2]). Можно доказать, что нельзя взаимно однозначно отобразить пространство (или даже малый объем пространства) на плоскость с сохранением непрерывности; это означает, что обратное отображение не будет однозначным. Поэтому точка изображения сама по себе без дополнительных данных не может определять точку оригинала.

[1]) См. в этой книге ЭЭМ статью «Геометрические преобразования», стр. 61—62.

[2]) Иными словами, пространство имеет три измерения, а плоскость — два (ср. стр. 370 и 377 этой книги ЭЭМ).

Во всяком методе изображения к точке изображения должен добавляться еще один параметр, и только тогда точка оригинала будет вполне определена. Это добавление параметра происходит в разных методах изображения по-разному.

Например, в проекциях с числовыми отметками из точки M пространства опускается перпендикуляр на плоскость изображения α. Пусть M — основание этого перпендикуляра. Около точки M делается числовая отметка, показывающая расстояние точки M' от плоскости α (т. е. длину перпендикуляра $M'M$); это расстояние дополнительно снабжается знаком + или — в зависимости от того, в каком полупространстве находится точка M'. Точка M вместе с числовой отметкой считается изображением точки M'.



При изображении не отдельных точек, а более сложных оригиналов числовую отметку не ставят около каждой точки, а соединяют линией все точки с одинаковой числовой отметкой и эту общую отметку надписывают около этой линии. Линии, состоящие из точек с одинаковыми числовыми отметками, называются горизонталями. На рис. 6. изображена верхняя часть горы. Юго-западный склон у нее наиболее пологий, а юго-восточный — наиболее крутой.

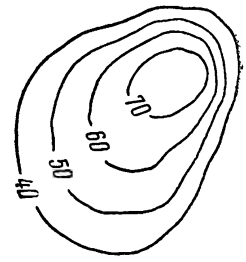


Рис. 6.

В этом методе числовая отметка и есть тот параметр, о необходимости которого говорилось выше. Точка изображения вместе с числовой отметкой вполне определяет точку оригинала.

В циклографии (см. рис. 1) недостающий параметр задается в виде радиуса окружности, в методе Федорова (см. рис. 3) — в виде длины вектора.

1.6. Проекционные методы изображения. В подавляющем большинстве случаев пользуются проекционными методами изображения. Это объясняется тем, что в проекционных методах процесс построения изображения близок к процессу зрения, т. е. к процессу образования изображения на сетчатке (разумеется, имея в виду только геометрическую, а не физиологическую сторону процесса зрения). Поэтому проекционные методы наиболее наглядны.

В дальнейшем мы будем рассматривать только проекционные методы изображения.

Проекционными называются все методы, в которых точка изображения либо служит непосредственной проекцией точки оригинала, либо после проектирования производится еще какое-нибудь

проективное преобразование[1]) (например, подобное преобразование т. е. изменение масштаба).

Проектирование осуществляется прямыми. В подавляющем большинстве случаев эти прямые принадлежат связке[2]). Напомним, что различают два вида связок: собственные (центральные) связки, состоящие из всех прямых, проходящих через одну точку (центр связки), и несобственные связки, состоящие из всех параллельных между собой прямых (в этом случае говорят, что центр связки — несобственная, т. е. бесконечно удаленная точка[3])). Можно сказать, что связка — это множество всех прямых, проходящих через одну точку, конечную или «бесконечно удаленную».

Итак, *мы будем рассматривать только отображения трехмерного пространства на плоскость проекционными методами, в которых проектирование осуществляется связкой прямых — центральной связкой или связкой параллельных прямых.*

Та область начертательной геометрии — науки об изображениях,— которая вследствие этих ограничений остается вне нашего поля зрения, по своему объему невелика и обслуживает некоторые узко специальные вопросы (например, в химии многокомпонентных сплавов иногда используется многомерная начертательная геометрия). Все технические чертежи и иллюстративные изображения, а также инженерные рисунки входят в очерченную нами область.

§ 2. Параллельные проекции

2.1. Свойства параллельной проекции. Выберем некоторую плоскость α за плоскость изображения (т. е. плоскость, на которой строятся изображения). Выберем также в пространстве некоторую (не параллельную плоскости α) прямую a, указывающую направление проектирования. [Точнее говоря, мы выбираем не фиксированную прямую (потому что прямая a может быть заменена любой параллельной ей прямой), а связку параллельных прямых; прямая a служит представителем этой связки, т. е. при помощи прямой a мы задаем связку.]

Пусть M' — какая-нибудь точка пространства. Проведем через M' прямую, параллельную a; она называется проектирующей прямой. Точка M пересечения этой прямой с плоскостью α считается изображением точки M'.

---

[1]) См стр. 110—121 этой книги ЭЭМ,

[2]) Существуют и такие проекционные методы, в которых для проектирования используется не связка, а какое-нибудь другое двухпараметрическое семейство прямых (конгруенция). Мы этих методов рассматривать не будем.

[3]) Ср. стр. 113 этой книги ЭЭМ.

Сделаем одно замечание, касающееся обозначений. Все обозначения, относящиеся к оригиналу, снабжаются штрихами, а для изображений употребляются те же буквы без штрихов. Например,

точка M' имеет изображением точку M,

прямая m' — прямую m.

Такой обычай объясняется тем, что только в начертательной геометрии, в которой методы изображения представляют предмет исследования, нам приходится иметь дело одновременно с оригиналом и изображением. Во всех других случаях мы имеем дело только с изображением. Рассматривая рисунки в учебнике геометрии, мы говорим «это — куб», «это — шар». На самом деле эти рисунки представляют «изображение куба» и «изображение шара». [Точно так же и произведения живописи представляют нам человека через посредство его изображения.] В начертательной же геометрии нам приходится одновременно показывать и оригинал (точка M' на рис. 7) и изображение (точка M на том же рисунке). Если бы мы условились оригинал обозначать буквами без штрихов, а изображения — буквами со штрихами, то на всех рисунках нам пришлось бы пользоваться только буквами со штрихами и лишь в начертательной геометрии встречались бы некоторые буквы без штрихов.

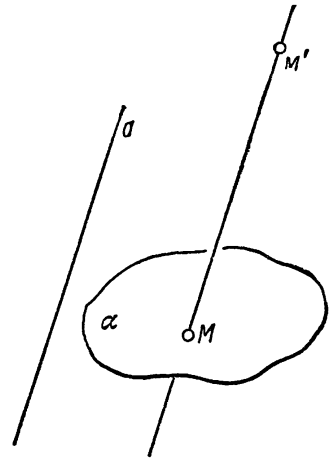


Рис. 7.

Отметим некоторые свойства, характерные для метода параллельных проекций. Доказательства мы во всех случаях предоставляем читателю.

1. *Каждой точке пространства однозначно соответствует точка на плоскости* α. Разумеется, это соответствие не взаимно однозначно. Все точки, принадлежащие одной проектирующей прямой, имеют одно и то же изображение.

При всех методах изображения точки, имеющие одно и то же изображение, называются конкурирующими точками. В параллельной проекции конкурирующие точки — те, которые лежат на одной проектирующей прямой.

2. *Прямая, если только она не проектирующая, имеет в качестве своего изображения также прямую линию; проектирующая прямая изображается точкой.*

Поясним, что все геометрические фигуры мы мыслим составленными из точек. Поэтому под изображением прямой следует понимать множество изображений всех ее точек.

3. *Параллельные прямые,* если только они не проектирующие и не лежат в одной проектирующей плоскости (т. е. плоскости

параллельной прямой a), *изображаются параллельными прямыми*. Отсюда следует, что изображение параллелограмма — параллелограмм (который может вырождаться в отрезок).

4. *Если точки A', B', C' принадлежат одной прямой* (не проектирующей), *то*

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

Точно так же, *если $A'B'$ и $C'D'$ — отрезки, лежащие на параллельных* (не проектирующих) *прямых, то*

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

Предложения 2—4 можно также сформулировать несколько иначе. Оригинал обладает различными свойствами. При параллельном проектировании некоторые из этих свойств, вообще говоря, теряются, т. е. не переносятся на изображение, а другие свойства сохраняются. Последние свойства называются инвариантными относительно параллельного проектирования [1]). Всякий параметр, характеризующий оригинал и не меняющий своего значения ни при каком параллельном проектировании, называется инвариантом параллельного проектирования.

Пользуясь этими понятиями, можно свойства 2—4 сформулировать так:

2′. *Свойство трех (или большего числа) точек «лежать на одной прямой» инвариантно относительно параллельного проектирования*, т. е. если три точки оригинала обладают этим свойством, то их изображения также обладают этим свойством [2]).

3′. *Свойство двух прямых «быть параллельными» инвариантно относительно параллельного проектирования.*

4′. *Простое отношение трех точек, лежащих на одной прямой, есть инвариант параллельного проектирования. Инвариантом также является отношение двух отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.*

Из всего изложенного ясно, что параллельное проектирование есть аффинное отображение [3]), но это отображение вырожденное, так как оно уменьшает размерность оригинала: точки трехмерного пространства преобразуются в точки плоскости.

2.2. Метод параллельной проекции на одну плоскость. При выполнении рисунков мы будем соблюдать следующую условность.

---

[1]) Ср. стр. 101, 102 этой книги ЭЭМ.

[2]) Мы не будем каждый раз оговаривать очевидные исключения для проектирующих прямых.

[3]) Ср. стр. 62 этой книги ЭЭМ.

Если изображения двух линий пересекаются, то мы будем либо обозначать эту точку пересечения маленьким кружком (рис. 8,*а*), либо прерывать одну из линий (рис. 8,*б*). Первое обозначение будет применяться в том случае, если оригиналы l' и m' пересекаются; в этом случае точка A пересечения изображений служит изображением точки A' пересечения оригиналов. Второе обозначение применяется, если оригиналы не пересекаются. Точка пересечения изображений не служит в этом случае изображением общей точки двух линий. Она служит изображением двух различных (конкурирующих) точек: точки A' на линии l' и точки B' — на линии m'. При этом перерыв линии m (рис. 8,*б*) значит: точка B' лежит б л и ж е к плоскости изображения, чем точка A'. Вообразим наблюдателя, находящегося от плоскости α с той же стороны, с какой и линии l' и m', и притом весьма далеко. Если этот наблюдатель смотрит на плоскость α вдоль проектирующих лучей, то его взгляд встречает сначала линию l', а затем линию m', т. е. для него линия l' при *кажущемся* пересечении с линией m' *заслоняет* ее [1]).

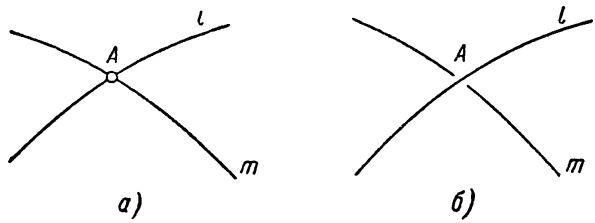


Рис. 8.

При построении изображений встречается много условностей такого рода. Не следует думать, что цель этих условностей — стилизация рисунка или придание ему изящества. Они играют важную геометрическую роль, устраняя многозначность в истолковании рисунка. Например, если бы не ввели только что сформулированного условия, то как бы мы ответили на вопрос: что изображено на рис. 9,*а*? На этот вопрос возможны, в частности, следующие ответы:

1) На рис. 9,*а* изображен параллелепипед. Возможно, что мы его видим сверху и справа, а возможно, что снизу и слева.

2) На рис. 9,*а* изображена плоская фигура.

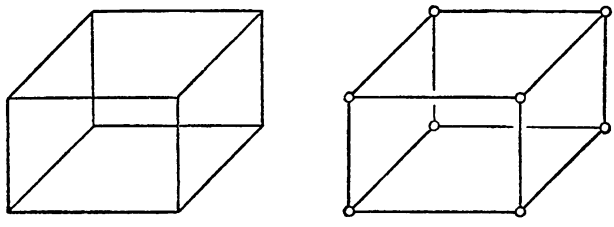
3) На рис. 9,*а* изображены двенадцать отрезков, разбросанных в пространстве и попарно не имеющих общих точек.

На рис. 9,*б* эта многозначность устранена. Несомненно, что на нем изображен параллелепипед, рассматриваемый справа и сверху. Метрические параметры этого параллелепипеда (углы и ребра) мы пока определить не можем. К этому вопросу мы вернемся ниже.

[1]) Это соглашение, строго говоря, подразумевает, что расстояния от точек A' и B' до плоскости изображения α считаются ориентированными, т. е. для точек, находящихся в «положительном» полупространстве (том, в котором находится наблюдатель), расстояния берутся со знаком +, а для точек другого, «отрицательного» полупространства — со знаком —.

Мы уже говорили, что в проекционных методах кроме проектирования допускается еще какое-нибудь проективное преобразование. Условимся, что в данном случае мы будем допускать подобное преобразование.

Итак мы приступаем к изучению метода изображения, называющегося «параллельная проекция на одну плоскость». Этот метод заключается в том, что *точки пространства сначала параллельно проектируются на плоскость, а затем полученное в этой плоскости изображение подвергается подобному преобразованию* [1]).



а) *б)*

Рис. 9.

Подчеркиваем, что с этого момента читатель, видя на рисунке точку M, не должен считать, что она есть *непосредственная проекция* точки M'.

Свойства 1—4 (см. стр. 235—236) сохраняют силу при новом понимании термина «параллельная проекция».

2.3. Жесткие и свободные изображения. При изучении метода параллельной проекции на одну плоскость, как и при изучении любого метода изображений, возникают следующие задачи.

1. Как, зная оригинал, построить изображение?

2. Как, имея изображение, судить об оригинале? При этом вовсе не очевидно, да и не всегда (не при любом методе изображения) верно, что, имея изображение, можно ответить на любой вопрос, относящийся к оригиналу.

Приступая к разбору этих задач, заметим, что они допускают два различных толкования в зависимости от того, имеем ли мы:

а) жесткое изображение или

б) свободное изображение.

---

[1]) Искажение, которому подвергается оригинал при замене его изображением, нисколько не увеличилось бы, если бы мы подвергли полученную проекцию не подобному, а любому аффинному преобразованию, потому что само параллельное проектирование есть аффинное отображение. Мы ограничиваемся подобным преобразованием (для большей элементарности изложения) именно потому, что эта разница несущественна.

Изображение называется *жестким*, если известны все параметры, характеризующие метод изображения и положение оригинала.

Пусть, например, требуется построить изображение куба, ребро которого равно 1 *м*. Метод параллельной проекции на одну плоскость характеризуется двумя параметрами, а именно:

1) углом σ наклона проектирующих прямых к плоскости изображения [1]);

2) коэффициентом подобия k, т. е. множителем, на который умножаются все отрезки, полученные в плоскости изображения в результате проектирования.

Положение куба определяется в случае ортогональной проекции двумя параметрами. Можно, например, задать углы α, β, γ проектирующего луча с ребрами куба, выходящими из одной вершины. Эти углы связаны соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

и потому среди трех углов α, β, γ имеется два независимых параметра.

Можно взглянуть на дело и с такой точки зрения. Положение твердого тела в пространстве определяется шестью параметрами. Однако любые параллельные переносы этого тела не влияют на проекцию (они вызывают только параллельный перенос этой проекции в плоскости изображения); эти движения зависят от трех параметров. Кроме того, повороты тела вокруг оси, совпадающей с проектирующей прямой, в случае ортогональной проекции тоже не влияют на проекцию, вызывая лишь повороты изображения; эти движения зависят от одного параметра. Получаем: $6-3-1=2$. Если проекция косоугольная, то повороты тела вокруг проектирующей прямой уже меняют вид изображения, и положение тела в этом случае зависит от трех параметров.

Допустим, что все эти параметры заданы, например:

$$\sigma = 61°, \quad k = 0{,}04;$$

$$\alpha = 45°, \quad \beta = 61°, \quad \gamma = 59°.$$

При таких параметрах куб с ребром 1 *м* изобразится так, как показано на рис. 10.

При построении жестких изображений задание оригинала полностью определяет изображение. Верно и обратное. Зная параметры, характеризующие проектирующий аппарат и положение оригинала, мы бы могли определить метрические параметры параллелепипеда, изображенного на рис. 9,*б*.

---

[1]) При $\sigma = 90°$ проекция называется прямоугольной или ортогональной, при $\sigma \neq 90°$ — косоугольной.

Жесткие изображения находят применение в инженерной практике. Методы получения таких изображений излагаются в учебниках начертательной геометрии. Параметры большей частью задаются не аналитически, а графически, т. е. элементы оригинала и проектирующего аппарата показываются на рисунке. Однако несравненно большее значение имеют свободные изображения.

Изображение называется *свободным*, если при его построении параметры, определяющие проектирующий аппарат и положение оригинала, неизвестны. Построить свободное изображение куба — значит изобразить куб, безразлично как расположенный, и безразлично под каким углом спроектированный на плоскость, и безразлично с каким последующим изменением размеров.

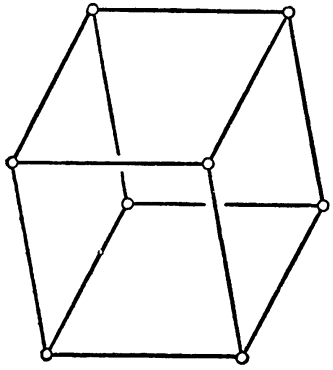


Рис. 10.

Разумеется, различие между жесткими и свободными изображениями заключается не в виде этих изображений, а в способе их получения. Так, изображение куба на рис. 10 построено по заданным параметрам, т. е. оно жесткое. Но если бы, желая к а к-н и б у д ь изобразить куб, мы начертили рис. 10, то это было бы для нас свободное изображение куба.

Методы построения жестких и свободных изображений совершенно различны.

Во всех случаях использования изображений с иллюстративной целью приходится строить свободные изображения. Если учитель математики для иллюстрации какой-нибудь теоремы чертит на доске изображение куба с данным ребром, то ему безразлично, как расположен в пространстве оригинал и под каким углом наклонены к плоскости доски проектирующие прямые. Ему лишь важно, чтобы его изображение было «похоже» на куб. Но что это значит? Это значит, что существует такая система значений параметров σ, k и параметров, характеризующих положение куба, при которой изображение куба с данным ребром будет именно таково.

Мы не будем излагать теорию получения жестких изображений как имеющую узко специальное значение. Отсылаем читателя к учебникам начертательной геометрии. Зато владение теорией свободных изображений совершенно необходимо каждому учителю математики. Мы изложим эту теорию подробно.

2.4. Изображение плоских фигур. В качестве пропедевтики мы начнем с изображений плоских фигур, расположенных в пространстве. Можно считать, что плоская фигура входит в состав подлежащей изображению пространственной фигуры (например, как одна из граней пирамиды). Если бы требовалось изобразить только одну плоскую фигуру, то мы могли бы изобразить ее без искажения.

Правила изображения плоских фигур основаны на следующей теореме.

Теорема 1. *Любой треугольник ABC может служить изображением любого треугольника $A'B'C'$.*

Прежде всего дадим некоторые пояснения.

Во-первых, говоря об изображениях, мы имеем в виду изображение по методу «параллельной проекции на одну плоскость».

Во-вторых, дадим более развернутую формулировку. В плоскости изображения α дан треугольник ABC. В пространстве дан треугольник $A'B'C'$. Этот последний треугольник разрешается как угодно двигать в пространстве. Спрашивается, можно ли придать этому треугольнику некоторое положение в пространстве и затем спроектировать на плоскость α по некоторому надлежаще выбранному направлению так, чтобы проекцией оказался треугольник, подобный ABC? Если это можно, то затем подобным преобразованием полученной проекции можно получить треугольник, конгруэнтный ABC, т. е. можно считать, что треугольник ABC служит изображением треугольника $A'B'C'$.

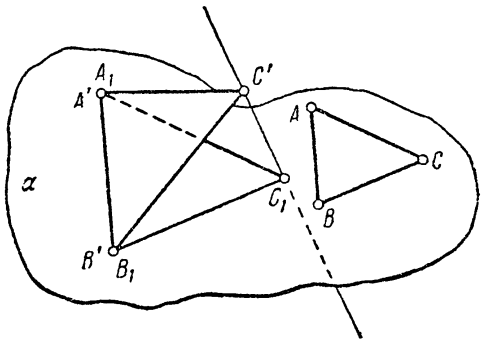


Рис. 11.

Теорема 1 дает утвердительный ответ на поставленный вопрос.

Доказательство. Построим в плоскости α треугольник $A_1B_1C_1$, удовлетворяющий двум условиям:

1) треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC,
2) $A_1B_1 = A'B'$.

Затем расположим треугольник $A'B'C'$ так, чтобы сторона $A'B'$ совместилась со стороной A_1B_1, а плоскость треугольника $A'B'C'$ образовала с плоскостью α какой-нибудь угол (рис. 11). Соединим точки C' и C_1 прямой, и эту прямую примем за проектирующую. Теперь проекцией треугольника $A'B'C'$ служит треугольник $A_1B_1C_1$, подобный ABC. Теорема доказана.

Из приведенного доказательства видно, что задание треугольника-оригинала $A'B'C'$ и треугольника-изображения ABC не определяет полностью проектирующего аппарата. Угол между плоскостями $A'B'C'$ и α остается произвольным, а следовательно, и угол наклона σ проектирующей прямой $C'C_1$ к плоскости α не определен. Кроме того, можно было уравнивать не стороны A_1B_1 и $A'B'$, а B_1C_1 и $B'C'$ или C_1A_1 и $C'A'$. Однако, несмотря на неопределенность проектирующего аппарата, положение всех точек изображения вполне определенно. Это устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. *Если для трех неколлинеарных*[1]) *точек* A', B', C' *плоской фигуры известны их изображения* A, B, C, *то изображения всех точек этой фигуры вполне определены.*

Эту теорему можно высказать и так. Пусть A', B', C', M' — четыре точки оригинала (плоской фигуры). Может ли быть, что при одном способе эти точки имеют изображения A, B, C, M, а при другом — A, B, C, M_1, где M_1 не совпадает с M? Теорема 2 отвечает на этот вопрос отрицательно.

Идея доказательства такова. Четыре точки A', B', C', M' определяют четырехугольник. Его диагонали точкой пересечения делятся в определенных отношениях. Эти отношения для четырехугольника $ABCM$ должны быть теми же самыми, откуда следует, что задание точек $A; B, C$ однозначно определяет точку M.

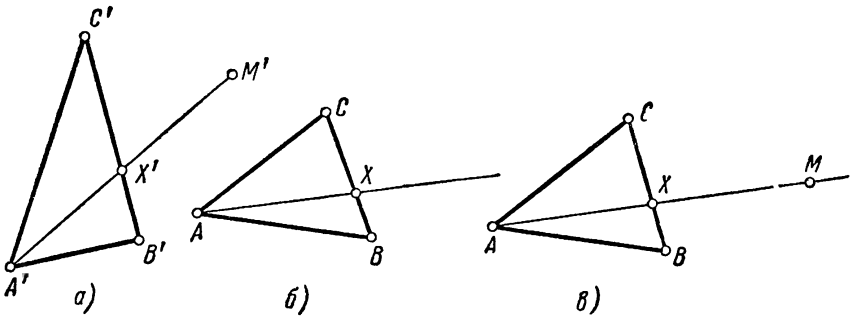


Рис. 12.

Теперь мы реализуем эту идею подробно.

Доказательство. Соединим точку M' с какой-нибудь из точек A', B', C', например с A'. Прямая $A'M'$ пересечет сторону $B'C'$ (или ее продолжение) в точке X' (рис. 12, *а*). Изображение точки X' однозначно определяется: оно должно лежать на прямой BC и делить отрезок BC в том же отношении, в каком точка X' делит отрезок $B'C'$, т. е.

$$\frac{BX}{XC} = \frac{B'X'}{X'C'}.$$

Построив точку X, мы можем провести прямую AX (рис. 12, *б*). Точка M должна лежать на этой прямой; ее положение определяется пропорцией

$$\frac{AM}{AX} = \frac{A'M'}{A'X'}.$$

(рис. 12, *в*).

[1]) Не лежащих на одной прямой.

Заметим, что если прямая $A'M'$ окажется параллельной $B'C'$, то прямая AM также должна быть параллельной BC, и положение точки M определится из пропорции

$$\frac{AM}{BC} = \frac{A'M'}{B'C'}.$$

Изложенный способ нахождения точки M есть не что иное, как *нахождение точки по ее аффинным координатам.* Сейчас мы разовьем эту аналогию подробно.

Как известно, треугольник с упорядоченными вершинами определяет аффинную систему координат. Иначе говоря, тройка неколлинеарных точек есть минимальная система точек, обладающая следующим свойством: *всякое аффинное преобразование плоскости, оставляющее эти точки на своих местах,* представляет собой тождественное преобразование, т. е. оно *оставляет на своих местах все точки плоскости.* Это и значит, что всякая точка плоскости может быть аффинно связана с данной тройкой точек, т. е. положения разных точек относительно данной тройки аффинно различимы.

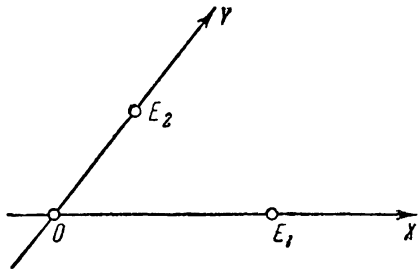


Рис. 13.

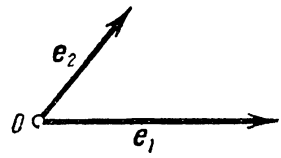


Рис. 14.

Аффинную систему координат изображают различными способами, и читатель может не догадаться, что во всех случаях мы имеем треугольник с упорядоченными вершинами, так как его задание может быть замаскировано другими обозначениями или объясняться с другой точки зрения. На рис. 13 мы видим привычное изображение аффинной системы координат: оси OX и OY, на которых отмечены единицы масштаба OE_1 и OE_2. Эта система вполне определяется заданием упорядоченной тройки точек O, E_1, E_2. Таким образом, треугольник ABC может быть превращен в систему рис. 13, если условиться, что A — начало координат, AB (в направлении от A к B) — ось X, AC (в направлении от A к C) — ось Y, отрезки AB и AC — единицы масштаба.

Иногда аффинную систему координат задают двумя неколлинеарными векторами e_1 и e_2, выходящими из одной точки (рис. 14). Эта фигура называется аффинным репером; в ней мы узнаем треугольник,

в котором «не проведена» третья сторона. Наконец, весьма удобно дополнить рис. 13 или 14 до аффинной сетки. Для этого единицы масштаба по каждой оси повторяются неограниченное число раз и через их концы проводятся прямые, параллельные осям (рис. 15). Ясно, что эта сетка из равных параллелограммов вполне определяется заданием трех точек O, E_1, E_2.

Теперь вернемся снова к теореме 2 и взглянем на нее с несколько иной точки зрения. Исходя из треугольника $A'B'C'$ (рис. 12, *а*), построим аффинную сетку. Точно так же построим аффинную сетку, исходя из треугольника ABC. Точка M должна занимать на второй сетке *такое же*[1]) положение, как точка M' на первой сетке. Этот способ особенно удобен, когда приходится строить изображения фигур неправильной формы.

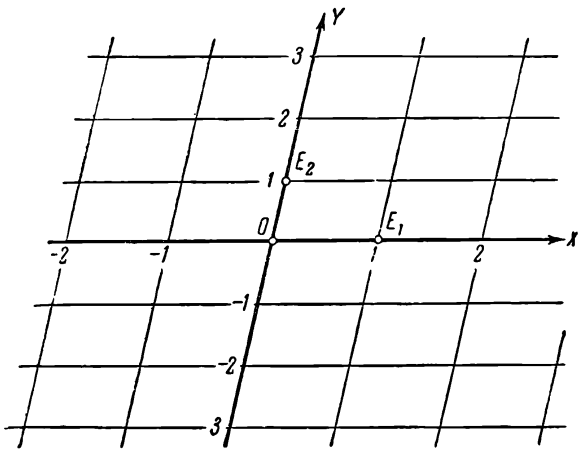


Рис. 15.

Все сказанное может быть выражено так:

Пусть изображениями трех неколлинеарных точек A', B', C' плоской фигуры служат три неколлинеарные точки A, B, C. В таком случае изображением любой точки M' этой фигуры служит точка M, которая имеет относительно репера (AB, AC) те же самые координаты, какие имеет точка M' относительно репера $(A'B', A'C')$.

2.5. Примеры. Рассмотрим теперь примеры на построение изображений плоских фигур. Изложенные выше положения (например, построение, показанное на рис. 12) исчерпывают этот вопрос. Однако иногда бывает удобно вместо применения этих общих способов исходить из индивидуальных свойств изображаемых фигур. При этом всегда следует руководствоваться двумя положениями:

1. Можно выбрать три точки, принадлежащие оригиналу, и изобразить их произвольно, т. е. любыми тремя точками. После этого ничего нельзя изображать произвольно: изображения всех остальных точек оригинала должны строиться.

2. Надо рассматривать оригинал и искать в нем свойства, инвариантные относительно параллельного проектирования; эти свойства можно переносить на изображение.

---

[1]) Предоставляем читателю уточнить смысл этого термина.

Например, если мы обнаруживаем в составе оригинала две параллельные прямые, то, строя изображения, мы тоже начертим две параллельные прямые. Если же мы обнаружим в составе оригинала две перпендикулярные прямые, то это свойство перенести на изображение, вообще говоря, нельзя.

Начнем рассмотрение плоских фигур с многоугольников.

Треугольник. Любой треугольник может быть изображен как угодно. Например, если сказано «изобразить правильный треугольник со стороною 1 *см*», то можно начертить любой треугольник и считать его изображением правильного треугольника со стороною 1 *см*.

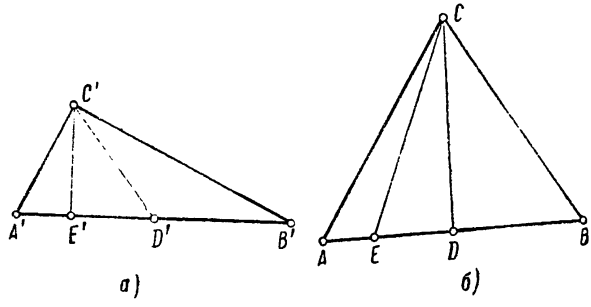


Рис 16.

Пример. *Изобразить прямоугольный треугольник с катетами a и 2a, в котором из вершины прямого угла проведены медиана и высота.*

На рис. 16, *а* показан оригинал без искажения. Начертим произвольный треугольник ABC (рис. 16, *б*) и будем считать его изображением треугольника $A'B'C'$. *Медиана треугольника изображается медианой*, потому что если D' — середина стороны $A'B'$, то и D — середина стороны AB. Для изображения высоты сначала проведем в оригинале «настоящую» высоту $A'E'$ и определим, в каком отношении точка E' делит гипотенузу $A'B'$. Известно, что отрезки гипотенузы (на которые она делится высотой) относятся как квадраты катетов, т. е. $\frac{A'E'}{E'B'}=\frac{1}{4}$. Следовательно, надо найти на AB точку E, для которой $\frac{AE}{EB}=\frac{1}{4}$, и тогда CE есть изображение высоты.

Важно заметить, что для построения изображения высоты вовсе не обязательно, чтобы размеры оригинала были заданы аналитически Оригинал может быть задан графически. В таком случае мы проводим в оригинале высоту $C'E'$, а затем строим точку E, удовлетворяющую условию

$$\frac{AE}{EB}=\frac{A'E'}{E'B'}.$$

Аналогичные соображения применимы не только к высотам, но также и к биссектрисам.

Четырехугольник. Из рассуждения, иллюстрированного рис. 12, ясно, что, изображая четырехугольник $A'B'C'D'$, можно три точки A, B, C выбрать произвольно, а четвертая точка D должна

быть построена так, чтобы диагонали четырехугольника $ABCD$ делились точкой пересечения в тех же отношениях, как и в четырехугольнике $A'B'C'D'$. Верно и обратное. Таким образом, *изображением четырехугольника может служить любой четырехугольник, у которого диагонали делятся точкой пересечения в тех же отношениях.* Например, изображением любого параллелограмма может служить любой параллелограмм.

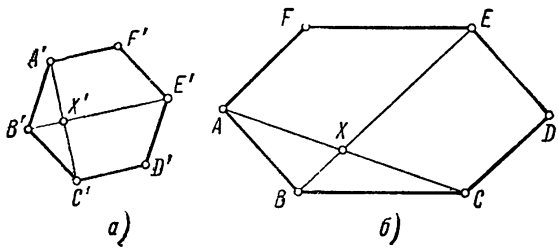


Рис. 17

Пример. *Построить изображение правильного шестиугольника.* На рис. 17, *а* показан правильный шестиугольник в натуральном виде (без искажения). Возьмем произвольный треугольник ABC (рис. 17, *б*). Диагональ $B'E'$ делит диагональ $A'C'$ в точке X' пополам. Поэтому точка X должна быть серединой AC. Проводим прямую BX. Тогда $AF \| BX$ и $CD \| BX$. Очевидно, $B'E' = 4 \cdot B'X'$; поэтому строим $BE = 4 \cdot BX$. Далее либо проводим $ED \| AB$, либо строим $CD = 2 \cdot BX$. Аналогично строим точку F.

Окружность. Изображением окружности служит эллипс[1]). Если эллипс уже был определен каким-нибудь способом, то надо доказать, что изображение окружности — эллипс. Но можно принять это свойство за определение: *образ окружности называется эллипсом.* Исходя из этого определения, легко получить свойства эллипса. Мы в дальнейшем будем предполагать свойства эллипса известными.

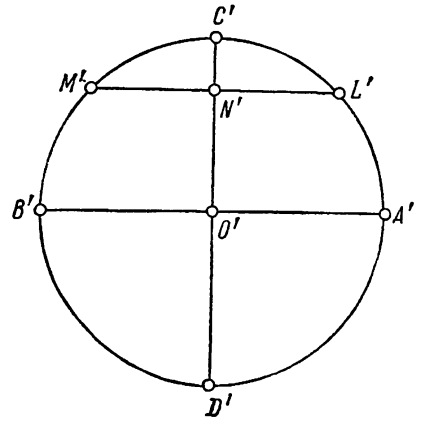


Рис. 18.

Рассмотрим в окружности два взаимно перпендикулярных диаметра $A'B'$ и $C'D'$ (рис. 18). То свойство этих диаметров, что они взаимно перпендикулярны, не инвариантно, но вот другое их свойство, которое инвариантно: каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому. Это свойство называется сопряженностью. Мы приходим к следующему выводу:

1) *Взаимно перпендикулярные диаметры окружности изображаются сопряженными диаметрами эллипса.*

[1]) Подробная статья с изложением свойств *линий второго порядка (эллипса, гиперболы, параболы)* будет помещена в кн. V ЭЭМ.

Ввиду того, что метод получения этих свойств однообразен (на изображение переносятся свойства оригинала, инвариантные относительно параллельного проектирования), сформулируем еще некоторые свойства, не повторяя вывода.

2) *Центр окружности изображается центром эллипса.*

3) *Касательная к окружности в точке A' изображается касательной к эллипсу в точке A. Эта касательная (изображение) параллельна тому диаметру эллипса, который сопряжен с диаметром, проходящим через точку касания.*

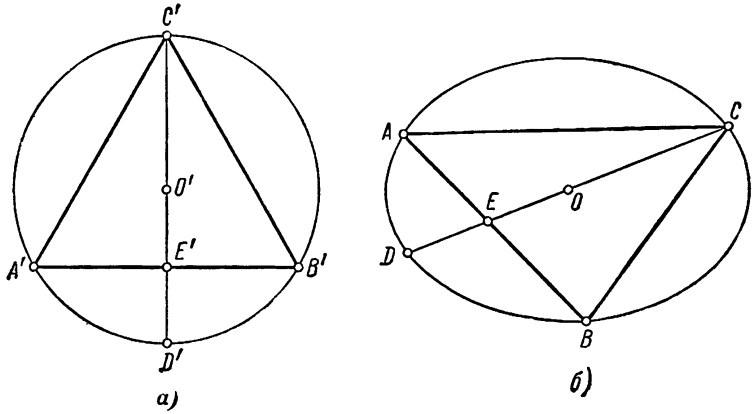


Рис. 19.

4) *Квадрат, описанный около окружности, изображается параллелограммом, описанным около эллипса, причем стороны этого параллелограмма имеют сопряженные направления; средние линии этого параллелограмма — сопряженные диаметры эллипса.*

Пример. Рассмотрим задачу: *изобразить окружность со вписанным в нее правильным треугольником.*

На рис. 19, *а* показан оригинал. Очевидно, $C'O' \perp A'B'$, $O'E' = E'D'$.

Изобразим окружность произвольным эллипсом (рис. 19,*б*); O — центр этого эллипса. Примем за C произвольную точку эллипса. Проведем диаметр CD; пусть E — середина OD. Проведем через E прямую, направление которой сопряжено CD (для этого надо провести какую-нибудь хорду, параллельную CD, разделить ее пополам и полученную середину соединить с O; соединяющая прямая имеет направление, сопряженное с CD). Точки пересечения этой прямой с эллипсом суть A и B.

§ 3. Параллельная аксонометрия

3.1. Теорема Польке — Шварца. Изображение пространственных фигур по методу параллельной проекции на одну плоскость во многом аналогично изображению плоских фигур.

Прежде всего возникает вопрос, может ли пространственный аффинный репер быть изображен произвольно? Другими словами, имеют ли место теоремы (об изображении пространственных тел), аналогичные теоремам 1 и 2?

Пространственный аффинный репер это — упорядоченная тройка векторов (некомпланарных, т. е. не лежащих в одной плоскости), выходящих из одной точки (рис. 20; сравнить с рис. 14).

Ясно, что задание этого репера равносильно заданию аффинной системы координат (рис. 21; сравнить с рис. 13), т. е. упорядоченной тройки осей $O'X'$, $O'Y'$ и $O'Z'$, на которых отмечены единицы масштаба $O'E_1'$, $O'E_2'$ и $O'E_3'$.

Рис. 20 или 21 можно дополнить до пространственной аффинной сетки (рис. 22; сравнить с рис. 15).

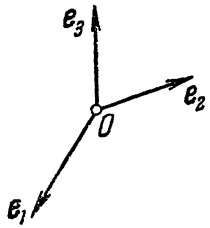


Рис. 20.

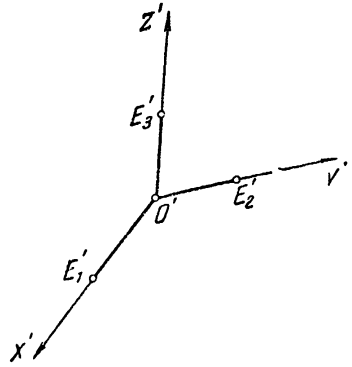


Рис. 21

Наконец, ясно, что в составе любой из фигур рис. 20, 21 и 22 имеется тетраэдр с упорядоченными вершинами (например, тетраэдр $O'E_1'E_2'E_3'$ на рис. 21), который определяет всю фигуру. Таким образом, тетраэдр $A'B'C'D'$ (рис. 23; сравнить с рис. 12, *а*) может быть превращен в систему рис. 21, если условиться, что A' — начало координат, $A'B'$ (в направлении от A' к B') — ось X' и т. д.

Читатель должен видеть, что рис. 20, 21, 22 и 23 представляют разные способы задания аффинной системы координат. Например, аффинный репер рис. 20 можно мыслить как тетраэдр, в котором «проведены» только ребра, выходящие из одной вершины.

При изображении пространственных фигур, так же как и при изображении плоских фигур, основной вопрос — это вопрос о том, как изобразить аффинный репер. Если мы сумеем изобразить его, то сумеем изобразить и любые фигуры, потому что всякая точка сверх четырех основных может быть инвариантно связана с этим репером (она занимает определенное положение в сетке параллелепипедов, показанной на рис. 22).

Аффинный репер, показанный на рис. 20, изображается на плоскости тремя отрезками, выходящими из одной точки. Поэтому упомянутый вопрос формулируется так: могут ли произвольные[1]) три

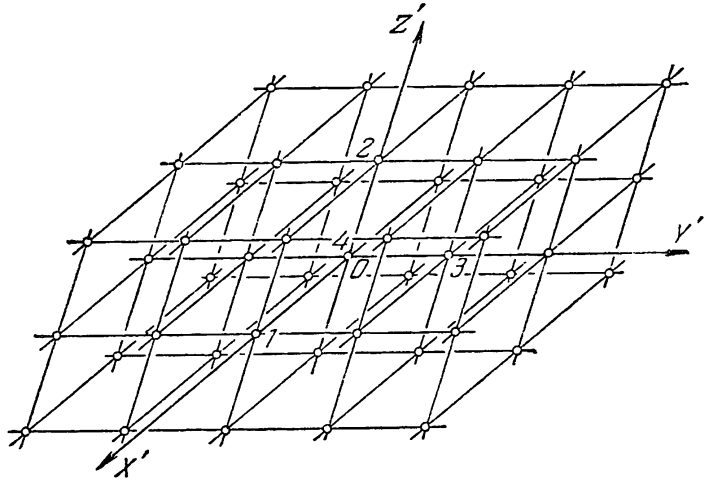


Рис. 22.

отрезка на плоскости, выходящие из одной точки, служить изображением трех наперед заданных отрезков в пространстве, выходящих из одной точки в пространстве?

Если дополнить фигуру рис. 20 до тетраэдра, то изображение примет вид четырехугольника с диагоналями. Иначе эта фигура называется полным четырехвершинником или полным четырехугольником: четыре точки плоскости общего положения и все шесть определяемых ими прямых. На рис. 24, *а* показан *выпуклый*, а на рис. 24, *б* — *невыпуклый* четырехугольник *ABCD* с диагоналями *AC* и *BD*.

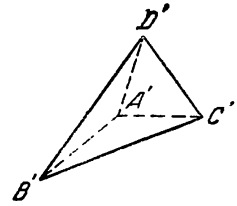


Рис. 23.

Поставленный выше вопрос относительно трех отрезков можно сформулировать и так: может ли произвольный полный четырехугольник служить изображением наперед заданного тетраэдра?

Ответ на поставленный вопрос утвердительный. Имеет место следующая теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 3 (теорема Польке—Шварца). *Любой полный четырехугольник ABCD может служить изображением любого тетраэдра A'B'C'D'.*

Интересующая нас теорема впервые была высказана в 1853 г. немецким геометром Карлом Польке в следующей форме: «три

[1]) Т. е. произвольных длин и образующие между собою произвольные углы.

отрезка $a'x'$, $a'y'$, $a'z'$ произвольной длины, лежащие в одной плоскости, выходящие из одной точки a под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трех равных отрезков ax, ay, az, отложенных на прямоугольных осях координат от начала». Доказательство Польке было чрезвычайно сложным и неэлементарным. Оно не было опубликовано, но содержание его до нас дошло. В 1864 г. один из известных математиков того времени Герман Амандус Шварц (ученик Польке) обнаружил, что перпендикулярность и равенство отрезков $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$ несущественны, т. е. теорему Польке можно обобщить следующим образом: если $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$ — *три произвольных отрезка в пространстве* [1]), *выходящих из одной точки, а* OA, OB *и* OC — *три произвольных отрезка на плоскости, выходящих из одной точки, то фигуру* (OA, OB, OC) *можно рассматривать как параллельную проекцию фигуры, подобной* ($O'A'$, $O'B'$, $O'C'$). Это значит, что можно фигуру ($O'A'$, $O'B'$, $O'C'$)

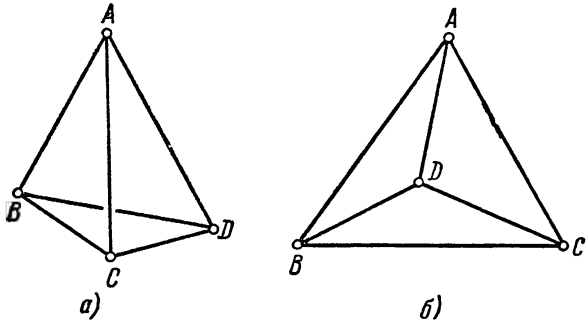


Рис. 24.

1) подобно изменить с надлежащим коэффициентом подобия,

2) надлежащим образом переместить в пространстве,

3) надлежащим образом выбрать направление проектирования, и тогда проекцией окажется заданная фигура (OA, OB, OC).

Вместо подобного изменения оригинала можно было бы производить подобное изменение проекции.

Мы не будем исследовать вопрос о том, определяются ли все перечисленные шаги однозначно. Скажем только, что первый шаг — да, а второй и третий — нет.

Только что приведенную теорему можно сформулировать и так:

Любой полный четырехугольник можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра, подобного наперед заданному.

Или

Любой тетраэдр можно параллельно спроектировать на плоскость так, что получится полный четырехугольник, подобный наперед заданному.

Эта теорема (в любой из трех приведенных формулировок) называется теоремой Польке — Шварца. Шварц не только обобщил теорему

[1]) Т. е. отрезки любых длин, образующие между собой любые углы, однако не лежащие в одной плоскости.

Польке, но и дал простое и элементарное доказательство. Мы не будем приводить доказательство этой теоремы, потому что оно широко распространено в учебной литературе по начертательной геометрии. Доказательство теоремы Польке—Шварца можно найти, например, в указанных в конце статьи книгах [1, 2][1]).

В приведенных формулировках теоремы Польке—Шварца упоминается подобие. Это объясняется тем, что *непосредственным* проектированием данного тетраэдра получить в *точности* данный полный четырехугольник, вообще говоря, нельзя: например, из большого тетраэдра нельзя получить маленький четырехугольник. Однако в той формулировке теоремы Польке—Шварца, которую мы выбрали за основную (теорема 3) подобие не упоминается. Это объясняется тем, что изучаемый нами метод изображения включает параллельное проектирование и кроме того подобное преобразование.

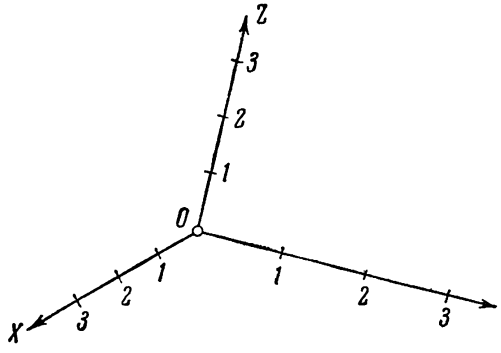


Рис. 25.

Приведем несколько положений, которыми мы будем пользоваться при построении изображений и которые суть разные аспекты теоремы Польке—Шварца.

1) *Изображая любую аффинную систему координат, можно начертить изображения осей под любыми углами и на каждом изображении оси принять произвольный отрезок за изображение масштабной единицы* (рис. 25). Напомним, что в аффинной системе координат масштабы на разных осях могут быть разные.

В частности, рис. 25 может рассматриваться как изображение декартовой прямоугольной системы координат. Аффинная система координат называется декартовой прямоугольной, если ее оси взаимно перпендикулярны и

$$O'E'_1 = O'E'_2 = O'E'_3.$$

2) *Рис.* 9 *может рассматриваться как изображение любого параллелепипеда,* в частности—как изображение куба с данным ребром.

3) *Рис.* 24 *может рассматриваться как изображение любого тетраэдра.*

---

[1]) С историей этой теоремы можно ознакомиться по статье Н. М. Бескина, Основное предложение аксонометрии, сб «Вопросы современной начертательной геометрии», под ред. Н. Ф. Четверухина, М.—Л., Гостехиздат, 1947, стр. 55—126.

3.2. Полные и неполные изображения. Изображая любую пространственную фигуру, надо выбрать в составе этой фигуры четыре точки общего положения (т. е. четыре точки, не лежащие в одной плоскости) и их изобразить произвольно. Остальные точки этой фигуры уже не могут изображаться произвольно. Перейдем к вопросу, как они должны изображаться.

Для изображения плоских фигур аналогичный вопрос решался теоремой 2 (см. рис. 12). При изображении пространственных фигур дело обстоит иначе, и мы прежде всего выясним, в чем заключается различие.

Пусть оригинал — плоская фигура, A', B', C' — три точки этой фигуры, а A, B, C — их изображения. Пусть M' — четвертая точка оригинала. Тогда прямая $A'M'$ пересекает прямую $B'C'$ в некоторой точке X', и изображение этой точки может быть построено (рис. 12).

Пусть теперь оригинал — пространственная фигура, A', B', C', D' — четыре точки этой фигуры, а A, B, C, D — их изображения. Пусть M' — пятая точка оригинала. Тогда прямая $A'M'$, вообще говоря, не пересекает прямых $B'C'$, $C'D'$ и $D'B'$ (в этом различие!), а пересекает лишь плоскость $B'C'D'$ в некоторой точке X'. Однако изображение X этой точки *не может быть построено*, если известны только точки A, B, C, D.

Более полно, пусть мы имеем некоторый оригинал, т. е. совокупность точек, прямых, плоскостей, отрезков, треугольников и. т. д. По всем этим элементам, входящим в оригинал, мы можем однозначно определить еще некоторые другие элементы, жестко связанные с оригиналом. Например, имея в оригинале две точки, мы можем провести соединяющую их прямую, имея три точки, можем определить проходящую через них плоскость, имея прямую и плоскость, можем найти их точку пересечения и т. д. Найдя новые точки, жестко связанные с оригиналом, мы можем проводить прямые и плоскости и через них, далее мы можем найти линию пересечения, скажем, плоскости, входящей в состав оригинала, и уже найденной плоскости, жестко связанной с ним, и т. п. Все получающиеся таким путем новые элементы (прямые, точки и др.) мы будем называть элементами, *связанными* с оригиналом. Все они *однозначно* определяются заданием оригинала.

Возникает естественный вопрос, можно ли все эти элементы, связанные с оригиналом, найти на изображении, точнее говоря, можно ли однозначно построить изображение элементов, связанных с оригиналом, имея лишь рисунок (т. е. изображение) самого оригинала? При этом, конечно, речь будет идти об изображении точек, прямых и их комбинаций, так как плоскости могут быть заданы на рисунке лишь находящимися в них точками и прямыми.

Мы сталкиваемся здесь со следующим фактом, имеющим важные последствия для теории изображений. *При изображении плоских*

фигур всякий элемент (прямая, точка или их комбинация), связанный с оригиналом, определен однозначно и на изображении (на рисунке), а для изображения пространственных фигур это, вообще говоря, не так (ср. рис. 13 и относящийся к нему текст).

Поясним сказанное примерами. Пусть в составе плоской фигуры имеются две прямые a' и b', а на рисунке — их изображения a и b. Прямые a' и b', если они пересекаются, определяют точку пересечения. Их изображения a и b, если они пересекаются, тоже определяют точку пересечения. Другими словами, если мы уже изобразили прямые a' и b' прямыми a и b, то мы не можем точку пересечения прямых a' и b' изобразить произвольно; ее изображением должна служить вполне определенная точка, а именно точка пересечения прямых a и b.

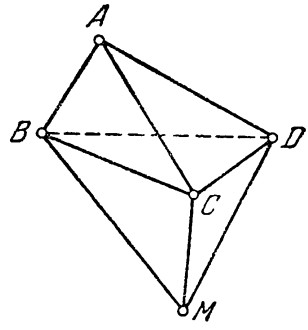


Рис. 26.

Следующий пример покажет, что для пространственных фигур дело обстоит иначе. На рис. 26 легко узнать изображение фигуры, о которой шла речь на стр. 252: тетраэдр $A'B'C'D'$ и пятая точка M'; проведены также отрезки $B'M'$, $C'M'$, $D'M'$. Прямая $A'M'$ (изображение которой не показано) пересекает плоскость $B'C'D'$ в некоторой точке X'. В оригинале эта точка вполне определена, а ее изображение X на рисунке не определено. Более того, точку X можно выбрать на прямой AM произвольно.

Вот еще пример. На рис 27 дано изображение системы координат и, кроме того, некоторой точки M'. Если через точку M' провести прямую, параллельную оси Z', то она изобразится прямой, параллельной оси Z. В оригинале эта прямая пересечет плоскость $O'X'Y'$ во вполне определенной точке, а на рисунке мы не можем построить изображение этой точки; это изображение может быть отмечено произвольно.

Отмеченное свойство называется неполнотой рисунка (изображения). *Изображение называется полным, если всякий элемент (прямая, точка, их комбинация), связанный с оригиналом, определен однозначно и на изображении.* Таким образом, рис. 26 и 27 неполные. Мы в дальнейшем будем рассматривать только полные изображения [1]).

Изображение четырех (или меньшего числа) точек общего положения всегда полное. Пусть теперь оригинал содержит более

---

[1]) Относительно неполных изображений см книгу Н. Ф. Четверухина «Изображения пространственных фигур в курсе геометрии», указанную в конце статьи, и его же статью «Полные и неполные изображения» в сборнике, указанном в сноске на стр. 251.

четырех точек общего положения и пусть A, B, C, D — изображения четырех точек A', B', C', D' оригинала, принятых за базис. *Для полноты изображения необходимо и достаточно, чтобы для всех остальных элементов, имеющихся на рисунке, была показана их жесткая аффинная связь с базисом.*

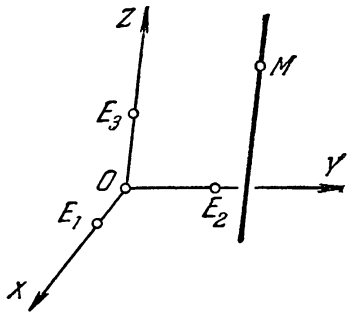


Рис. 27.

Именно точки A', B', C', D' (изображения A, B, C, D которых заданы), соединяющие их прямые $A'B'$, $B'D'$ и т. д., а также плоскости $A'B'C'$, $A'C'D'$ и т. д. считаются заданными (т. е. имеющими жесткую аффинную связь с базисом). Если уже известно некоторое количество заданных (т. е. жестко аффинно связанных с базисом) точек, прямых и плоскостей, то новые точки, прямые и плоскости считаются жестко аффинно связанными с базисом (т. е. заданными) в следующих случаях.

Точка считается заданной, если дано ее изображение и указана проходящая через нее заданная плоскость (или прямая). Точка также считается заданной, если она указана как точка пересечения двух заданных прямых или прямой и плоскости, или трех заданных плоскостей.

Прямая считается заданной, если дано ее изображение и указана проходящая через нее заданная плоскость. Прямая также считается заданной, если заданы: две ее точки или одна ее точка и параллельная ей прямая, или две проходящие через нее плоскости и т. д.

Наконец, плоскость считается заданной, если указаны три лежащие в ней заданные точки или лежащие в ней заданные точка и прямая, или лежащая в ней заданная точка и параллельная ей заданная плоскость и т. д.

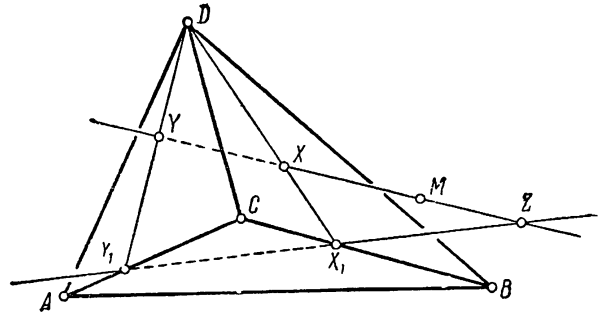


Рис. 28.

Разберем несколько примеров.

На рис. 28 $ABCD$ — изображение базиса. Прямая $X'Y'$ задана, потому что на рисунке показаны изображения ее следов на плоскостях $D'B'C'$ и $D'C'A'$ (точки X и Y). Точка M' задана, потому что дано ее изображение и она лежит на заданной прямой.

Рис. 28 полный. Например, в оригинале существует точка Z' пересечения прямой $X'Y'$ с плоскостью $A'B'C'$. Изображение этой

точки тоже однозначно определено. Построение этого изображения Z показано на рисунке.

На рис. 29 точка M' аффинно привязана к базисному тетраэдру более простым способом.

На рис. 30 изображена система осей $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$. Единицы масштаба не изображены, т. е. на этом рисунке нет изображения базисного тетраэдра. Через точку M' проведены прямые, параллельные осям $O'X'$, $O'Y'$ и $O'Z'$; точки пересечения этих прямых с плоскостями $Z'Y'$, $Z'X'$ и $X'Y'$ обозначим соответственно через M'_1, M'_2 и M'_3. Их изображения M_1, M_2 и M_3, т. е. изображения оснований точки M', в этом случае (т. е. применительно именно к рис. 30) называются вторичными проекциями точки M'.

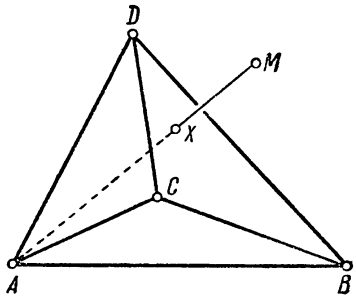


Рис. 29.

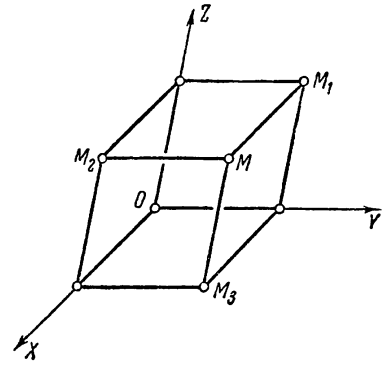


Рис. 30.

Такое название объясняется тем, что в самом оригинале происходит проектирование точки M' на плоскости $Y'Z'$, $Z'X'$ и $X'Y'$, а затем полученные проекции M'_1, M' и M'_3 вместе со всем оригиналом проектируются на плоскость изображения.

Для того чтобы изображение было полным, достаточно задать кроме M еще одну вторичную проекцию. Остальные две легко строятся.

Из того, что на рис. 30 нет изображения аффинного базиса, вытекает некоторый дефект этого рисунка: он не определяет оригинал метрически (см. **3.7**).

3.3. Понятие о параллельной аксонометрии. Назначение всякого изображения — дать представление об оригинале. В лучшем случае изображение представляет оригинал исчерпывающим образом, т. е. *имея изображение, можно ответить на любой (геометрический) вопрос, относящийся к оригиналу*. Это значит, что *оригинал определяется метрически, т. е. с точностью до движения в пространстве*. Бывают изображения, которые определяют оригинал

с меньшей точностью, т. е. *позволяют ответить на некоторые, но не на все геометрические вопросы, относящиеся к оригиналу.*

Сейчас мы ответим на вопрос, в какой мере разные методы изображения позволяют судить об оригинале.

Полное изображение позволяет восстановить оригинал с точностью до аффинного преобразования, потому что оно позволяет построить все элементы, аффинно связанные с оригиналом. Другими словами, полное изображение позволяет ответить на любой относящийся к оригиналу вопрос, имеющий аффинный характер. Например, имея на полном чертеже изображение трех точек, лежащих на одной прямой, мы можем ответить, каково (в оригинале) отношение этих точек, но мы не можем ответить на вопрос, является ли треугольник, изображенный на некотором рисунке, правильным (если только нам не известны еще какие-нибудь свойства изображения, кроме полноты).

Неполные изображения не позволяют судить об оригинале даже с точностью до аффинного преобразования.

Какие нужны условия, чтобы изображение определяло оригинал более точно? На рис. 24 показано изображение тетраэдра. Согласно теореме Польке—Шварца этот рисунок может быть изображением *любого* тетраэдра. Значит, имея рис. 24, мы ничего не можем сказать о тетраэдре-оригинале. С другой стороны, любой тетраэдр $A'B'C'D'$ может быть переведен в любой другой тетраэдр $A_1'B_1'C_1'D_1'$ аффинным преобразованием. Следовательно, рис. 24 определяет оригинал лишь с точностью до аффинного преобразования.

Рассмотрим теперь рис. 29. На нем, кроме базисного тетраэдра, изображена точка M' по правилам, установленным для полного изображения. Изображение базисного тетраэдра может относиться к любому тетраэдру, например к $A'B'C'D'$ или к $A_1'B_1'C_1'D_1'$. Какой бы из этих двух тетраэдров мы ни выбрали, в пространстве однозначно определится некоторая точка, аффинно связанная с этим тетраэдром так, как это показано на рисунке. В первом случае это будет точка M', а во втором M_1'. Аффинное преобразование, переводящее тетраэдр $A'B'C'D'$ в тетраэдр $A_1'B_1'C_1'D_1'$, переводит точку M' в M_1', т. е. система точек $A'B'C'D'M'$ получается из системы $A_1'B_1'C_1'D_1'M_1'$ аффинным преобразованием. Это рассуждение может быть проведено для любого элемента, имеющего жесткую аффинную связь с базисом. Поэтому справедлива следующая теорема (аналогичная теореме 2).

Теорема 4. *Если изображение полное и содержит изображение базисного тетраэдра, то оно определяет оригинал с точностью до аффинного преобразования, т. е. позволяет ответить на всякий вопрос, касающийся аффинных свойств оригинала*

Как же придать рисунку полную определенность, т. е. сделать его метрически определенным? В рамках метода «Параллельные

проекции на одну плоскость» для этого применяется особая разновидность этого метода, называющаяся параллельной аксонометрией; для краткости мы пока будем называть ее просто аксонометрией.

Аксонометрия заключается в том, что к полному изображению, содержащему изображение базисного тетраэдра, добавляется словесное примечание, указывающее метрические параметры этого тетраэдра, т. е. указывается, как принято говорить в начертательной геометрии, реконструкция этого тетраэдра.

Мы уже говорили, что изображение тетраэдра может считаться изображением *любого* тетраэдра. Воспользовавшись этой неопределенностью, выберем какой-нибудь тетраэдр и *объявим*, что имеющееся на рисунке изображение базисного тетраэдра есть изображение именно этого тетраэдра.

Возьмем какой-нибудь тетраэдр $A'B'C'D'$ указанных размеров. Всякое аффинное преобразование, оставляющее точки A', B', C', D' на месте, есть тождественное преобразование, т. е. оно оставляет на месте все точки пространства. Значит, вместе с точками A', B', C', D' займут фиксированные положения все лишние элементы оригинала, т. е. оригинал метрически определен.

Например, рис. 29, дополненный следующей реконструкцией базисного тетраэдра:

$$\angle BAC = 50°, \quad AB = 52 \text{ см},$$

$$\angle CAD = 60°, \quad AC = 40 \text{ см},$$

$$\angle DAB = 90°, \quad AD = 58 \text{ см},$$

становится метрически определенным. Он определяет оригинал полностью, т. е. позволяет ответить на любые вопросы, касающиеся оригинала, например, каков угол прямой $A'M'$ с плоскостью $B'C'D'$.

Итак, *аксонометрия есть метод изображения, характеризующийся следующими четырьмя признаками:*

1) *изображение строится по методу параллельной* [1]) *проекции на одну плоскость,*

2) *оно полное,*

3) *оно содержит изображение базисного тетраэдра,*

4) *к изображению дополнительно прилагается реконструкция базисного тетраэдра.*

Аксонометрическое изображение есть изображение метрически определенное, т. е. оно определяет оригинал полностью.

В учебниках начертательной геометрии аксонометрия рассматривается с несколько иной точки зрения. Оригинал связывается с не-

[1]) Мы пока говорим о параллельной аксонометрии. Существует еще центральная аксонометрия, о которой говорится ниже (стр. 282).

которой системой координат и затем вместе с этой системой координат проектируется на плоскость изображения. При этом на изображении должна быть показана аффинная связь всех элементов оригинала с системой координат. Само слово «аксонометрия» значит «измерение по осям» (от греческих слов ἄξων — ось, μετρέω — измеряю). Изображение на рис. 31 — аксонометрическое, если, например, дано, что система координат прямоугольная, единицы масштаба по всем осям одинаковые и каждая из них равна 1 *см*. Легко узнать длину отрезка $A'B'$. Это ясно из того, что по рисунку можно измерить координаты точек A' и B'

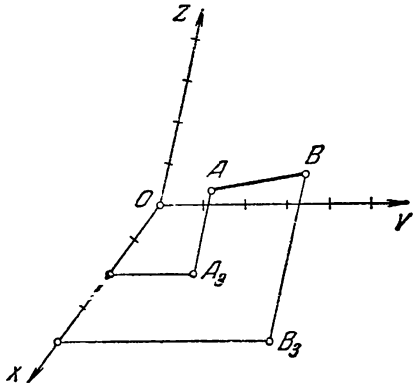


Рис. 31.

$$A'(2,\ 2,\ 2),$$

$$B'(4,\ 5,\ 4).$$

Ясно, что такое понимание аксонометрии вполне совпадает с данным выше определением, потому что задание изображения системы координат равносильно заданию изображения базисного тетраэдра.

Координатная система на аксонометрических рисунках часто задается не при помощи осей OX, OY и OZ, а при помощи изображения разных предметов (большей частью — куба), размеры которых известны. Если, например, известно, что нижнее тело, изображенное на рис. 32, есть куб с ребром 1 *м*, то можно утверждать, что на нем стоит правильная шестиугольная призма (обратить внимание, в каких отношениях вершины шестиугольника делят стороны квадрата!) высота которой равна 50 *см*, и боковые грани которой — квадраты.

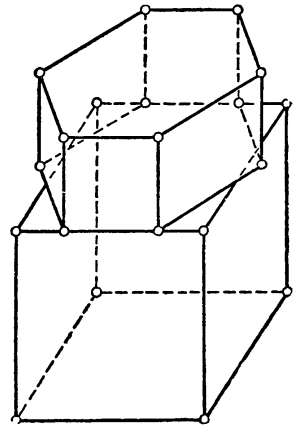


Рис. 32.

3.4. Условные изображения. Изображения, для истолкования которых необходимы некоторые дополнительно сообщаемые условия, называются условными изображениями[1]). К ним, следовательно, принадлежат и аксонометрические изображения.

---

[1]) См. статью Н. Ф. Четверухина «Условные изображения и параметрический метод их построения» в сборнике, указанном в сноске на стр. 251.

Громадное большинство изображений, в том числе художественные изображения, условные. Эта условность замаскирована тем обстоятельством, что дополнительные условия не формулируются явно, как это имело место для рис. 31 и 32, а подразумеваются.

Возьмем какое-нибудь произведение живописи [1]). На нем бывают изображены предметы, форма и размеры которых нам заранее известны. Если на картине мы видим человека, то знаем без специальных примечаний, что его рост 160—180 *см*, а если видим телеграфные столбы и рельсы, то знаем, что столб перпендикулярен рельсу. Это и есть условия, которые не формулируются явно.

Бывают изображения, где одни предметы знакомы, а другие нет. Незнакомые предметы познаются по связям со знакомыми, подобно тому как на рис. 32 размеры и форма шестиугольной призмы определяются по ее связям с кубом, на котором она стоит. Например, изображая какую-нибудь новую машину, около нее изображают также людей; это дает нам представление о размерах машины.

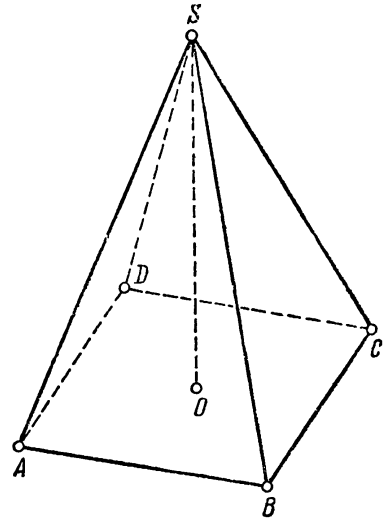


Рис. 33.

Если вообразить произведение живописи, на котором не было бы изображено ни одного знакомого предмета, то мы не смогли бы понять ни формы, ни размеров оригиналов.

3.5. Примеры построения аксонометрических изображений. Рассмотрим несколько типичных примеров построения аксонометрических изображений.

Пример 1. *Правильная четырехугольная пирамида.* В основании пирамиды лежит квадрат. Его можно изобразить любым параллелограммом $ABCD$ (рис. 33). Изобразив этот квадрат, *мы частично* использовали права, предоставляемые нам теоремой Польке—Шварца, а именно мы произвольно изобразили два равных взаимно перпендикулярных отрезка $A'B'$ и $A'D'$. Тем самым метрика в плоскости $ABCD$ вполне определена, и в ней больше ничего нельзя изображать произвольно. На основании теоремы Польке—Шварца мы можем произвольно изобразить еще один отрезок, некомпланарный с $A'B'$ и $A'D'$, например мы можем произвольно изобразить высоту пирамиды (даже предполагая, что длина высоты задана). Произвол заключается в том,

[1]) Разумеется, речь идет о произведении, относящемся к реалистической живописи, т. е. о произведении, претендующем на сравнительно точное изображение действительных предметов.

что мы можем взять изображение высоты любой длины и под любым углом к AB. Однако мы не можем произвольно выбирать основание высоты, потому что в плоскости основания вся метрика определилась. Основанием высоты должна служить точка пересечения диагоналей основания. Нам остается только произвольно взять вершину S. Мы изобразили высоту параллельно боковым краям страницы. Это объясняется тем, что обычно высота рассматриваемой пирамиды вертикальна. Если мы поместим страницу 259-ю прямо перед собой в вертикальном положении, то отрезок SO займет привычное положение.

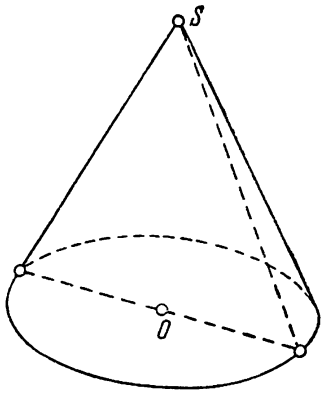


Рис. 34.

Пример 2. *Прямой круговой конус.* Основание конуса изобразится произвольным эллипсом (рис. 34). Вершина S изображается произвольно. Контурные образующие (т. е. входящие в контур изображения; контур изображения короче называется абрисом)— касательные к эллипсу, проведенные из точки S. Разумеется, они касаются эллипса не в двух вершинах, как это бывает на плохих рисунках. Осевое сечение получится, если мы проведем любой диаметр эллипса, но отнюдь не соединением точек касания контурных образующих.

Пример 3. *Шар.* При параллельном проектировании шара получается либо окружность, либо эллипс с неравными осями. Это значит, что в ортогональной проекции абрис шара — окружность, а в косоугольной — эллипс. Изображение шара в виде эллипса кажется не наглядным (условия наглядности изображения будут разбираться на стр. 271—272), поэтому шар целесообразно всегда изображать в ортогональной проекции.

Итак, сначала начертим окружность, представляющую абрис. Затем начертим эллипс, изображающий сечение шара по какому-либо большому кругу (рис. 35); для краткости речи назовем это сечение экваториальным. Перпендикуляр к плоскости большого круга, восставленный в центре, пересекает сферу в двух точках, называемых полюсами, сопряженными с этим большим кругом. Для краткости будем называть их Северным и Южным полюсами.

Распространенная ошибка — помещать полюсы на абрисе. При таком изображении экватора, как на рис. 35, ясно, что глаз наблюдателя находится выше плоскости экватора. Поэтому наблюдатель видит Северный полюс ниже абриса, а Южный полюс находится на задней, невидимой для наблюдателя части шара.

Только в том случае, если бы проектирующие прямые были параллельны плоскости экватора, полюсы помещались бы на абрисе,

но в этом случае экватор изображался бы не эллипсом, а отрезком. Чем шире эллипс, изображающий экватор, тем дальше от абриса находятся полюсы.

На рис. 35 показано, как построить полюсы, если дано изображение экватора; AB — большая ось эллипса. Вообразим диаметр шара $A'B'$ и перпендикуляр к плоскости экватора $N'S'$ (N' — Северный

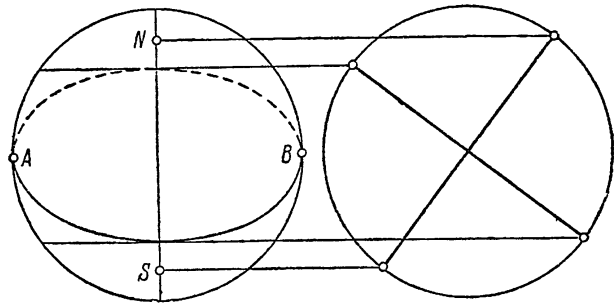


Рис. 35.

полюс, S' — Южный). Вообразим две плоскости — фронтальную (параллельную $A'B'$) и профильную (перпендикулярную $A'B'$). На рис. 35 слева показана проекция на фронтальную плоскость (вид спереди), а справа показана проекция на профильную плоскость (вид сбоку).

Система «экваториальный круг и диаметр $N'S'$» в проекции на профильную плоскость дает два взаимно перпендикулярных диаметра круга.

Теперь легко понять следующее построение.

Сносим на правый круг малую ось эллипса. Проводим в круге соответствующий диаметр; этот диаметр — проекция экваториального круга. Проводим перпендикулярный диаметр; это — проекция диаметра $N'S'$. Сносим его концы, как показано, на левый рисунок.

3.6. Общие методы построения аксонометрических изображений. Выше мы рассмотрели некоторые отдельные примеры построения аксонометрических изображений, а теперь перейдем к общим методам.

Покажем два из них, наиболее простые по идее:

1) метод координатной сетки и

2) вычислительный.

Метод координатной сетки основан на том, что, имея изображение координатной системы, можно построить изображение точки, если известны ее координаты. Эти координаты *без пересчета* откладываются параллельно аксонометрическим осям, причем для каждой оси употребляется своя аксонометрическая единица.

Построим в ортогональной диметрии [1]) изображение прямой шестиугольной призмы, из которой вырезан прямой круговой цилиндр. Оси этих тел совпадают. Сторона основания призмы равна e, радиус основания цилиндра равен $\frac{e}{2}$, высота обоих тел равна $2e$.

Пусть призма стоит на плоскости $X'Y'$, ось ее расположена на оси Z' и пара противоположных вершин основания лежит на оси X'. Тогда вершины основания имеют координаты

$$(1,\ 0,0),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),\ (-1,\ 0,0),$$

$$\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$$

(здесь положено $e=1$).

На рис. 36 эти точки построены по аксонометрической координатной сетке. Разумеется, по координатам построены только первые две точки, а остальные — на основании симметрии. Вершины верхнего основания должны быть подняты параллельно оси Z на $2e$. После этого получится рис. 37.

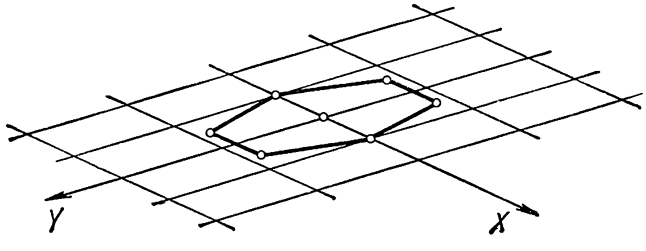


Рис. 36.

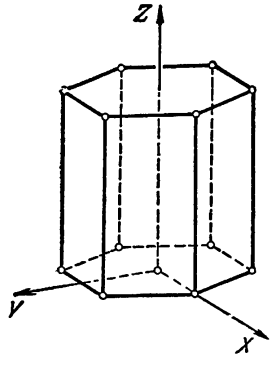


Рис. 37.

Заметим теперь, что для построения изображения методом координатной сетки вовсе нет необходимости знать координаты точек оригинала. Можно копировать оригинал графически. На рис. 38, *а* изображена окружность, ее диаметр разделен на десять частей. На рис. 38, *б* взят координатный репер, соответствующий рис. 37 (для наглядности он увеличен в три раза); по осям X и Y отложены

[1]) Ортогональная диметрия — вид аксонометрии, в котором координатная сетка — такая, как изображена на рис. 49. При рассмотрении этого примера особенности ортогональной диметрии не играют никакой роли; просто мы должны задаться любой координатной сеткой.

отрезки $\frac{e_1}{2}$ и $\frac{e_2}{2}$. Точки окружности переносятся на рис. 38, *б* в такое же положение по новой сетке, какое они занимали на рис. 38, *а* по старой сетке. Новую сетку можно было бы сразу нанести на рис. 37 на верхнее и нижнее основания призмы. Получится рис. 39; оси координат не обозначены.

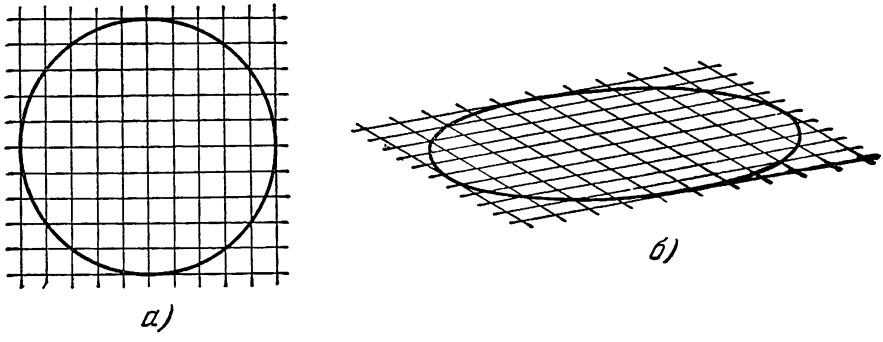


Рис. 38.

Метод координатной сетки имеет то неудобство, что приходится предварительно строить эту сетку. Это загромождает рисунок лишними линиями, которые потом приходится стирать, и значительно уменьшает точность.

От этих недостатков свободен вычислительный метод, заключающийся в вычислении прямоугольных координат точек изображения и в нанесении этих точек на миллиметровке.

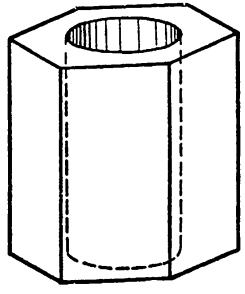


Рис. 39.

Изображение есть аффинное отображение оригинала. Следовательно, координаты точек изображения — линейные функции координат точек оригинала [1]). Введем на плоскости изображения прямоугольную декартову систему координат (ξ, η). Тогда

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ \eta &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где x', y', z' — координаты точки оригинала, а ξ, η — координаты ее изображения. Свободные члены положены равными нулю. Это значит, что за начало координат системы (ξ, η) принято изображение точки $x' = y' = z' = 0$.

---

[1]) Ср. § 3 статьи «Геометрические преобразования», стр. 75—77 этой книги ЭЭМ.

Коэффициенты в формулах (1) могут быть определены, если задаться изображением базисного тетраэдра. Возьмем, например, ортогональную изометрию[1]). Если наложить соответствующий репер на систему (ξ, η), то получится рис. 40. Обозначим размер аксонометрических единиц через

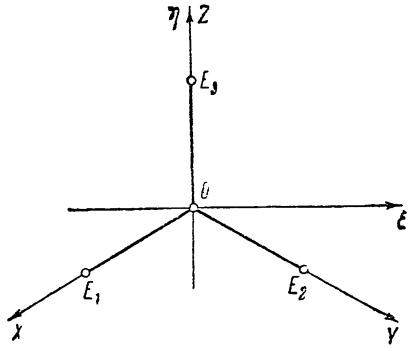


Рис. 40.

$$OE_1 = OE_2 = OE_3 = e.$$

Тогда точка E_1 имеет в системе (ξ, η) координаты $\xi = -\frac{e\sqrt{3}}{2}$, $\eta = -\frac{e}{2}$. Ее оригинал E_1 имеет координаты $x' = 1$, $y' = 0$, $z' = 0$. Повторяя это сопоставление для точек E_2 и E_3, заключаем:

точка (1, 0, 0) переходит в точку $\left(-\frac{e\sqrt{3}}{2}, -\frac{e}{2}\right)$,

» (0, 1, 0) » » » $\left(\frac{e\sqrt{3}}{2}, -\frac{e}{2}\right)$,

» (0, 0, 1) » » » $(0, e)$.

Подставляя эти координаты в формулы (1), мы получим систему шести уравнений относительно шести известных a_{ij}, из которой определим все коэффициенты:

$$a_{11} = -\frac{e\sqrt{3}}{2}, \quad a_{12} = \frac{e\sqrt{3}}{2}, \quad a_{13} = 0,$$

$$a_{21} = -\frac{e}{2}, \quad a_{22} = -\frac{e}{2}, \quad a_{23} = e.$$

Следовательно, формулы (1) для ортогональной изометрии примут вид

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{e\sqrt{3}}{2}(y' - x'), \\ \eta &= \frac{e}{2}[2z' - (x' + y')]. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Изобразим в ортогональной изометрии тело, показанное на рис. 39. Прежде всего надо выбрать желаемый размер рисунка. Положим,

[1]) См. стр. 273. Ортогональная изометрия имеет аксонометрический репер, показанный на рис. 50.

например, $e = 25$ *мм* и запишем формулы (2) так:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 21{,}65\,(y' - x'), \\ \eta &= 12{,}5\,[2z' - (x' + y')]. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Формулы (3) дают ξ и η прямо в миллиметрах. Запишем координаты вершин призмы (пока только нижнего основания).

№ точки	x'	y'	z'
1	1,000	0,000	0
2	0,500	0,866	0
3	—0,500	0,866	0
4	—1,000	0,000	0
5	—0,500	—0,866	0
6	0,500	—0,866	0

Подставляя эти координаты в формулы (3), получим следующую таблицу (в ней ξ и η даны до десятых долей миллиметра; это максимальная точность, которую может реализовать на глаз опытный чертежник при работе на миллиметровке).

№ точки	ξ	η	№ точки	ξ	η
1	—21,7	—12,5	4	21,7	12,5
2	7,9	—17,1	5	— 7,9	17,1
3	29,6	— 4,6	6	—29,6	4,6

Вершины верхнего основания отличаются от вершин нижнего основания тем, что для них $z' = 2$. Из формул (3) ясно, что для изображений значения ξ будут те же, а значения η увеличатся на 50 *мм*. Мы не приводим соответствующих таблиц.

Для изображения выреза возьмем на окружности точки через каждые 30°. На практике их берут значительно чаще, но мы здесь только иллюстрируем сущность метода. Координаты точек окружности (нижней) вычисляются по формулам:

$$x' = \frac{1}{2}\cos t, \quad y' = \frac{1}{2}\sin t, \quad z' = 0.$$

Таблица справа (на стр. 266) дает координаты точек изображения; η_1 относится к нижнему основанию цилиндра, а η_2 — к верхнему. Величины η_1 и η_2 связаны очень просто:

$$\eta_2 = \eta_1 + 50.$$

№ точки	x'	y'	z'	№ точки	ξ	η_1	η_2
1	0,500	0,000	0	1	—10,8	—6,3	43,7
2	0,433	0,250	0	2	— 4,0	—8,5	41,5
3	0,250	0,433	0	3	4,0	—8,5	41,5
4	0,000	0,500	0	4	10,8	—6,3	43,7
5	—0,250	0,433	0	5	14,8	—2,3	41,7
6	—0,433	0,250	0	6	14,8	2,3	52,3
7	—0,500	0,000	0	7	10,8	6,3	56,3
8	—0,433	—0,250	0	8	4,0	8,5	58,5
9	—0,250	—0,433	0	9	— 4,0	3,5	58,5
10	0,000	—0,500	0	10	—10,8	6,3	56,3
11	0,250	—0,433	0	11	—14,8	2,3	52,3
12	0,433	—0,250	0	12	—14,8	—2,3	41,7

Теперь остается взять миллиметровку и наносить точки по координатам (ξ, η) Получим рис. 41 [1]).

Читатель должен иметь в виду, что мы выбрали очень простые примеры, желая голько иллюстрировать метод координатной сетки и вычислительный метод. Эти методы, особенно вычислительный, предназначены для сложных оригиналов. Рассмотренный здесь оригинал можно изобразить более элементарными способами. В частности, когда изображение шестиугольника уже построено, то можно соединить его центр с вершинами и соединительные отрезки разделить пополам. Эллипс проходит через середины этих отрезков. Кроме того, можно указать направления, сопряженные построенным относительно этого эллипса. По этим данным эллипс строится гораздо проще, чем это сделано в тексте.

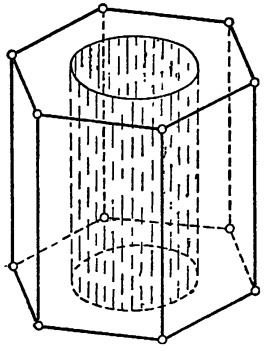


Рис. 41.

3.7. Аксонометризация чертежа. *Аксонометризацией чертежа* называется добавление к полному чертежу таких условий, относящихся к оригиналу, что чертеж становится метрически определенным.

Приведем пример На рис. 42 показаны оси координат и плоскость, заданная следами. Чертеж этот определяет оригинал только с точностью до аффинного преобразования. Пусть дано дополнительно,

[1]) Подробности о вычислительном методе читатель может найти в работе Н. М Бескина. Вычислительный метод построения изображений, сб. «Методы начертательной геометрии и ее приложения» под ред. Н. Ф. Четверухина, М., 1955, стр. 83—99.

что система координат прямоугольная:

$$\angle X'O'Y = \angle Y'O'Z' = \angle Z'O'X' = 90°.$$

Это условие еще не делает чертеж аксонометрическим, потому что неизвестны отрезки $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$.

Допустим, что требуется изобразить перпендикуляр, опущенный из начала координат на плоскость $A'B'C'$. Обозначим основание этого перпендикуляра через P'. За P (изображение точки P') можно принять любую точку внутри треугольника ABC, это подтверждает метрическую неопределенность чертежа. Если бы ребра $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ были известны, то перпендикуляр OP нельзя было бы изобразить произвольно: положение точки P было бы вполне определенным.

Обратно, если мы на рис. 42 изобразим перпендикуляр, т. е. выберем произвольно точку P, то определятся отношения ребер $O'A':O'B':O'C'$, т. е. чертеж станет метрически определенным с точностью до масштаба. Докажем это утверждение. Для этого покажем, что, задав любую точку P внутри треугольника ABC, можно, и притом единственным образом, реконструировать тетраэдр $O'A'B'C'$ (с точностью до масштаба).

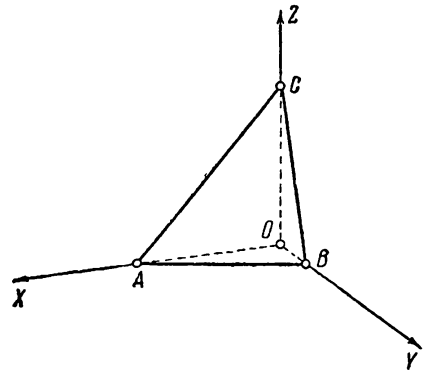


Рис. 42.

Точка P лежит внутри треугольника ABC потому, что высота тетраэдра с прямыми плоскими углами при вершине проходит через точку пересечения высот основания, а последняя точка в данном случае лежит внутри потому, что треугольник $A'B'C'$ остроугольный. В самом деле, квадраты его сторон суть

$$O'A'^2 + O'B'^2,$$
$$O'B'^2 + O'C'^2,$$
$$O'C'^2 + O'A'^2,$$

и сумма любых двух из этих квадратов больше третьего.

На рис. 43, *а* отдельно изображен треугольник следов ABC рис. 42 и внутри него произвольно взята точка P. Через нее проведены прямые AL, BM и CN.

Так как $O'P'$ — высота тетраэдра $O'A'B'C'$, то, как было сказано выше, *точка P' есть точка пересечения высот треугольника $A'B'C'$*. Значит, AL, BM и CN — изображения высот. Задача, стоящая перед нами, может быть теперь сформулирована так: дано аффинное изображение треугольника с высотами (рис. 43, *а*) и требуется восстановить оригинал (с точностью до размера).

Неопределенность размера позволяет нам выбрать один отрезок произвольно; выберем сторону $A'B'$ (рис. 43, *б*). Построим точку N' по условию

$$\frac{A'N'}{N'B'} = \frac{AN}{NB}.$$

Затем восставим в точке N' перпендикуляр к $A'B'$; точка C' должна лежать на этом перпендикуляре.

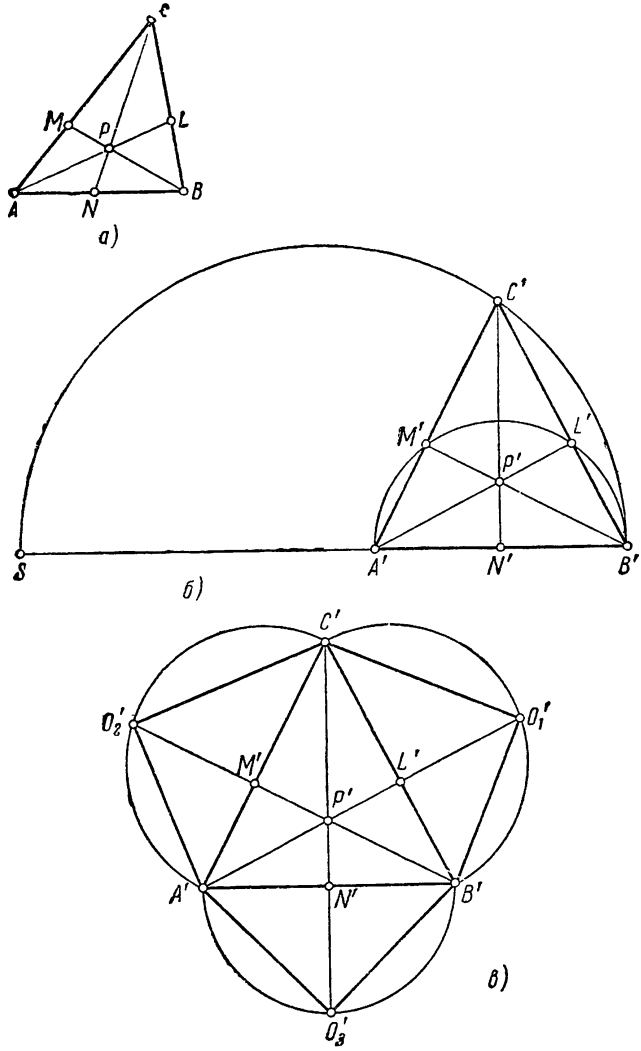


Рис. 43.

Построим на $A'B'$, как на диаметре, полуокружность. Точки L' и M' должны лежать на этой полуокружности, потому что

$$\angle A'L'B' = \angle B'M'A' = 90°.$$

Так как точки L' и C' должны удовлетворять условию

$$\frac{B'C'}{B'L'} = \frac{BC}{BL},$$

то точка C' должна лежать на полуокружности, получающейся из построенной ранее полуокружности при помощи гомотетии[1]) с центром B' и коэффициентом $\frac{BC}{BL}$ (отношение $\frac{BC}{BL}$ нам известно из рис. 43, *а*). Эту полуокружность легко построить, найдя на прямой $A'B'$ точку S из условия

$$\frac{B'S}{B'A'} = \frac{BC}{BL}$$

и приняв $B'S$ за диаметр. Значит, точка C' есть точка пересечения этой полуокружности с перпендикуляром к прямой $A'B'$ в точке N'. Тем самым треугольник $A'B'C'$ построен.

Чтобы не загромождать чертежа, дальнейшая реконструкция тетраэдра $O'A'B'C'$ продолжена на отдельном рис. 43, *в*. На этом рисунке снова воспроизведен только что построенный треугольник $A'B'C'$ с высотами $A'L'$, $B'M'$ и $C'N'$.

Согласно теореме о трех перпендикулярах точка L' служит не только основанием высоты $A'L'$, но и основанием высоты $O'L'$ боковой грани $O'B'C'$. Поэтому, если построить развертку тетраэдра $O'A'B'C'$, разрезав его по ребрам $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$ и совместив боковые грани с плоскостью основания, то точка O' попадет на продолжение высоты $A'L'$. Кроме того, эта точка должна лежать на полуокружности, построенной на $B'C'$ как на диаметре. На рис. 43, *в* показано построение точек O'_1, O'_2 и O'_3, в которые перейдет общая вершина O' трех боковых граней при развертке.

Если даны некоторые метрические условия, касающиеся оригинала, недостаточные для того, чтобы чертеж стал метрически определенным, то получается частичная аксонометризация чертежа. Например, если известно, что на рис. 44 точки P' и Q' лежат соответственно в нижней и верхней гранях параллелепипеда и прямая $P'Q'$ перпендикулярна этим граням, то рис. 44 частично аксонометризованный. Высоту параллелепипеда, проведенную из точки A', нельзя изобразить произвольно: ее надо чертить параллельно PQ. Высоту же грани $A'B'C'D'$, проведенную из точки A', можно изобразить произвольно.

Частично аксонометризованный чертеж требует большой осторожности в обращении с ним, потому что на нем кое-что можно изображать произвольно, а кое-что нельзя. Вот поучительный пример возможных здесь ошибок.

---

[1]) Определение гомотетии см. на стр. 55 этой книги ЭЭМ.

В течение многих веков было принято изображать на рисунке плоскость в виде параллелограмма. При этом негласно предполагалось, что этот параллелограмм изображает прямоугольный кусок плоскости. Тем самым в рисунок вносилась частичная аксонометризация (показаны два перпендикулярных направления). Эта частичная аксонометризация ограничивает свободу изображений в плоскости. На это обстоятельство не обращали внимания, что приводило к ошибкам. Поэтому за последние годы все больше распространяется обыкновение изображать кусок плоскости с оборванными краями.

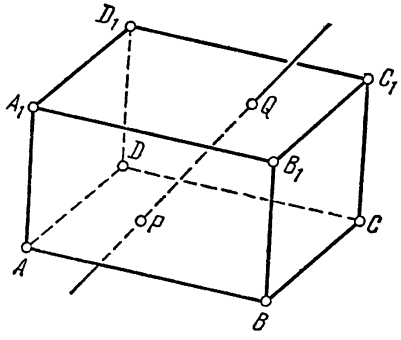


Рис. 44.

Пусть, например, требуется изобразить правильную четырехугольную пирамиду, стоящую на горизонтальной плоскости. Квадрат, служащий основанием пирамиды, может быть изображен любым параллелограммом, но на рис. 45, *а* это положение неприменимо ввиду частичной аксонометризации. Рис. 45, *а* неправилен, потому что на нем два различных направления (AD и LO) изображают перпендикуляры к одному и тому же направлению ($AB \parallel LM$). На рис. 45, *б* то же

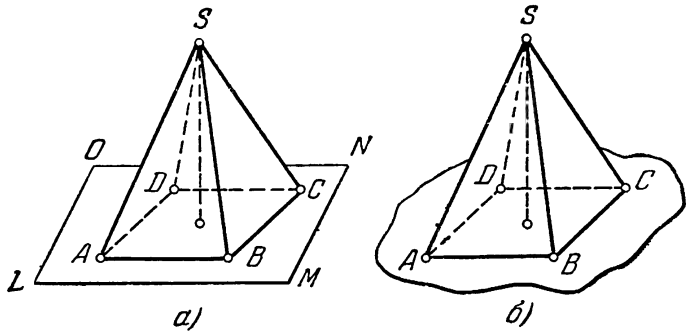


Рис. 45.

самое изображение правильной четырехугольной пирамиды показано на плоскости с оборванными краями; этот рисунок верен.

На рис. 46, *а* изображен прямой круговой конус. Рис. 46, *а* неправилен. Его ошибочность обнаруживается, если провести два сопряженных диаметра эллипса, один из которых параллелен какому-нибудь «краю» плоскости. На рис. 46, *а* $CD \parallel LO$, а $AB \nparallel LM$. Рис. 46, *б* правилен.

Предостережем читателя еще от одной возможной ошибки. Каждый из рис. 45, *б* и 46, *б* в отдельности правилен, но если бы мы использовали оба эти изображения, показав правильную четырехугольную пирамиду и конус, стоящие на одной и той же плоскости, хотя бы

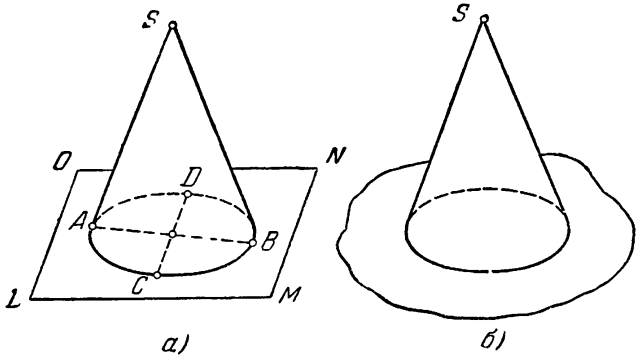


Рис. 46.

и с оборванными краями, то мы получили бы ошибочный рисунок. Пирамида (рис. 45, *б*) определяет метрику в плоскости основания, конус (рис. 46, *б*) тоже, и эти метрики не совпадают.

3.8. Ортогональная (прямоугольная) аксонометрия. До сих пор мы рассматривали свободные изображения. В инженерной практике весьма распространена аксонометрия с заданными параметрами.

Согласно теореме Польке — Шварца куб можно изобразить произвольно, например так, как на рис. 47. Между тем человек, не изучавший начертательной геометрии, не поверит, что это куб, так как это изображение *не похоже* на куб. Это ставит перед нами вопрос: от чего зависит наглядность изображения, т. е. сходство с оригиналом?

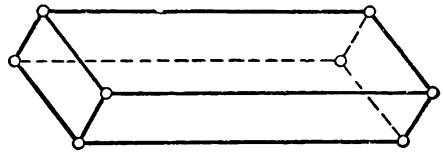


Рис. 47.

В параллельной проекции изображение показывает оригинал так, как он виден наблюдателю, смотрящему с очень далекого расстояния вдоль проектирующих прямых. Самый процесс проектирования близок к геометрическому процессу зрения. Однако при рассматривании любого предмета мы всегда помещаемся перед ним. Плоскость изображения следует вообразить перед предметом или за предметом. Все лучи зрения (при рассматривании издалека) перпендикулярны плоскости изображения. Поэтому *самое наглядное изображение получается при ортогональном или близком к ортогональному проектировании.*

Возвращаясь к рис. 47, скажем, что для того, чтобы изображение было «похоже» на оригинал, надо, во-первых, чтобы оно было построено без нарушения геометрических правил (которые аналогичны законам зрения) и, во-вторых, чтобы оно давало вид оригинала с привычной точки зрения. Изображение куба на рис. 47 не удовлетворяет второму условию. Здесь глаз наблюдателя помещается чуть сверху, чуть впереди и очень далеко влево. Угол проектирующих лучей к плоскости изображения $\sigma \approx 14°$ [1]), т. е. проекция очень далека от ортогональной.

Кроме угла σ, аксонометрия характеризуется следующими параметрами:

α, β, γ — углы проектирующих лучей с натуральными осями. В аксонометрии принято называть натуральным все, что относится к оригиналу, а аксонометрическим — все, что относится к изображению. Например, $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ — натуральные оси, а OX, OY, OZ — аксонометрические оси.

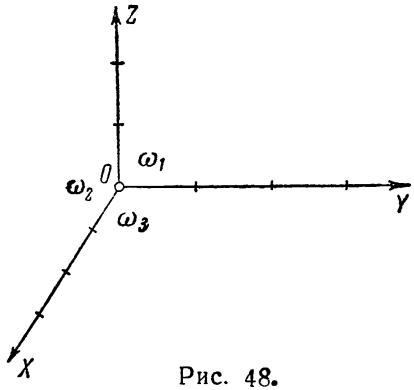


Рис. 48.

p, q, r — показатели (коэффициенты) искажения. Так называются отношения аксонометрических единиц $e_1 = OE_1$, $e_2 = OE_2$, $e_3 = OE_3$ к натуральной единице e (она предполагается одинаковой по всем осям):

$$p = \frac{e_1}{e}, \quad q = \frac{e_2}{e}, \quad r = \frac{e_3}{e}. \qquad (4)$$

Предостережем читателя от возможного недоразумения. В учебниках начертательной геометрии он может встретить утверждение, что в ортогональной аксонометрии (т. е. аксонометрии с углом $\sigma = 90°$) коэффициенты искажения связаны формулой

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2.$$

Разъясняем, что эта нормировка имеет силу лишь в том случае, если изображение есть *непосредственная проекция* оригинала на плоскость. Мы же рассматриваем метод изображения, заключающийся

---

[1]) Здесь мы сталкиваемся с задачей: имея уже выполненное изображение в параллельной проекции, найти параметры, определяющие проецирующий аппарат. Например, зная, что на рис. 47 изображен куб, узнать угол σ. Графическое решение этой задачи дано в книге Е. А. Глазунова и Н. Ф. Четверухина [2] (см. список литературы в конце статьи) в § 9, а аналитическое — в статье А. И. Островского «Основные формулы параллельной аксонометрии» (Труды московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике, Москва, 1958, стр. 108—110).

в параллельном проектировании и последующем подобном преобразовании. В этом случае *все коэффициенты искажения могут быть заданы произвольно, однако с соблюдением неравенств: квадрат любого коэффициента искажения не превышает суммы квадратов двух других.*

Углы между аксонометрическими осями (рис. 48) принято обозначать так:

$$\left.\begin{aligned} \angle XOY &= \omega_3, \\ \angle YOZ &= \omega_1, \\ \angle ZOX &= \omega_2, \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Между перечисленными параметрами существуют связи. Выбирая какую-нибудь ортогональную аксонометрическую проекцию, естественнее всего задаться коэффициентами искажения. Заметим, что если все коэффициенты искажения различны, то изображение называется триметрическим, если два из них одинаковы, а третий отличен от них, то диметрическим, если все три одинаковы, то изометрическим.

Если все коэффициенты искажения заданы, то остальные параметры выражаются так:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\sqrt{2}\cdot p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \sin\beta &= \frac{\sqrt{2}\cdot q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \sin\gamma &= \frac{\sqrt{2}\cdot r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega_1 &= \frac{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)(-p^2+q^2+r^2)}}{2qr}, \\ \sin\omega_2 &= \frac{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)(p^2-q^2+r^2)}}{2rp}, \\ \sin\omega_3 &= \frac{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)(p^2+q^2-r^2)}}{2pq}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Если проектирующий луч OO' проходит в первом октанте, то углы ω_1, ω_2 и ω_3 — тупые. Вывод этих формул вполне элементарен, и мы его не приводим.

Выбирая параметры ортогональной аксонометрии, мы исходим из того, какие размеры должны иметь изображения ребер базисного куба, т. е. куба с вершиной O' и ребрами, идущими по осям $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$. При этом следует различать два случая. Первый — когда

базисный куб имеет определенные размеры. Например, его ребро $e = 1$ *м*, а размеры изображения должны быть $e_1 = 1$ *см*, $e_2 = e_3 = 2$ *см*. В этом случае коэффициенты искажения определяются точно

$$p = 0{,}01, \quad q = r = 0{,}02.$$

Второй случай — когда размеры базисного куба не указаны, т. е. требуется *какой-нибудь* куб (с ребрами, параллельными координатным осям) изобразить так, чтобы было $e_1 = 1$ *см*, $e_2 = e_3 = 2$ *см*. В этом случае коэффициенты искажения определяются только с точностью до множителя, т. е. определяются только их отношения

$$p:q:r = 1:2:2.$$

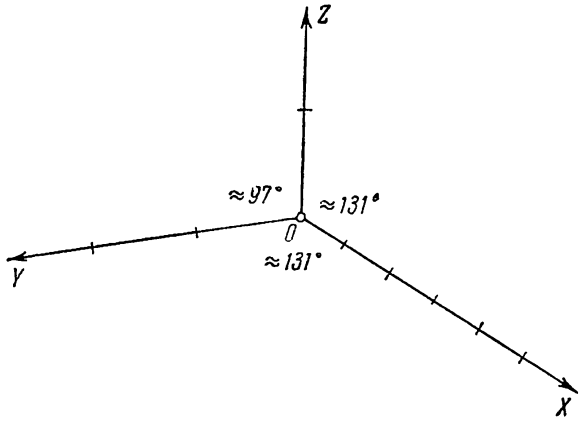


Рис. 49.

Можно, например, положить $p = 1$, $q = r = 2$. Выбор множителя несуществен, потому что правые части формул (6) и (7) однородны относительно p, q, r.

Полагая $p = 1$, $q = r = 2$, вычислим, например, ω_1, ω_2, ω_3:

$$\sin \omega_1 = \frac{3\sqrt{7}}{8} \approx 0{,}9922,$$

$$\sin \omega_2 = \sin \omega_3 = \frac{3}{4}.$$

Учитывая, что углы ω_1, ω_2 и ω_3 тупые, найдем

$$\omega_1 \approx 97°11' \approx 97°, \quad \omega_2 = \omega_3 \approx 131°25' \approx 131°$$

(рис. 49). Мы видим, что выбор коэффициентов искажения в ортогональной аксонометрии вполне определяет углы между аксонометрическими осями.

Рассмотрим еще чрезвычайно употребительную систему — ортогональную изометрию. Полагая $p = q = r = 1$, получим

$$\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\sin \omega_1 = \sin \omega_2 = \sin \omega_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В этом случае $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 120°$. Изображение системы координат показано на рис. 50. Куб выглядит, как показано на рис. 51. Как

видно, $\alpha = \beta = \gamma$, т. е. направление проектирующих прямых совпадает с направлением диагонали куба. Все это дает следующую

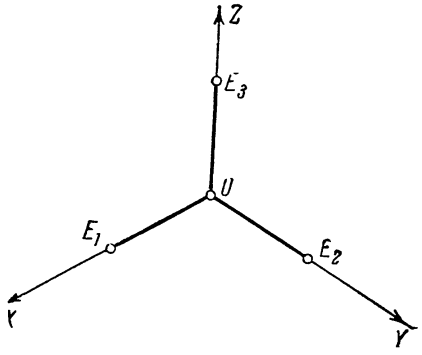


Рис. 50.

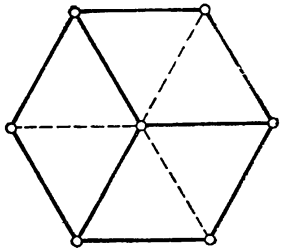


Рис. 51.

геометрическую картину: надо провести плоскость изображения перпендикулярно диагонали куба и проектировать на нее по направлению, параллельному этой диагонали. Тогда получится такое изображение, как на рис. 51. Из двух вершин куба, лежащих на проектирующей диагонали, одна заслоняет другую.

§ 4. Метод Монжа

4.1. Комбинированные изображения. Аксонометрия — один из методов получения метрически определенного изображения. Из других методов наибольшее распространение имеют так называемые комбинированные изображения. Как мы говорили выше, плоское точечное изображение не может (без дополнительных условий) определять оригинал из-за нехватки одного параметра. Поэтому иногда задают несколько разных изображений одного оригинала. Систему нескольких изображений одного оригинала называют комбинированным изображением или комплексным чертежом.

4.2. Сущность метода Монжа. Примером комбинированного изображения служит широко известный метод Монжа.

В методе Монжа точка пространства ортогонально проектируется на две взаимно перпендикулярные плоскости — горизонтальную Π_1 и фронтальную Π_2 (рис. 52). Получающиеся точки M_1' и M_2' называются соответственно горизонтальной и фронтальной проекциями точки M'. Затем плоскость Π_2 вращается в направлении, указанном стрелкой, до совмещения с плоскостью Π_1. После совмещения получается рис. 53, называемый эпюром Монжа. На эпюре Монжа точка M' определяется двумя проекциями M_1 и M_2, но эти проекции не могут задаваться обе вполне произвольно: они должны лежать на прямой, перпендикулярной оси проекций XX; эта прямая называется линией связи.

Точка на плоскости задается двумя координатами. Поэтому задать одну проекцию точки, например горизонтальную, значит задать две координаты. Задание фронтальной проекции, *которая должна лежать на уже известной прямой* (проходящей через точку M_1 перпендикулярно XX), равносильно заданию еще одной координаты. Тем самым положение точки M' в пространстве полностью определяется. Если задана только горизонтальная проекция, то определяется бесконечное множество конкурирующих точек, лежащих на одном перпендикуляре к плоскости Π_1. Эти конкурирующие точки различаются своими фронтальными проекциями. Задание фронтальной проекции эквивалентно также заданию числовой отметки, указывающей высоту точки над горизонтальной плоскостью.

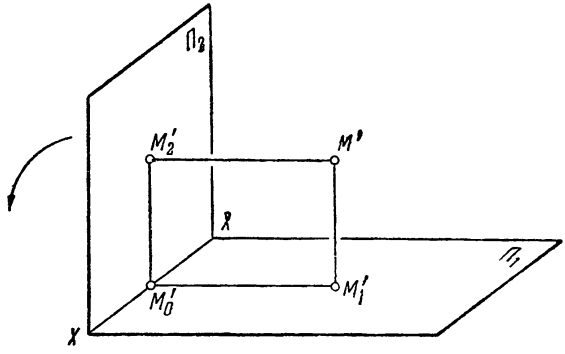


Рис. 52.

Бывают исключительные случаи, когда задания двух проекций недостаточно. Например, если плоскость α перпендикулярна плоскостям Π_1 и Π_2, то прямые, лежащие в этой плоскости, невозможно различить по своим проекциям. В таких случаях задается еще третья проекция — профильная.

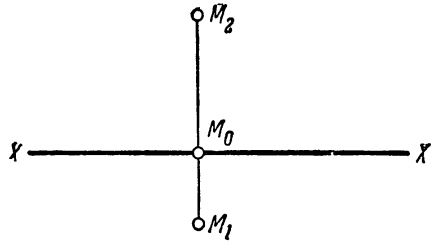


Рис. 53.

Метод Монжа определяет оригинал метрически точно, т. е., имея изображение в виде эпюра Монжа, можно ответить на любой вопрос, относящийся к оригиналу.

Мы не вдаемся ни в какие подробности, касающиеся метода Монжа, потому что он детально излагается во всех учебниках начертательной геометрии и изучается в средней школе (в курсе черчения). Заметим, что идея задавать оригинал двумя проекциями принадлежит не Монжу, а является гораздо более старой. Она применялась, например, древнеримским архитектором Витрувием. Монж впервые привел этот метод в систему и показал, что можно не только изобразить любой оригинал, но и, пользуясь этим изображением, решить все геометрические задачи, относящиеся к оригиналу [1]).

[1]) См. по этому вопросу вступительную статью Д. И. Каргина к книге Г. Монжа [3], указанной в конце статьи.

§ 5. Центральные проекции

5.1. Свойства центральной проекции. Теория центральных проекций сложнее теории параллельных проекций настолько, насколько проективное преобразование сложнее аффинного. Мы изложим некоторые вопросы, относящиеся к центральным проекциям, исходя из тех же проблем, которые решались для параллельных проекций, и указывая, в чем заключается разница в ответах.

Центральная проекция строится следующим образом. Фиксируем в пространстве центр проекции S и плоскость проекции α (рис. 54). Пусть M' — любая точка пространства, отличная от S. Проводим прямую SM' (проектирующая прямая); точка M ее пересечения с плоскостью α считается изображением точки M'.

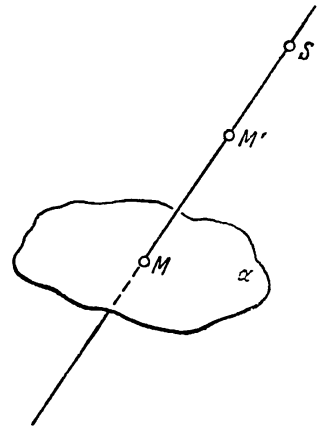


Рис. 54.

Центральную проекцию удобно рассматривать только в проективном пространстве (параллельную проекцию мы изучали в аффинном пространстве). Если мы не введем несобственных (бесконечно удаленных) элементов [1]), то нельзя будет утверждать, что всякая точка пространства имеет изображение (потому что проектирующая прямая SM' может оказаться параллельной плоскости α). В проективном пространстве всякая точка (кроме S) имеет изображение. При этом изображение собственной точки может оказаться несобственной точкой и изображение несобственной точки может оказаться собственной точкой.

Центральные проекции обладают следующими свойствами (сравните со свойствами 1—4 параллельных проекций, стр. 235—236):

1. *Каждой точке пространства, кроме центра проекции, однозначно соответствует точка на* (проективной!) *плоскости* α.

Конкурирующие точки — те, которые лежат на одной прямой, проходящей через S.

2. *Прямая, если только она не проектирующая, изображается прямой; проектирующая прямая изображается точкой.*

3. *Если точки* A', B', C', D' *принадлежат одной прямой* (не проектирующей), *то*

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'D'}{D'C'}.$$

Иначе говоря: *сложное отношение четырех точек, лежащих на одной прямой, есть инвариант центрального проектирования.*

[1]) Ср. § 7 статьи «Геометрические преобразования», стр. 112—113 этой книги ЭЭМ.

Условимся теперь, что полученную в плоскости α центральную проекцию мы еще будем подвергать произвольному аффинному преобразованию [1]) (в плоскости α). Таким образом, *изображение точки по методу центральных проекций не есть непосредственная центральная проекция этой точки.*

Теперь, опуская доказательства, сопоставим свойства изображений по методу центральной и параллельной проекций.

Изображая плоскую фигуру в параллельной проекции, можно произвольно изобразить любой треугольник, а в *центральной проекции — любой четырехвершинник* [2]) (т. е. четыре точки общего положения в плоскости).

Если какой-нибудь четырехвершинник, входящий в состав плоской фигуры, уже изображен, то изображения всех остальных точек этой фигуры однозначно определяются (в параллельной проекции такую роль играл треугольник, или, что то же самое, «трехвершинник»). Пусть $A'B'C'D'$ — оригинал (рис. 55, *а*), а $ABCD$ — изображение (рис. 55, *б*); E', F', G' — диагональные точки четырехугольника $A'B'C'D'$, E, F, G — соответственные диагональные точки четырехугольника $ABCD$. Пусть M' — еще одна точка оригинала. Прямая $A'M'$ пересекает прямые $B'C'$, $C'D'$ и $B'D'$ соответственно в точках X', Y' и Z'. Изображения этих точек вполне определены сложными отношениями, которые должны быть одинаковы в оригинале и в изображении [3])

$$(BCFX) = (B'C'F'X').$$

Это равенство позволяет найти точку X. Аналогично находятся точки Y и Z. Впрочем, точки Y и Z можно найти как пересечения

---

[1]) Искажение, которому подвергается оригинал при замене его изображением, принципиально не увеличилось бы, если бы мы подвергли полученную проекцию не аффинному, а любому проективному преобразованию, потому что само центральное проектирование есть проективное преобразование. Мы ограничиваемся аффинным преобразованием (для большой элементарности изложения) именно потому, что эта разница несущественна.

[2]) Мы говорим здесь о «четырехвершиннике», а не о четырехугольнике в обычном смысле слова (который имеет четыре «стороны» и две «диагонали»), поскольку при центральном проектировании различие между «сторонами» и «диагоналями» теряет смысл. Мы считаем, что четырехвершинник $A'B'C'D'$ имеет три пары *противоположных сторон* $A'B'$ и $C'D'$, $A'C'$ и $B'D'$, $A'D'$ и $B'C'$ (всего шесть сторон). Каждая пара противоположных сторон четырехвершинника имеет точку пересечения, называемую его *диагональной точкой*. Всего, таким образом, у четырехвершинника есть три диагональных точки.

[3]) Символ $(ABCD)$ обозначает сложное отношение

$$(ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}.$$

прямой AX соответственно с прямыми DE и BD (ибо прямые переходят в прямые, их точки пересечения — в точки пересечения). Положение точки M на прямой AX определяется из условия

$$(AXYM) = (A'X'Y'M')$$

(вместо пары точек X, Y можно пользоваться парами Y, Z или Z, X).

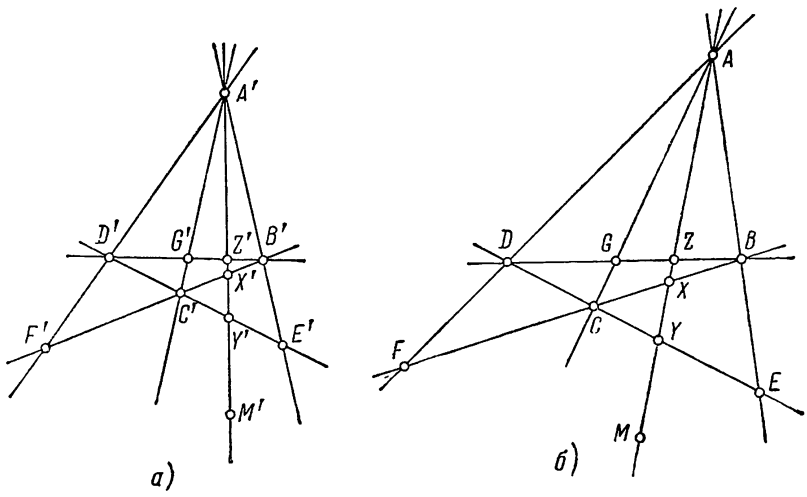


Рис. 55.

5.2. Проективные координаты. Полезно видеть четырехвершинник и с иной точки зрения. На рис 56 четырехвершинник OE_1EE_2 дополнен двумя диагональными точками F_1 и F_2. Задание точки общего положения E может быть заменено заданием двух точек F_1 и F_2 на прямых OE_1 и OE_2. Две оси OX и OY и по две точки на каждой из них (кроме O) образуют проективную систему координат. На рис. 57 дано сопоставление аффинной и *проективной систем координат*. На рис. 57, *а* показаны оси OX и OY и на каждой оси — ее единичная точка. Если M — любая точка плоскости, то для определения ее аффинных координат следует провести через нее прямые, параллельные осям X и Y (т. е. прямые, проходящие через несобственные точки этих осей). Эти прямые определят на осях OX и OY точки P_1 и P_2.

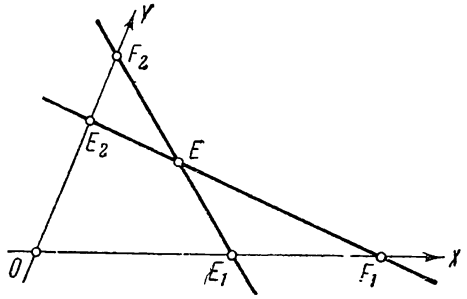


Рис. 56.

Отношения

$$x=\frac{OP_1}{OE_1},\qquad y=\frac{OP_2}{OE_2}$$

суть *аффинные координаты точки M.*

На рис. 57, *б* показаны оси OX и OY и на каждой оси по две точки (кроме O). Если M — любая точка плоскости, то для определения ее проективных координат следует провести через нее прямые MF_1 и MF_2. Уже из этого ясно, что точки F_1 и F_2 играют

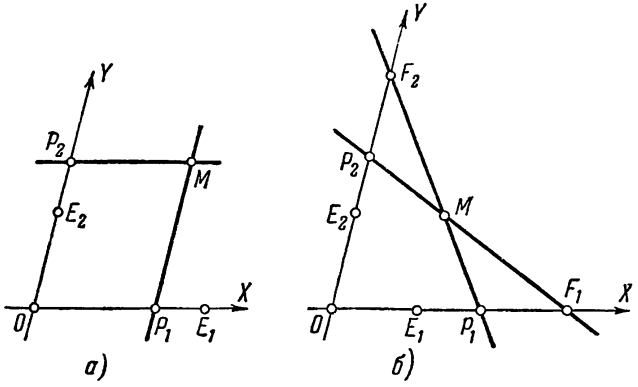


Рис. 57.

ту же роль, какую в аффинной системе координат играют несобственные точки осей. Эти прямые определят на осях OX и OY точки P_1 и P_2. Сложные отношения

$$x=(OF_1P_1E_1)=\frac{OP_1}{P_1F_1}:\frac{OE_1}{E_1F_1},$$

$$y=(OF_2P_2E_2)=\frac{OP_2}{P_2F_2}:\frac{OE_2}{E_2F_2}$$

суть *проективные координаты*[1]) точки M (при этом координаты x и y могут принимать и «значение» ∞). Из этих формул видно, что

для точки O $x=0$,
» » E_1 $x=1$,
» » F_1 $x=\infty$.

Точка E (рис. 56) имеет координаты $x=1$, $y=1$; она называется единичной точкой плоскости.

---

[1]) Эти координаты называются *неоднородными*. Они обладают одним существенным дефектом: точки «бесконечно удаленной» (несобственной) прямой, не лежащие на осях OX, OY, имеют координаты $x=\infty$, $y=\infty$ и потому не различаются в этих координатах. Для устранения этого дефекта используются *однородные проективные координаты* (ср. стр. 118 этой книги ЭЭМ).

При удалении точек F_1 и F_2 соответственно по осям X и Y в бесконечность проективные координаты превращаются в аффинные.

5.3. Использование проективных координат для построения изображений. При изображении плоских фигур можно принять четырехвершинник $A'B'C'D'$ за базисный, т. е. считать, что

точка A' — начало координат,
» B' — единичная точка оси X',
» C' — » » » Y',
» D' — » » плоскости $X'Y'$.

Четырехугольник $ABCD$ тоже примем за базисный четырехугольник в плоскости изображения. Тогда *каждая точка M' оригинала будет*

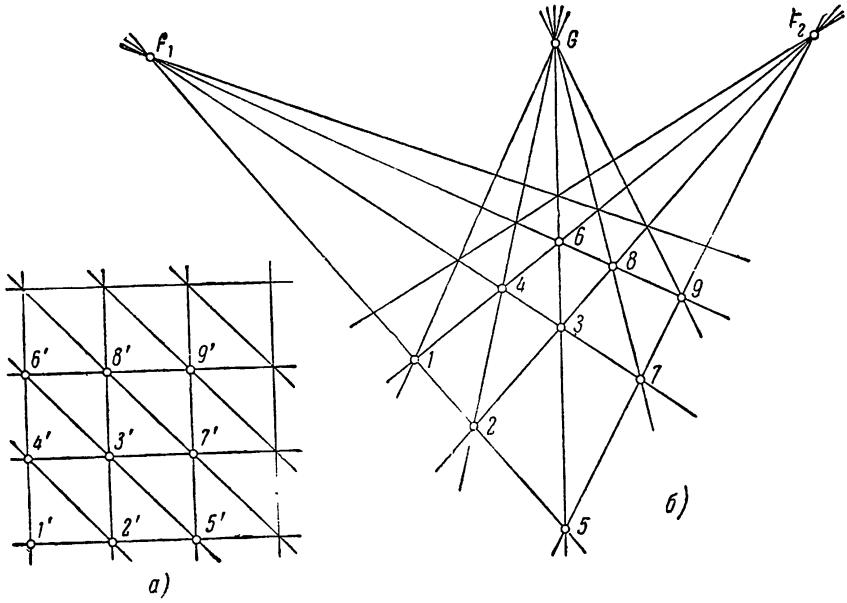


Рис. 58.

изображаться точкой M, которая имеет относительно четырехвершинника $ABCD$ те же самые проективные координаты, что и точка M' относительно четырехвершинника $A'B'C'D'$.

Так же как и в параллельной проекции, специально строить координаты каждой точки было бы слишком громоздко. Гораздо удобнее построить в плоскости оригинала декартову прямоугольную сетку, а в плоскости изображения — изображение этой сетки. На рис. 58, *а*, показана декартова прямоугольная сетка, т. е. сетка из равных квадратов. Прямые одного семейства параллельны между собой, т. е. проходят через одну несобственную точку; следовательно,

их изображения тоже проходят через одну точку (вообще говоря, собственную). Если построить изображения несобственных точек обоих семейств, то прямая, соединяющая эти изображения, служит изображением несобственной прямой плоскости оригинала (изображение несобственной прямой называется *линией схода*).

Пусть $1'2'3'4'$ — один из квадратов декартовой прямоугольной сетки. Имея его, можно строить сетку аффинным способом, т. е. не отмеряя отрезков, а пользуясь проведением параллельных. Построение можно производить в такой последовательности:

1) проводим прямую $2'4'$;

2) через точку $3'$ проводим прямую, параллельную $2'4'$. Она пересечет прямые $1'2'$ и $1'4'$ соответственно в точках $5'$ и $6'$; это — новые два узла сетки;

3) через $5'$ и $6'$ проводим прямые, параллельные соответственно прямым $1'4'$ и $1'2'$. Получаем еще три узла: $7'$, $8'$ и $9'$ и т. д.

Теперь ясно, как построить изображение сетки. Первый квадрат можно изобразить любым четырехугольником; пусть это будет четырехугольник 1234 (рис. 58, *б*). Точки [1]) $F_1 \equiv 12 \times 34$ и $F_2 \equiv 14 \times 23$ суть точки схода прямых сетки; прямая F_1F_2 — линия схода. Прямые, пересекающиеся на *линии схода*, изображают параллельные прямые.

Точка $G \equiv F_1F_2 \times 24$ есть точка схода диагоналей, параллельных $2'4'$. Через точку 3 проводим прямую $3G$ и находим точки 5 и 6. Дальнейшее построение не требует объяснений.

Чтобы яснее понять происхождение изображения, показанного на рис. 58, *б*, вообразим две прямые, проходящие через S и параллельные прямым декартовой координатной сетки. Они пересекают плоскость изображения α в точках F_1 и F_2. Линия схода F_1F_2 есть пересечение плоскости, проходящей через S и параллельной плоскости оригинала, с плоскостью изображения. Рис. 59 снабжен дополнительной штриховкой и гораздо нагляднее.

Окружность в центральных проекциях может изображаться любой нераспадающейся кривой второго порядка: эта кривая не должна пересекать линию схода.

5.4. Понятие о центральной аксонометрии. Вопрос об изображении пространственных фигур в центральной проекции разрешается аналогично такому же вопросу в параллельной проекции: надо изобразить систему координат и показать жесткую проективную связь изображаемых элементов фигуры с этой системой координат. Разница заключается в том, что система отнесения здесь другая.

Проективная система координат в трехмерном пространстве — это три неколлинеарные оси $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$, на каждой из которых

---

[1]) Символом 12 обозначается прямая, проходящая через точки 1 и 2; 12×34 обозначает точку пересечения прямых 12 и 34.

даны по две точки (кроме O'). Соединяя между собой точки E_1', E_2', E_3', а также F_1', F_2', F_3', мы представим эту систему координат так: два треугольника $E_1'E_2'E_3'$ и $F_1'F_2'F_3'$, лежащие в разных плоскостях, причем прямые, соединяющие соответственные вершины этих треугольников, проходят через одну точку (т. е. треугольники перспективны). Такая фигура (рис. 60) называется «дезарговой конфигурацией». Дезаргова конфигурация в проективном пространстве играет ту же роль, какую играет тетраэдр в аффинном.

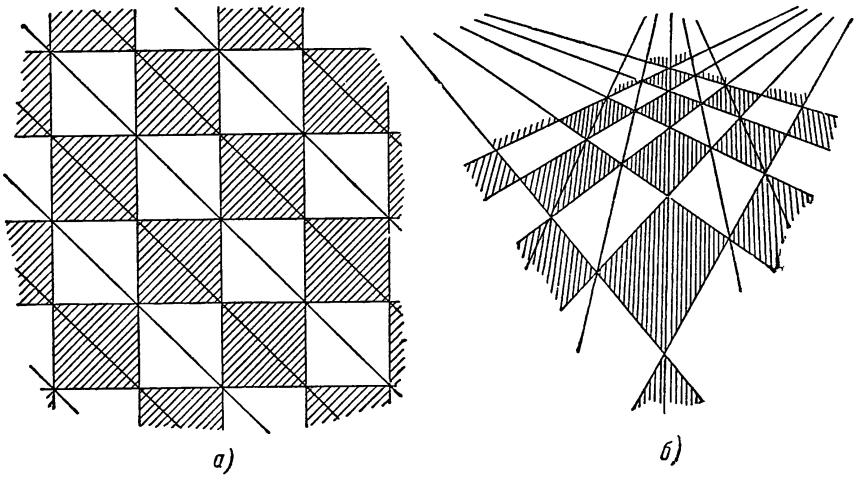


Рис. 59.

Особый интерес представляет дезаргова конфигурация, для которой

$$\begin{cases} \angle X'O'Y' = \angle Y'O'Z' = \angle Z'O'X' = 90°, \\ O'E_1' = O'E_2' = O'E_3'; \\ \text{точки } F_1,\ F_2,\ F_3 \text{ несобственные.} \end{cases}$$

Такую дезаргову конфигурацию мы будем называть прямоугольной равнобедренной.

Изображением пространственной дезарговой конфигурации служит плоская дезаргова конфигурация: у нее оси OX, OY и OZ лежат в одной плоскости (плоскости рисунка).

Для центральных проекций имеет место теорема, аналогичная теореме Польке — Шварца для параллельных проекций. Приведем эти теоремы в сопоставлении.

Вопрос. Можно ли, параллельно проектируя гетраэдр, получить наперед заданный четырехвершинник?

Ответ (теорема Польке—Шварца). Получить в точности данный четырехвершинник, вообще говоря, нельзя, но всегда можно получить его с однопараметрическим искажением, а именно: можно получить четырехвершинник, подобный данному.

Если же говорить не о непосредственной параллельной проекции, а об изображении по методу параллельной проекции, то любой четырехвершинник может служить изображением любого тетраэдра.

Вопрос. Можно ли, центрально проектируя пространственную дезаргову конфигурацию, получить наперед заданную плоскую дезаргову конфигурацию?

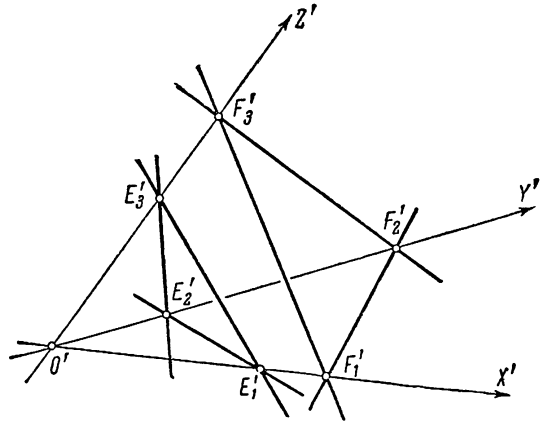


Рис. 60.

Ответ (аналог теоремы Польке—Шварца для центральной проекции). Получить в точности данную плоскую дезаргову конфигурацию, вообще говоря, нельзя, но всегда можно получить ее с двухпараметрическим искажением, а именно: можно получить плоскую дезаргову конфигурацию, унимодулярно аффинную [1]) данной [2]).

Если же говорить не о непосредственной центральной проекции, а об изображении по методу центральной проекции, то *любая плоская дезаргова конфигурация может служить изображением любой пространственной дезарговой конфигурации.*

Чтобы построить изображение пространственной фигуры в свободной центральной проекции, надо выделить в составе оригинала

---

[1]) Унимодулярно-аффинное (иначе: эквиаффинное) преобразование — аффинное преобразование, сохраняющее неизменными площади всех фигур.

[2]) См статью Н. М. Бескина, указанную в сноске на стр. 251.

пространственную дезаргову конфигурацию и изобразить ее произвольно (т. е. произвольной плоской дезарговой конфигурацией). Построение изображения произвольной точки M′ показано на рис. 61. Прямая $O'M'$ пересечет плоскости $E_1'E_2'E_3'$ и $F_1'F_2'F_3'$ соответственно в точках M_1' и M_2'. Изображение одной из них (например, M_1) должно быть дано, а изображение другой можно построить (ниже будет объяснено почему). При реконструкции оригинала по рис. 61 мы прежде всего должны будем восстановить положение точек M_1' и M_2'. Если бы мы имели только треугольник $E_1'E_2'E_3'$, то положение точки M_1'

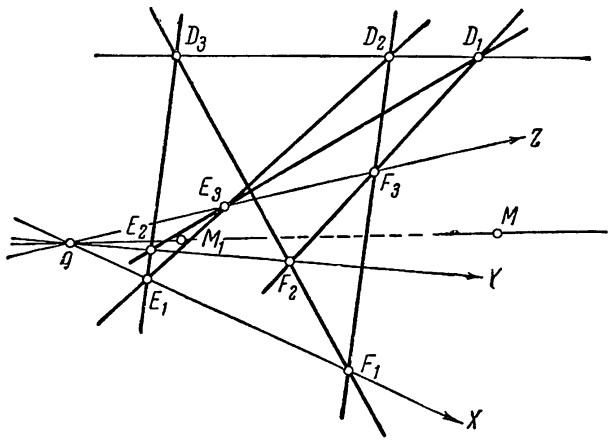


Рис. 61.

в плоскости этого треугольника не могло бы быть фиксировано проективно жестко, так как треугольник не определяет систему координат в проективной плоскости. Здесь нам на помощь приходит прямая пересечения плоскостей $E_1'E_2'E_3'$ и $F_1'F_2'F_3'$ (она называется дезарговой прямой). Так как она принадлежит обеим плоскостям, то в каждой из этих плоскостей мы имеем четыре прямые: стороны треугольника $E_1'E_2'E_3'$ (или $F_1'F_2'F_3'$) и дезаргова прямая. Четыре прямые образуют систему координат, и относительно нее можно проективно жестко фиксировать положение точки M_1' (а также M_2'). Изображением дезарговой прямой служит дезаргова прямая плоской конфигурации, т. е. прямая, на которой лежат точки

$$D_1 \equiv E_2E_3 \times F_2F_3,$$

$$D_2 \equiv E_3E_1 \times F_3F_1,$$

$$D_3 \equiv E_1E_2 \times F_1F_2$$

(согласно теореме Дезарга[1]) эти три точки лежат на одной прямой). Точка M_1 занимает по отношению к четырем прямым (стороны треугольника $E_1E_2E_3$ и дезаргова прямая) проективно такое же положение, как точка M_1' по отношению к соответствующим четырем прямым (стороны треугольника $E_1'E_2'E_3'$ и дезаргова прямая).

Теперь можно объяснить, почему задание точки M_1' на рис. 61 позволяет построить точку M_2'. В плоскости $E_1'E_2'E_3'$, как только что было показано, мы имеем проективную систему координат. Поэтому положение точки M_1' относительно этой системы проективно фиксировано. Точка M_2' относительно аналогичной системы координат в плоскости $F_1'F_2'F_3'$ занимает такое же положение, потому что эти две системы перспективны (центр перспективы — точка O').

Это можно записать так:

$$(E_1', E_2', E_3', d', M_1') \overset{O'}{\underset{\wedge}{\approx}} (F_1', F_2', F_3', d', M_2')$$

(d' — дезаргова прямая). Отсюда следует

$$(E_1, E_2, E_3, d, M_1) \overline{\wedge} (F_1, F_2, F_3, d, M_2)$$

(d — дезаргова прямая плоской дезарговой конфигурации). Это последнее соотношение позволяет построить точку M_2, если дана точка M_1. Мы не показываем построения.

Прямая задается своей проекцией с указанием двух уже заданных точек, например двух следов на плоскостях базисной дезарговой конфигурации. Плоскость задается следами на двух плоскостях базисной конфигурации или на любых двух уже заданных плоскостях.

Можно также задавать любой элемент инцидентными ему точками, прямыми, плоскостями (уже заданными); например, можно задать плоскость тремя точками.

Рисунок, выполненный с соблюдением указанных правил, определяет оригинал лишь с точностью до проективного преобразования. В самом деле, истолковывая рисунок, можно в качестве оригинала базисной дезарговой конфигурации подразумевать любую пространственную дезаргову конфигурацию. Переход же от одной пространственной дезарговой конфигурации к другой определяет проективное преобразование пространства.

Если же снабдить рисунок примечанием, дающим реконструкцию базисной конфигурации, то мы получим условное изображение, определяющее оригинал метрически точно. Этот метод называется центральной аксонометрией. Центральная аксонометрия, как и параллельная, представляет собой метод изображения ориги-

[1]) См. статью «Геометрические преобразования», стр. 130—133.

нала вместе с системой координат. Различие между центральной и параллельной аксонометрией заключается в двух пунктах:

1) система координат — не аффинная, а проективная,

2) на изображении должна быть показана проективная (а не аффинная) связь небазисных элементов с базисом.

Рис. 62 — пример изображения по методу центральной аксонометрии, если известны метрические параметры натуральной системы координат. Пусть, например, известно, что эта система — прямоугольная равнобедренная, т. е.

$$\angle X'O'Y' = \angle Y'O'Z' = \angle Z'O'X' = 90°, \quad O'E_1' = O'E_2' = O'E_3',$$

точки F_1', F_2', F_3' несобственные; M_1' и M_2' — следы прямой соответственно на плоскостях $Y'O'Z'$ и $Z'O'X'$. Третий след M_3' можно построить, и тогда положение точки M' на прямой проективно жестко фиксируется сложным отношением $(M_1'M_2'M_3'M')$; это отношение на изображении такое же, как в оригинале.

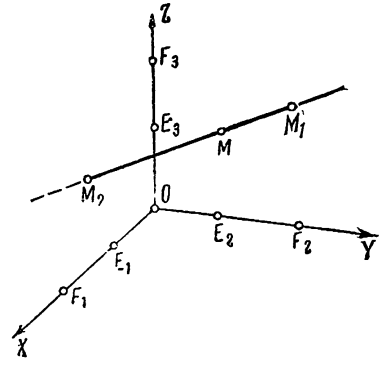


Рис. 62.

Теория свободных изображений играет важную роль в аэрофотограмметрии. Имея снимок, сделанный с самолета, мы обычно не знаем параметров проектирующего аппарата. Если бы в момент фотографирования плоскость фотопленки была параллельна плоскости земной поверхности, то мы получили бы изображение, подобное оригиналу. Положим теперь, что плоскость фотопленки наклонена к горизонтальной плоскости, причем угол наклона и другие параметры проектирующего аппарата неизвестны. Как дешифрировать снимок (т. е. построить по этому искаженному изображению метрически точный план местности)? Самый простой случай — когда на местности имеются четыре точки общего положения, положение которых нам заранее точно известно. Тогда этот четырехвершинник принимается за базисный, и снимок превращается в аксонометрическое изображение, по которому оригинал определяется метрически точно.

Центральной аксонометрией пользуются архитекторы, вычерчивая проекты зданий (речь идет об общем виде здания в целом). Это объясняется тем, что мы обычно рассматриваем здание с расстояния, которое невелико по сравнению с размерами самого здания. Поэтому изображение в параллельной аксонометрии показалось бы неправдоподобным, так как изображение в параллельной проекции есть вид с очень большого (практически бесконечного) расстояния.

§ 6. Построения на изображении

6.1. Построения на проекционном чертеже. Построения на изображении отличаются от воображаемых построений [1]) тем, что они действительно выполняются. Постановка задачи такова: построить что-либо — значит изобразить это на рисунке.

Так как мы в этой статье рассматриваем только проекционные методы изображения, то и в этом параграфе мы будем рассматривать только построения на проекционном чертеже [2]).

6.2. Примеры. Рассмотрим два примера построений на проекционном чертеже. Для простоты будем рассматривать только чертежи, построенные по методу параллельной (а не центральной) проекции.

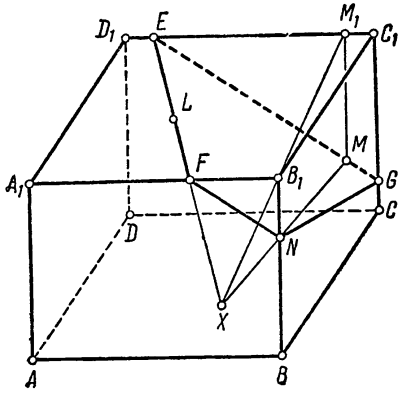


Рис. 63.

Задача 1. *Построить пересечение параллелепипеда плоскостью* $L'M'N'$ (рис. 63). Точки L' и M' лежат соответственно на верхней и задней гранях, точка N лежит на ребре $B'B'_1$.

Решение. Проводим $MM_1 \parallel AA_1$. Теперь B_1 и M_1 — изображения проекций точек N' и M' на верхнюю грань (направление проектирования параллельно боковым ребрам). Следовательно, M_1B_1 — изображение проекции прямой $M'N'$ на верхнюю грань. Точка X пересечения MN и M_1B_1 изображает след прямой $M'N'$ на верхней грани. След секущей плоскости на верхней грани проходит через X' и L'. Поэтому прямая XL изображает этот след. Отметим ее отрезок EF, находящийся внутри параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$.

Теперь FN изображает след секущей плоскости на передней грани. След секущей плоскости на задней грани изображается прямой EM. Обозначив точку пересечения этой прямой с CC_1 через G, найдем, наконец, и след GN секущей плоскости на правой грани.

Задача 2. Точка L' *лежит в плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна стороне основания* (рис. 64). *Опустить из точки* L' *перпендикуляр на грань* $S'B'C'$, *найти его основание* M' *и определить длину* $L'M'$, *если* $A'B' = a$.

---

[1]) См. стр. 200—203 статьи «Общие принципы геометрических построений»

[2]) См. книгу Н. Ф. Четверухина [5], указанную в списке литературы в конце статьи.

Решение. Возьмем в плоскости основания вместо L' какую-нибудь другую точку, из которой проведение перпендикуляра к грани $S'B'C'$ не вызывает затруднений. Такова, например, точка E' — середина $A'D'$. Перпендикуляр из E' на грань $S'B'C'$ попадет на высоту $S'F'$ этой грани. На рис. 65 изображено сечение $S'E'F'$ пирамиды в натуральном виде ($E'F' = S'Q' = a$) и проведена высота $E'G'$. Теперь можно на рис. 64 найти точку G из условия

$$\frac{F'S'}{F'G'} = \frac{FS}{FG}$$

отрезки $F'S'$ и $F'G'$ даны на рис. 65, и FS — на рис. 64).

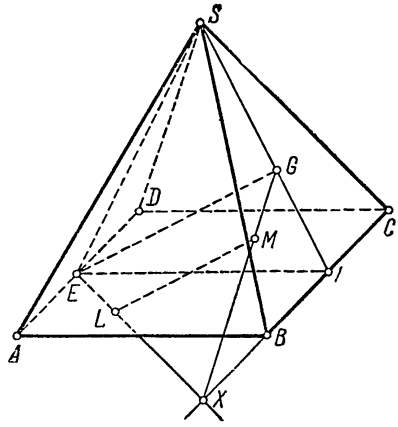


Рис. 64.

Проведя прямую EG, мы узнаем направление перпендикуляра. Все перпендикуляры к грани $S'B'C'$ должны изображаться на рис. 64 прямыми, параллельными EG.

Вообразим плоскость α, проходящую через оба перпендикуляра (из E' и из L'). Ее след на плоскости основания изображается прямой EL. Следы плоскости α на гранях $A'B'C'D'$ и $S'B'C'$ должны пересекаться на прямой $B'C'$. Отсюда вытекает следующее построение. Находим точку X пересечения EL и BC. Проводим XG. Из L проводим прямую, параллельную EG, до пересечения с прямой GX в точке M. Тогда LM и есть изображение перпендикуляра, опущенного из L' на грань $S'B'C'$.

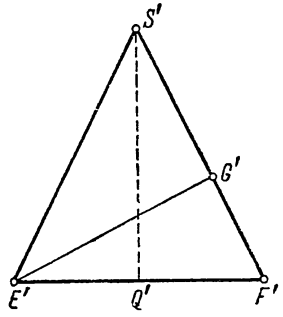


Рис. 65.

Определить истинную величину отрезка $L'M'$ легко, потому что истинная величина отрезка $E'G'$ известна (рис. 65).

Достаточно определить отрезок $L'M'$ из пропорции

$$\frac{L'M'}{E'G'} = \frac{LM}{EG},$$

где отрезок $E'G'$ берется с рис. 65, а отрезки LM и EG — с рис. 64.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Глаголев, Начертательная геометрия, М., Гостехиздат, 1953. Учебник для математических отделений университетов, доступный широкому кругу читателей. Содержит много задач.

[2] Е. А. Глазунов и Н. Ф. Четверухин, Аксонометрия, М., Гостехиздат, 1953.
Обстоятельное руководство, весьма подробно трактующее учение о параллельной аксонометрии.

[3] Г. Монж, Начертательная геометрия, перев. с франц., М.—Л., Гостехиздат, 1947

Основополагающее сочинение известного французского геометра, положившее начало начертательной геометрии; в этой книге весьма обстоятельно разработан метод, называемый сейчас «методом Монжа».

[4] Н. Ф. Четверухин, Изображения пространственных фигур в курсе геометрии, М., Учпедгиз, 1958.

Пособие для учителей средних школ. Книга затрагивает многие упоминавшиеся в статье вопросы.

[5] Н. Ф. Четверухин, Стереометрические задачи на проекционном чертеже, М., Учпедгиз, 1955.

Пособие для учителей средних школ. Разобрано много примеров.

[6] Л. М. Лоповок, Сборник стереометрических задач на построение, М., Учпедгиз, 1953.

[7] И. Г. Польский, Сборник задач на построение на проекционном чертеже, М., Учпедгиз, 1958.

ВЕКТОРЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ГЕОМЕТРИИ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Определение вектора 292
1.1 Параллельный перенос 292
1.2. Вектор 293
1.3. Откладывание вектора от точки 294
1.4. Векторы и направленные отрезки 296
§ 2. Сложение векторов и умножение вектора на число 298
2.1. Сложение векторов 298
2.2. Противоположные векторы, нулевой вектор 300
2.3. Свойства суммы векторов 301
2.4. Вычитание векторов 304
2.5. Умножение вектора на число 305
2.6. Свойства произведения вектора на число 307
2.7. «Арифметика фигур» 308
2.8. Деление отрезка в данном отношении 310
2.9. Координаты вектора 312
2.10. Линейная зависимость векторов 314
2.11. Примеры 315
§ 3. Скалярное произведение векторов 319
3.1. Проекция вектора на ось 319
3.2. Свойства проекций 320
3.3. Связь проекций с координатами 321
3.4. Связь с тригонометрическими функциями 322
3.5. Примеры 324
3.6. Определение и свойства скалярного произведения 328
3.7. Примеры и задачи 331
3.8. Единственность скалярного произведения 336
§ 4. Косое произведение векторов плоскости 338
4.1. Ориентированные площади и косое произведение векторов . 338
4.2. Аналогия между косым и скалярным произведениями . . . 342
4.3. Дальнейшие свойства косого произведения 343
4.4. Примеры и задачи 345
4.5. Вопрос о единственности косого произведения 349
§ 5. Тройное произведение и векторное произведение векторов пространства 351
5.1. Ориентированные объемы и тройное произведение 351
5.2. Векторное произведение и его связь с тройным произведением 353
5.3. Свойства векторного и тройного произведений 355
5.4. Двойное векторное произведение 360
5.5. Примеры 361
5.6. Вопрос о единственности тройного и векторного произведений 364

§ 6. Применения векторного исчисления к сферической геометрии и тригонометрии 366
6.1. Выражение сторон и углов сферического треугольника с помощью векторов 366
6.2. Сферические теоремы косинусов и синусов 368
§ 7. Понятие о векторных пространствах 369
7.1. Аксиоматическое определение векторного пространства . . . 369
7.2. Арифметическая модель векторного пространства 370
7.3. Полнота аксиоматики векторного пространства 371
7.4. Аксиоматика элементарной геометрии 375
7.5. Некоторые типы многомерных пространств 377
Литература 380

§ 1. Определение вектора

1.1. Параллельный перенос. Напомним прежде всего определение *параллельного переноса* — геометрического преобразования, тесно связанного с понятием вектора [1]).

Параллельным переносом плоскости (или пространства) называется преобразование, переводящее каждую точку A плоскости (пространства) в такую точку A′, что выполнены следующие три условия:

1°. *Отрезок AA′ параллелен заданной прямой l.*

2°. *Длина отрезка AA′ имеет заданную величину a.*

3°. *Направление отрезка AA′ (от точки A к точке A′) совпадает с заданным на прямой l направлением.*

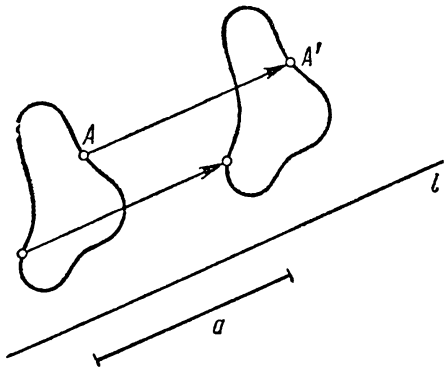


Рис. 1.

(Заметим, что на каждой прямой можно выбрать два противоположных направления.) Характер описываемого условиями 1°—3° преобразования ясен из рис. 1.

Сравним определение параллельного переноса с определением разного рода *симметрий* — геометрических преобразований, которые издавна изучаются в школе и хорошо известны преподавателям и учащимся. *Центральная симметрия* полностью определяется заданием одной точки — центра симметрии O (каждая точка A переходит при центральной симметрии в такую точку A', что отрезок AA' делится в точке O пополам, рис. 2). *Осевая симметрия* (рис. 3) определяется заданием одной прямой — оси симметрии; *симметрия относительно плоскости* (в пространстве, рис. 4) также опреде-

[1]) Ср. статью «Геометрические преобразования», стр. 54.

ляется заданием одного геометрического объекта — плоскости симметрии. Параллельный перенос определяется сложнее, чем симметрии: для его задания нужно указать прямую, направление на ней и длину a. Таким образом, геометрический образ, связанный с парал-

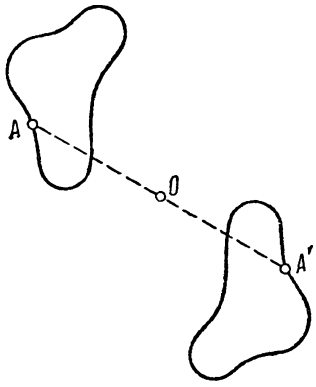


Рис. 2.

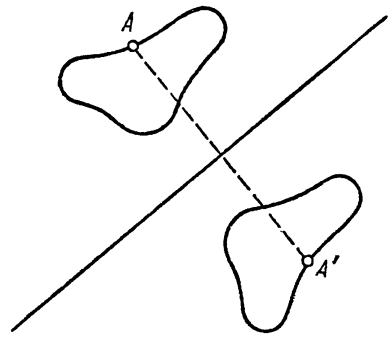


Рис. 3.

лельным переносом, «сложнее», чем геометрические образы, связанные с симметриями разного рода. Впрочем, эта «сложность» в значительной степени субъективная, кажущаяся. Она объясняется тем, что геометрический образ, связанный с параллельным переносом (таковым, как мы сейчас увидим, и является *вектор*), непривычен для нас и в силу этого кажется сложнее.

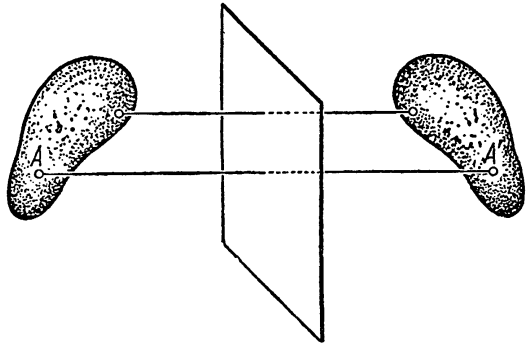


Рис. 4.

1.2. Вектор. Что же такое вектор? Как ни странно, ответ на этот вопрос представляет известные затруднения. Существуют различные подходы к определению понятия вектора; при этом даже если ограничиться лишь наиболее интересным для нас в этой статье элементарно-геометрическим подходом к понятию вектора, то и тогда будут существовать различные взгляды на это понятие. Разумеется, какое бы определение мы ни взяли, *вектор* с элементарно-геометрической точки зрения *есть геометрический объект, характеризуемый направлением (т. е. заданной с точностью до параллельности прямой и направлением на ней) и длиной.* Однако такое определение является слишком общим, не вызывающим конкретных геометрических представлений. Согласно этому общему определению

параллельный перенос можно считать вектором, ибо условия 1°—3° (см. выше) как раз и показывают, что параллельный перенос характеризуется направлением и длиной. И действительно, можно было бы принять определение: «вектором называется всякий параллельный перенос». Это определение логически безупречно, и на его основе может быть построена вся теория действий над векторами и их применений. Однако это определение, несмотря на его полную корректность, также не может нас удовлетворить, так как представление о векторе как о геометрическом преобразовании кажется недостаточно наглядным, далеким от физических представлений о векторных величинах.

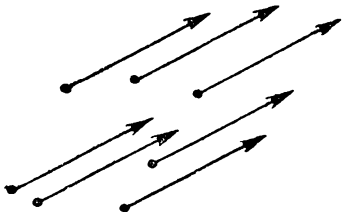


Рис. 5.

Мы примем следующее определение вектора: *вектором называется семейство всех параллельных между собой, одинаково направленных и имеющих одинаковую длину отрезков* (рис. 5). Таким образом, вектор представляет собой бесконечное множество направленных отрезков: из каждой точки плоскости (пространства) исходит один отрезок, причем все эти отрезки параллельны, одинаково направлены и имеют одну и ту же длину. Вектор изображают на чертежах отрезком со стрелкой (т. е. изображают не все семейство направленных отрезков, представляющее собой вектор, а лишь один из этих отрезков). Для обозначения векторов в книгах и статьях применяют жирные латинские буквы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и т. д., а в тетрадях и на доске — латинские буквы с черточкой сверху $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ... Той же буквой, но не жирной, а светлой (а в тетради и на доске — той же буквой без черточки) обозначают *длину* вектора. Длину иногда обозначают также вертикальными черточками — как модуль (абсолютную величину) числа. Таким образом, длина вектора $\boldsymbol{a}$ обозначается через a или $|\boldsymbol{a}|$, а в рукописном тексте длина вектора $\bar{a}$ обозначается через a или $|\bar{a}|$. В связи с изображением векторов в виде отрезков (рис. 6) следует помнить, что концы отрезка, изображающего вектор, неравноправны: стрелка (задающая направление вектора) направлена от одного конца отрезка к другому. Различают *начало* и *конец* вектора (точнее, отрезка, изображающего вектор).

Рис. 6.

1.3. Откладывание вектора от точки. В связи с тем, что вектор представляет собой семейство всех равных, параллельных и одинаково направленных отрезков, для любой точки A плоскости (пространства) найдется в этом семействе отрезок, начинающийся в точке A. Нахождение такого отрезка называют *откладыванием* вектора $\boldsymbol{a}$ от данной точки A (рис. 7). Эта операция,

очевидно, сводится к построению отрезка, равного и параллельного данному, начинающегося в точке A. Итак, любой вектор $\boldsymbol{a}$ можно отложить от любой заданной точки A. Если B — конец построенного таким образом отрезка (рис. 7), то пишут

$$\boldsymbol{a} = \overline{AB}. \tag{1}$$

Последнее равенство означает, что, откладывая от точки A вектор $\boldsymbol{a}$, мы получаем отрезок AB, направленный от точки A к точке B. В связи с этим иногда бывает удобным обозначать векторы такими символами, как $\overline{AB}$, $\overline{OA}$, и т. д., где A, B, O — произвольные точки. При этом следует помнить всегда, что $\overline{AB}$ есть не все семейство отрезков, составляющее вектор, а лишь один отрезок этого семейства, но такая запись не вызывает недоразумений, так как этот отрезок полностью определяет все семейство.

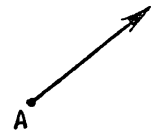


Рис. 7.

В целях математической строгости можно было бы условиться применять обозначение $\overline{AB}$ для *направленного отрезка* с началом в точке A и концом в точке B, сохраняя обозначение $\boldsymbol{a}$ для вектора, т. е. для всего семейства направленных отрезков [1]). В таком случае запись (1) была бы некорректной (нельзя приравнять все бесконечное семейство одному его представителю) и ее было бы более правильным заменить записью

$$\overline{AB} \in \boldsymbol{a}, \tag{2}$$

означающей, что направленный отрезок $\overline{AB}$ принадлежит семейству отрезков (т. е. вектору) $\boldsymbol{a}$. Однако замена более правильной записи (2) записью (1) не будет вызывать недоразумений, в связи с чем мы всегда в дальнейшем будем пользоваться записью (1) при откладывании векторов.

Теперь мы можем точно и кратко охарактеризовать параллельный перенос. *Параллельный перенос есть преобразование плоскости, переводящее точку A в такую точку A', что $\overline{AA'} = \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — заданный вектор.* Мы видим, что, подобно тому как симметрия любого рода определяется одним геометрическим объектом, а именно центром, осью или плоскостью симметрии, так и параллельный перенос определяется одним геометрическим объектом, а именно вектором $\boldsymbol{a}$. Этот вектор называется *вектором параллельного переноса*. Однако, для симметрий объект, определяющий преобразование

[1]) Направленный отрезок иногда называют «связанным вектором» в противоположность «свободному вектору», представляющему собой то понятие, которое мы здесь обозначаем просто словом «вектор» (семейство направленных отрезков). Мы, однако, не будем в настоящей статье применять эту терминологию.

(точка, прямая или плоскость), является знакомым издавна, а объект, определяющий параллельный перенос, приходится вводить в рассмотрение заново.

1.4. Векторы и направленные отрезки. Весьма часто понятию вектора дается другое определение, а именно следующее: *вектором называется направленный отрезок*. При этом векторы (т. е. направленные отрезки), имеющие одинаковую длину и одно и то же направление (рис. 8), уславливаются считать *равными*. Конечно, такое определение страдает математической непоследовательностью, ибо «равные векторы»—это то же самое, что «один и тот же вектор» (подобно тому как «равные числа»—это «одно и то же число»), а направленные отрезки, изображенные на рис. 8, не совпадают друг с другом. При таком определении происходит подмена математических понятий, а именно подмена понятия *равенства* понятием *эквивалентности*. *Равенство* двух математических объектов имеет место тогда и только тогда, когда эти объекты совпадают, т. е. когда мы дважды рассматриваем один и тот же объект. *Эквивалентностью* же считают всякую связь между математическими объектами, обладающую следующими тремя свойствами:

Рис. 8.

I. *Всякий объект эквивалентен самому себе* («рефлексивность»).

II. *Если один объект эквивалентен второму, то и второй эквивалентен первому* («симметричность»).

III. *Если один объект эквивалентен второму, а второй—третьему, то первый объект эквивалентен третьему* («транзитивность»).

Например, подобие геометрических форм является эквивалентностью (ибо выполнение свойств I—III здесь очевидно). Разумеется, *равенство* является частным случаем эквивалентности, но эквивалентность отнюдь не всегда сводится к равенству (как показывает пример подобных фигур). Если мы условимся считать направленные отрезки, у которых длины и направления совпадают, эквивалентными, то мы получим отношение эквивалентности (условия I—III выполняются), но это, конечно, не есть равенство. Таким образом, приведенное выше определение можно счесть некорректным: то, что в этом определении признается «равенством» направленных отрезков (векторов), в действительности является лишь эквивалентностью.

Для устранения некорректности такого вида в математике существует стандартный прием: все эквивалентные между собой объекты собираются вместе, в один «класс эквивалентности», и этот класс эквивалентности и объявляется тем новым объектом, который следует изучать. Именно так (сознательно или бессознательно) мы поступаем, когда вводим простые дроби. Отношения 2:3, 4:6, 10:15, 36:54 и т. д. обладают тем свойством,

что любые два из них образуют «верную» пропорцию (в том смысле, что произведение средних членов в такой пропорции будет равно произведению крайних членов); мы признаем такие отношения «эквивалентными», и получающийся таким образом класс эквивалентности объявляем одним рациональным числом Лишь после этого равенство $2:3=4:6$ $\left(\text{или } \frac{2}{3}=\frac{4}{6}\right)$ становится «настоящим равенством»; до этого его следовало бы, строго говоря, понимать именно как эквивалентность, а не как утверждение о том, что в записи $2:3=4:6$ в левой и в правой частях равенства написано «одно и то же».

Аналогично обстоит дело и с «равенством» треугольников (или других фигур). Изображенные на рис. 9 треугольники, разумеется, не одинаковы, т. е. не совпадают; поэтому более строгим было бы говорить о них как об эквивалентных, а не о равных [1]). Но в геометрии принято считать два совпадающих при наложении треугольника одним и тем же треугольником, т. е. понимать под словом «треугольник» сразу весь класс треугольников, каждые два из которых можно совместить движением. Только после этого соглашения приобретают смысл распространенные утверждения вроде того, что «задача построения треугольника по двум сторонам a и b и заключенному между ними углу C имеет единственное решение» (т. е. что существует лишь один треугольник с данными сторонами a и b и углом C)—без этого нового понимания слова «треугольник» последнее утверждение будет явно неверным [2]). И лишь это более широкое понимание слова «треугольник» (не подчеркиваемое в школе явно) делает законным употребление термина «равные треугольники» [3]).

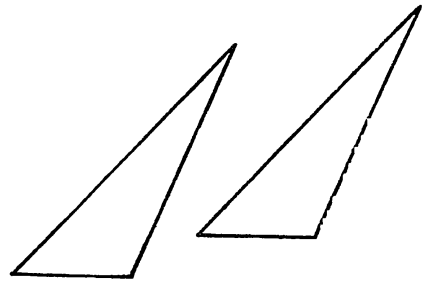


Рис. 9.

То же можно сказать и относительно направленных отрезков. Направленные отрезки, изображенные на рис. 8, следует считать лишь «эквивалентными», а не «равными». Если же собрать все эквивалентные направленные отрезки в один класс направленных отрезков, то такой класс эквивалентности как раз и будет семейством всех параллельных, одинаково направленных отрезков одной и той же длины. В результате мы приходим к принятому нами определению вектора как *семейства* направленных отрезков. Это определение более корректно, чем определение вектора как одного направленного отрезка.

---

[1]) Иногда треугольники, изображенные на рис. 9, называют не «равными», а «конгруэнтными», т. е. вводят для эквивалентности фигур, выражающейся свойством «совпадать при наложении», название *конгруэнтность*. Такая терминология логически безупречна, но сравнительно мало распространена.

[2]) Таким образом, строго говоря, сформулированное выше утверждение о задаче построения треугольника по сторонам a и b и углу C означает: существует единственный «класс равных треугольников», такой, что все треугольники этого класса имеют заданные стороны a, b и заданный угол C (но, конечно, вовсе не единственный треугольник!).

[3]) Эта точка зрения допускает и дальнейшее развитие. См. по этому поводу § 6 статьи «Геометрические преобразования», стр. 98—110.

§ 2. Сложение векторов и умножение вектора на число [1])

2.1. Сложение векторов. Все сказанное пока еще не делает понятие вектора содержательным и полезным. Бóльшую содержательность и богатую возможность применений понятие вектора получает тогда, когда мы вводим своеобразную «геометрическую арифметику» — арифметику векторов, позволяющую складывать векторы, вычитать их и производить над ними целый ряд других операций. Отметим в связи с этим, что ведь и понятие числа становится интересным лишь при введении арифметических действий, а не само по себе [2]).

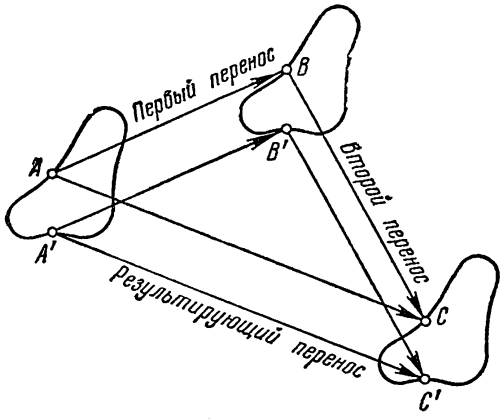


Рис. 10.

Сумма векторов определяется в связи с «суммой» соответствующих параллельных переносов, причем сумма параллельных переносов [3]) понимается в том смысле, что эти переносы выполняются один за другим. На рис. 10 показано последовательное выполнение двух параллельных переносов. Если первый перенос переводит точку A в точку B, т. е. характеризуется вектором $\overline{AB}$, а второй переводит точку B в точку C, т. е. характеризуется вектором $\overline{BC}$, то в результате выполнения обоих переносов точка A переходит в точку C. Если взять другие точки A', B', C', переходящие друг в друга

[1]) Ср. со статьей «Векторные пространства и линейные преобразования» в кн. II ЭЭМ.

[2]) Сама по себе связь понятия вектора с таким простым преобразованием, как параллельный перенос, еще не создает содержательной «теории векторов». Заметим в этой связи, что, скажем, с таким преобразованием, как сжатие к прямой (см. статью «Геометрические преобразования», стр. 55), можно сопоставить «геометрический образ», задаваемый прямой (осью сжатия) и числом (коэффициентом сжатия); однако это будет совершенно бессодержательной процедурой, поскольку вся теория таких «образов» ограничится их определением. В противоположность этому образ, сопоставляемый с произвольным аффинным преобразованием (стр. 62), играет серьезную роль в современной высшей геометрии; это связано с тем, что для подобных образов (называемых аффинорами) удается определить операции сложения и умножения. [Заметим, что возможность построить «арифметику векторов» и «арифметику аффиноров» тесно связана с тем, что геометрические преобразования, с которыми сопоставляются эти новые понятия,— параллельные переносы и аффинные преобразования — образуют группы (см. статью «Геометрические преобразования», стр. 102).

[3]) В статье «Геометрические преобразования» употреблялся термин «произведение» (преобразований). В научной литературе в одном и том же смысле используются оба термина — «сумма» и «произведение».

при этих переносах (так что $\overline{A'B'}=\overline{AB}$ и $\overline{B'C'}=\overline{BC}$), то точка A' переходит в результате выполнения обоих переносов в точку C'. Из рис. 10 видно, что $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$ (по двум сторонам и заключенному между ними углу), так что отрезки AC и $A'C'$ равны; кроме того, эти отрезки параллельны и одинаково направлены, так как они образуют одинаковые углы с направленными отрезками AB и $A'B'$ (или BC и $B'C'$). Иначе говоря, $\overline{AC}=\overline{A'C'}$, т. е. перемещение исходной фигуры в последнее ее положение таково, что все отрезки, соединяющие соответствующие точки этих фигур, равны и параллельны. Следовательно, это перемещение также представляет собой параллельный перенос. Он называется *суммой* двух последовательно применявшихся параллельных переносов.

Если мы обозначим через $\boldsymbol{a}$ вектор первого параллельного переноса, т. е.

$$\boldsymbol{a}=\overline{AB}=\overline{A'B'},$$

а через $\boldsymbol{b}$ — вектор второго параллельного переноса, т. е.

$$\boldsymbol{b}=\overline{BC}=\overline{B'C'},$$

то результирующий параллельный перенос будет характеризоваться вектором

$$\boldsymbol{c}=\overline{AC}=\overline{A'C'}.$$

Этот вектор $\boldsymbol{c}$ результирующего параллельного переноса называется *суммой* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, что выражается записью

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

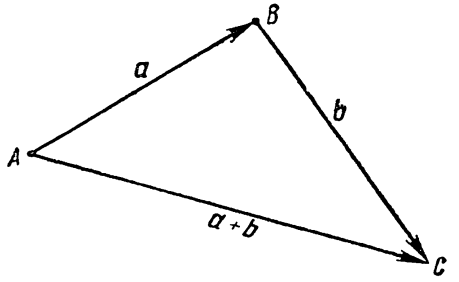


Рис. 11.

Если теперь оставить только векторы $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overline{BC}$ и $\boldsymbol{c}=\overline{AC}$ на рис. 10, то мы приходим к рис. 11, который показывает построение суммы векторов:

Для построения суммы векторов нужно взять направленные отрезки, изображающие эти векторы и расположенные таким образом, что начало второго отрезка совпадает с концом первого; тогда «замыкающий» направленный отрезок, т. е. отрезок, соединяющий начало первого отрезка с концом второго, будет изображать сумму двух взятых векторов.

Рис. 11 и данное выше правило сложения векторов приводят нас также к следующему простому, но важному выводу: *для любых трех точек A, B, C имеет место равенство*

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}. \tag{3}$$

Заметим, что это равенство справедливо при любом расположении точек A, B, C и не требует чертежа, что часто бывает важно.

Из соотношения (3) и из известных неравенств, связывающих стороны треугольника, следует, что *длина вектора-суммы всегда не больше суммы длин векторов-слагаемых и не меньше их разности*:

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|, \quad |a+b| \geqslant |a| - |b|. \tag{4}$$

Ясно, что в первом из соотношений (4) знак равенства будет иметь место тогда и только тогда, когда векторы a и b параллельны и

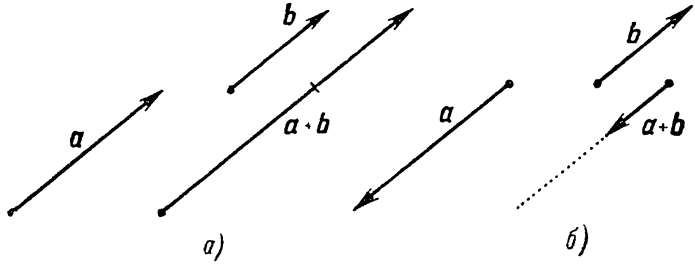


Рис. 12.

направлены в одну сторону (рис. 12, *а*): *сумма двух параллельных и одинаково направленных векторов представляет собой вектор, направленный в ту же сторону, что и слагаемые; длина его равна сумме длин векторов-слагаемых* (рис. 12, *а*). Во втором из соотношений (4) знак равенства будет иметь место тогда и только тогда, когда векторы a и b параллельны, но направлены в разные стороны (причем вектор a имеет бóльшую длину, рис. 12, *б*): *сумма двух параллельных и противоположно направленных векторов представляет собой вектор, направленный в ту же сторону, что и тот из слагаемых векторов, длина которого больше; длина вектора-суммы равна разности длин слагаемых векторов.*

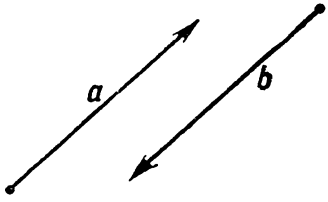


Рис. 13.

2.2. Противоположные векторы, нулевой вектор. Остановимся еще на случае, когда векторы a и b направлены в противоположные стороны и имеют равные длины (рис. 13); такие векторы называются *противоположными*. Примером противоположных векторов являются векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$, где A и B — какие угодно точки. Наше правило сложения векторов приводит к тому, что сумма $\overline{AB}+\overline{BA}$ двух противоположных векторов представляет собой «вектор» $\overline{AA}$, имеющий нулевую длину и не имеющий никакого направления; этот «вектор» изображается «отрезком нулевой длины», т. е. точкой. Может быть, читателю покажется нежелательным считать, что

$\overline{AA}$ — тоже вектор, но мы вынуждены стать на эту точку зрения, так как иначе оказалось бы, что некоторые два вектора (противоположные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$) вовсе нельзя сложить.

Итак, $\overline{AA}$ мы также считаем вектором; этот вектор называется *нулевым вектором* и обозначается символом **0**:

$$\overline{AA}=\overline{BB}=\overline{CC}=\ldots=\mathbf{0}$$

(A, B, C — любые точки плоскости или пространства). Для любого вектора $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$ мы имеем

$$\overline{AB}+\overline{BB}=\overline{AB},$$

или, иначе,

$$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}. \tag{5}$$

Это равенство, напоминающее знакомое из арифметики равенство $a+0=a$, и послужило причиной того, что вектор $\overline{AA}$ называется «нулевым» вектором. Далее, для любых двух точек A, B мы имеем: $\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}$, т. е.

$$\overline{AB}+\overline{BA}=\mathbf{0}. \tag{6}$$

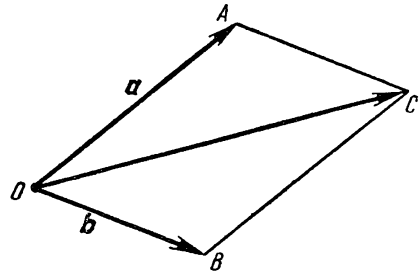


Рис. 14.

2.3. Свойства суммы векторов. Установим теперь дальнейшие свойства операции сложения векторов. Докажем прежде всего, что сложение векторов *коммутативно (переместительно)*, т. е. что для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливо равенство

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}. \tag{7}$$

Для доказательства этого равенства обратимся к рис. 14, на котором изображен параллелограмм, сторонами которого служат векторы $\boldsymbol{a}=\overline{OA}=\overline{BC}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{OB}=\overline{AC}$. Мы имеем

$$\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC},\quad \overline{OB}+\overline{BC}=OC,$$

или, иначе,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{OC},\quad \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overline{OC},$$

откуда и следует равенство (7). Заметим, что это доказательство применимо лишь в случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не параллельны. Если же векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны, то равенство (7) непосредственно следует из приведенного на предыдущей странице описания сумм одинаково направленных и противоположно направленных векторов.

В фигуре, изображенной на рис. 14, нетрудно увидеть правило параллелограмма, применяющееся в физике для определения суммы векторов («параллелограмм сил»): *сумма векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ равна вектору $\overline{OC}$, изображаемому диагональю параллелограмма $OACB$ (построенного на векторах $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$).* Следует отметить, что «правило параллелограмма» менее удобно для определения суммы векторов, чем использованное выше определение суммы векторов на основе равенства (3): «правило параллелограмма» теряет смысл в случае параллельности векторов-слагаемых и нуждается в этом случае в дополнительных разъяснениях, в то время как равенство (3) справедливо во всех случаях. В тех же случаях, когда векторы-слагаемые не параллельны, правило параллелограмма и принятое выше определение сложения лишь формой отличаются друг от друга.

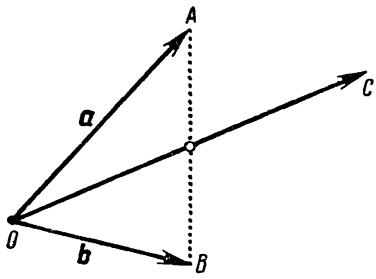


Рис. 15.

Можно еще определить сумму векторов следующим способом: *вектор $\overline{OC}$ называется суммой векторов $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$, если середины отрезков OC и AB совпадают* (рис. 15). Это правило сложения, очевидно, эквивалентно данному выше; оно применимо всегда (даже если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны).

Как и в арифметике чисел, в «арифметике» векторов справедлив *ассоциативный (сочетательный)* закон сложения векторов, выражаемый равенством

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{8}$$

Для доказательства мы отложим от произвольной точки O вектор $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, от точки A — вектор $\overline{AB}=\boldsymbol{b}$ и от точки B — вектор $\overline{BC}=\boldsymbol{c}$. Тогда мы имеем (см. (3))

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overline{OA}+(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC},$$

откуда и следует равенство (8). Заметим, что приведенное доказательство совсем не использует чертежа. Это характерно (при некотором навыке) для решения задач и доказательства теорем при помощи векторов. При желании читатель может повторить вывод соотношения (8), интерпретируя написанные соотношения на рис. 16.

Равенство (8) позволяет записывать *сумму трех векторов* просто в виде $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ (без скобок), а вывод соотношения (8) (или рис. 16) убеждает нас в том, что эта сумма представляет собой *замыкаю-*

щую этих трех векторов, отложенных один за другим. Иначе говоря

$$\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{OC}$$

для любых четырех точек O, A, B, C. То же справедливо и для любого числа слагаемых: если несколько векторов отложены таким образом, что начало второго совпадает с концом первого,

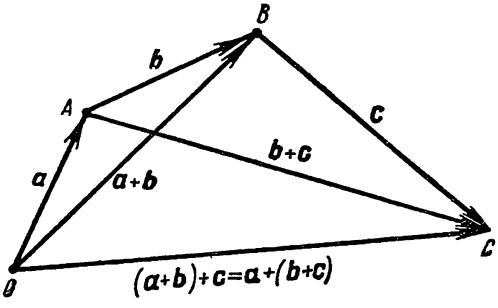


Рис. 16.

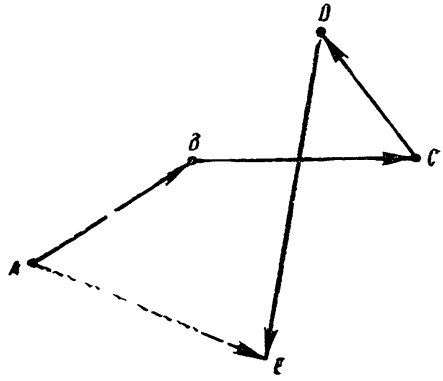


Рис. 17.

начало третьего — с концом второго и т. д., то *замыкающая*, т. е. вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, представляет собой *сумму* всех взятых векторов. Например,

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}=\overline{AE}$$

(рис. 17).

Из того, что сумма нескольких векторов может быть определена как замыкающая, непосредственно вытекает следующее *условие замкнутости* векторного многоугольника. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... несколько векторов; отложим их последовательно один за другим (т. е. так, чтобы начало второго совпадало с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д.). Для того чтобы получающаяся ломаная, составленная из векторов (она может оказаться невыпуклой и даже пересекающей себя), была *замкнутой* (т. е. чтобы конец последнего вектора совпадал с началом первого, рис. 18), необходимо и достаточно, чтобы сумма всех этих векторов была равна нулевому вектору

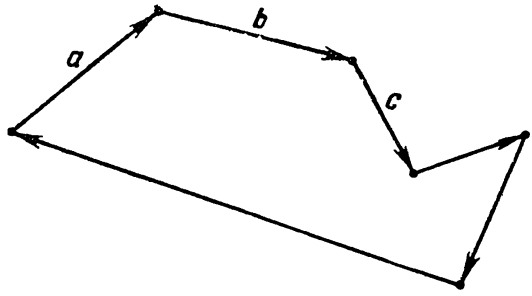


Рис. 18.

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\ldots=\boldsymbol{0}.$$

Соотношения (7) и (8), т. е. коммутативный и ассоциативный законы для сложения векторов, записываются точно так же, как и аналогичные законы для сложения чисел. Это очень важно и удобно, так как позволяет, не переучиваясь, производить действия над равенствами, содержащими векторы, используя навыки, выработанные при изучении действий над числами. Аналогия между числами и векторами, как мы сейчас увидим, простирается и далее, при определении вычитания векторов и действиях над равенствами.

2.4. Вычитание векторов. Обратимся к операции *вычитания* векторов. Как и в случае чисел, разностью

$$x = a - b \tag{9}$$

векторов a и b назовем такой вектор x, который в сумме с вектором b дает вектор a:

$$b + x = a. \tag{10}$$

Иначе говоря, равенство (9) по определению означает, что справедливо соотношение (10). Существует ли вектор x, который (при заданных a и b) удовлетворяет соотношению (10)? Рис. 19 изображает соотношение (10); на нем векторы $a = \overline{OA}$ и $b = \overline{OB}$ отложены от одной точки O. Из этого рисунка видно, что разностью векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ является вектор $\overline{BA}$:

$$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}.$$

Впрочем, это следует непосредственно и из соотношения (3), так как

$$\overline{OB} + \overline{BA} = \overline{OA}.$$

Итак, *для получения разности $a - b$ достаточно отложить векторы a и b от одной точки и взять вектор, идущий из конца вектора b к концу вектора a.* Таким образом, операция вычитания векторов всегда выполнима. Эта операция, кроме того, однозначна (т. е. если $b + x = b + y$, то $x = y$, в чем предоставляем убедиться читателю).

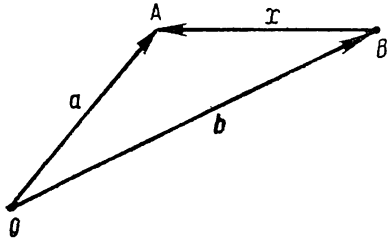


Рис. 19.

Разность $a - a$ двух равных векторов, очевидно, является нулевым вектором

$$a - a = 0. \tag{11}$$

Далее, вектор $0 - a$ является вектором, противоположным вектору a: находя разность $0 - a$ по данному выше правилу нахождения разности, мы видим, что вектор $0 - a$ изображается тем же отрезком, что и вектор a, но направленным в противоположную сторону:

$$\overline{AA} - \overline{AB} = \overline{BA}$$

(ср. (6)). Для краткости вектор $0 - a$, противоположный вектору a, обозначают символом $-a$.

Мы уже знаем, что

$$a+(-a)=0$$

(см. формулу (6)); без труда проверяется также соотношение

$$a-b=a+(-b). \tag{12}$$

Все эти равенства совершенно аналогичны привычным соотношениям, выполняющимся для чисел. Формула (12) дает другое определение операции вычитания: *для того чтобы вычесть из некоторого вектора вектор* b, *достаточно прибавить к нему противоположный вектор* $-b$.

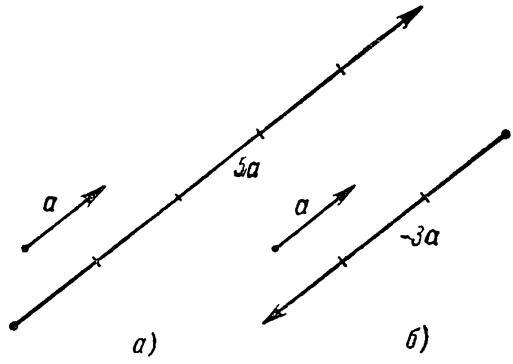


Рис. 20.

Соотношения (9) и (10) показывают справедливость (для равенств, составленных из векторов) хорошо известного правила: *слагаемые из одной части равенства можно переносить в другую, меняя знаки на обратные*. Иначе говоря, при сложении и вычитании векторов сохраняются все свойства этих операций, известные из обыкновенной арифметики (арифметики чисел). Ниже мы покажем, что для векторов можно определить также операции умножения, для которых сохраняются многие законы обычной арифметики.

2.5. Умножение вектора на число. Введение операций умножения для векторов естественно начать с описания процесса *умножения вектора на число*. Положим прежде всего

$$0\cdot a=0, \quad 1\cdot a=a; \tag{13}$$

далее определим произведение вектора на целое положительное число n:

$$na=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n \text{ раз}}. \tag{14}$$

Учитывая данное на стр. 300 правило сложения параллельных векторов (см., в частности, рис. 12, *а*), получаем отсюда, что вектор na имеет то же направление, что и вектор a, а длина его в n раз больше длины вектора a: $|na|=n\cdot|a|$ (рис. 20, *а*). Далее, если положить

$$(-1)\cdot a=-a, \tag{14а}$$

то из естественного правила $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ мы получим

$$(-n)a=n[(-1)\cdot a]=n\cdot(-a)=\underbrace{-a+(-a)+\ldots+(-a)}_{n \text{ раз}},$$

и потому направление вектора $(-n)\boldsymbol{a}$ противоположно направлению вектора $\boldsymbol{a}$ и $|(-n)\boldsymbol{a}| = n\cdot|\boldsymbol{a}|$ (рис. 20, *б*). Далее, векторы $\frac{1}{m}\boldsymbol{a}$ и $-\frac{1}{m}\boldsymbol{a}$ (где m — целое положительное) определим из равенств

$$m\cdot\left[\frac{1}{m}\boldsymbol{a}\right] = 1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad m\cdot\left[-\frac{1}{m}\boldsymbol{a}\right] = (-1)\cdot\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}. \qquad (15)$$

Отсюда и из данного выше определения произведения целого положительного числа на вектор заключаем, что вектор $\frac{1}{m}\boldsymbol{a}$ имеет то же направление, что и вектор $\boldsymbol{a}$, и в m раз меньшую длину: $\left|\frac{1}{m}\cdot\boldsymbol{a}\right| = \frac{1}{m}\cdot|\boldsymbol{a}|$ (рис. 21, *а*); направление вектора $-\frac{1}{m}\boldsymbol{a}$ противоположно направлению вектора $\boldsymbol{a}$, а длина его в m раз меньше длины вектора $\boldsymbol{a}$: $\left|-\frac{1}{m}\boldsymbol{a}\right| = \frac{1}{m}\cdot|\boldsymbol{a}|$ (рис. 21, *б*). Наконец, положив

$$\frac{n}{m}\boldsymbol{a} = n\left(\frac{1}{m}\boldsymbol{a}\right) \quad \text{и} \quad -\frac{n}{m}\boldsymbol{a} = n\left(-\frac{1}{m}\boldsymbol{a}\right), \qquad (16)$$

получим, что *вектор* $\lambda\boldsymbol{a}$, *где* $\lambda\neq 0$ — *любое рациональное число, имеет то же направление, что и вектор* $\boldsymbol{a}$ *при* $\lambda>0$ *и противоположное направление при* $\lambda<0$, *а длина вектора* $\lambda\boldsymbol{a}$ *равна произведению абсолютной величины числа* λ *на длину вектора* $\boldsymbol{a}$ (т. е. $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$). С некоторой натяжкой можно считать, что это правило сохраняет силу и при $\lambda = 0$ (см. первую из формул (13); заметим, что нулевой вектор $\mathbf{0}$ вообще не имеет направления).

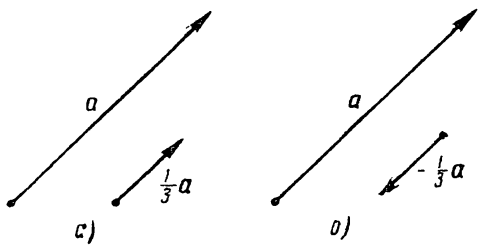


Рис. 21.

Условимся теперь считать, что выделенное курсивом правило справедливо для любых вещественных (не только рациональных) чисел λ. Другими словами, будем считать, что *произведение* $\lambda\cdot\overline{OA}$ *представляет собой вектор* $\overline{OA'}$, *определяемый следующими условиями*:

1) *точка* A' *лежит на прямой* OA;

2) *отношение* $OA'{:}OA$ *равно* $|\lambda|$, *т. е. равно* λ *при* $\lambda>0$ *и равно* $-\lambda$ *при* $\lambda<0$;

3) *точки* A *и* A' *лежат* (*на прямой* OA) *по одну сторону от точки* O *при* $\lambda>0$ *и по разные стороны от точки* O *при* $\lambda<0$.

Из этого определения видно, что операция умножения вектора на число тесно связана с преобразованием гомотетии[1]):

гомотетия с центром O и коэффициентом $\lambda \neq 0$ (рис. 22,*а*, *б*) *переводит каждую точку A в такую точку A', что*

$$\overline{OA'} = \lambda \cdot \overline{OA}. \tag{17}$$

2.6. Свойства произведения вектора на число. Указанные выше свойства (13)—(16) операции умножения вектора на число напоминают хорошо известные свойства операции умножения чисел. Следующие три свойства также подчеркивают эту аналогию:

$$k(l\boldsymbol{a}) = (kl)\,\boldsymbol{a}, \tag{18}$$

$$(k+l)\,\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}, \tag{19}$$

$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}. \tag{20}$$

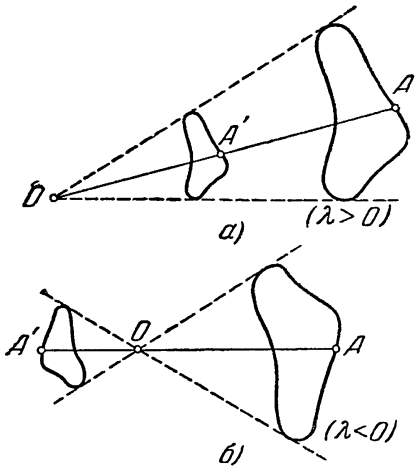


Рис. 22.

Доказательство свойств (18)—(20) несложно. Рассмотрим, например, соотношение (18). При $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ оно очевидно. Если же $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, то из определения операции умножения вектора на число сразу следует, что векторы, стоящие в обеих частях соотношения (18), параллельны вектору $\boldsymbol{a}$ и имеют одну и ту же длину (равную $|k|\cdot|l|\cdot|\boldsymbol{a}|$). Поэтому остается только проверить, что векторы, стоящие в левой и правой частях соотношения (18), одинаково направлены; это без труда устанавливается с учетом знаков чисел k и l. Далее, полное доказательство равенства (19) легко получить из определения операции умножения вектора на число и правила сложения векторов, параллельных одной прямой (см. выше, стр. 300). Наконец, соотношение (20) легко получить, построив параллелограмм со сторонами $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$ и применяя к этому параллелограмму гомотетию с центром O и коэффициентом k; действительно, учитывая соотношение (17), мы имеем

$$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k(\overline{OA}+\overline{OB}) = k\cdot\overline{OC} = \overline{OC'} = \overline{OA'}+\overline{OB'} =$$

$$= k\cdot\overline{OA} + k\cdot\overline{OB} = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$$

(см. рис. 23, *а*, *б*, на которых отдельно изображены случаи $k>0$ и $k<0$). Приведенное доказательство применимо лишь в случае, если

[1]) См. статью «Геометрические преобразования», стр. 55.

фигура $OACB$ является параллелограммом, т. е. векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не параллельны одной прямой. Рекомендуем читателю самостоятельно доказать равенство (20) для случая векторов, параллельных одной прямой.

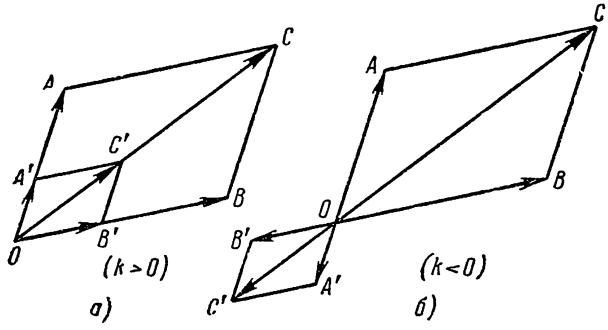


Рис. 23.

2.7. «Арифметика фигур». Введенные операции (сложение векторов и умножение вектора на число) позволяют построить своеобразную «арифметику фигур», имеющую интересные приложения в геометрии. Для простоты мы рассмотрим эту «арифметику» только на плоскости.

Выберем на плоскости некоторую точку O и назовем ее *нулевой точкой* или *началом отсчета*. Если теперь A и B—две произвольные точки плоскости, то *суммой* точек A и B мы назовем такую точку C, что

$$\overline{OC}=\overline{OA}+\overline{OB}; \tag{21}$$

в этом случае мы будем писать просто $C=A+B$. (Ясно, что если точки O, A, B не лежат на одной прямой, то C будет четвертой вершиной параллелограмма, у которого три вершины расположены в точках O, A, B; рис. 24.) Точно так же, если A—произвольная точка плоскости и λ—действительное число, то *произведением* λA мы будем считать такую точку D, что

$$\overline{OD}=\lambda\cdot\overline{OA};$$

мы будем в этом случае писать просто: $D=\lambda A$.

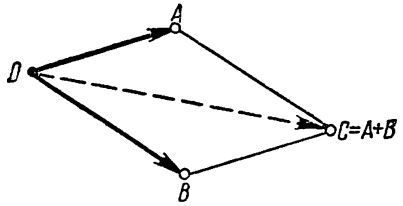


Рис. 24.

Из перечисленных выше свойств сложения векторов и умножения векторов на числа непосредственно вытекают следующие соотношения (A, B—точки плоскости; λ и μ—действительные числа):

$$A+B=B+A;$$
$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

(эту точку обозначают просто через $A+B+C$);

$$A+O=A;$$
$$1\cdot A=A,\quad 0\cdot A=O;$$
$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A,\quad \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B;$$
$$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A.$$

Пусть теперь Φ_1 и Φ_2 — две плоские фигуры. Рассмотрим всевозможные суммы A_1+A_2, где A_1 и A_2 — произвольные точки фигур Φ_1 и Φ_2 соответственно. Точки A_1+A_2 заполняют некоторую плоскую фигуру Φ (рис. 25), которую мы будем называть *суммой* фигур Φ_1 и Φ_2 и будем обозначать символом $\Phi_1+\Phi_2$. Если каждая из фигур Φ_1, Φ_2 состоит из одной точки, то $\Phi_1+\Phi_2$ будет суммой этих точек; другими словами, сложение

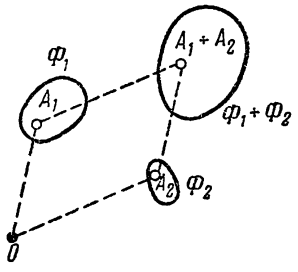


Рис. 25.

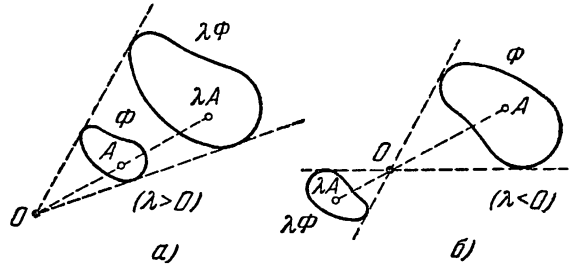


Рис. 26.

фигур является обобщением сложения точек. Аналогично, фигуру $\lambda\Phi$ мы определим как фигуру, образованную всеми точками λA, где A — произвольная точка фигуры Φ (рис. 26). Иначе говоря, фигура $\lambda\Phi$ получается из фигуры Φ с помощью гомотетии с центром O и коэффициентом λ.

Из свойств сложения точек сразу следуют соотношения

$$\Phi_1+\Phi_2=\Phi_2+\Phi_1;$$

$$(\Phi_1+\Phi_2)+\Phi_3=\Phi_1+(\Phi_2+\Phi_3)$$

(эту сумму мы будем обозначать просто через $\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3$) и т. д.

Укажем в качестве примера, что если Φ_1 и Φ_2 — непараллельные отрезки, то сумма $\Phi_1+\Phi_2$ является параллелограммом (рис. 27). Суммы фигур обладают многими интересными свойствами, делающими плодотворным употребление в геометрии этого понятия. Так, например, можно доказать, что *если плоские фигуры* Φ_1 *и* Φ_2 *выпуклые* [1]), *то периметр фигуры* $\Phi_1+\Phi_2$ *равен сумме периметров фигур* Φ_1 *и* Φ_2.

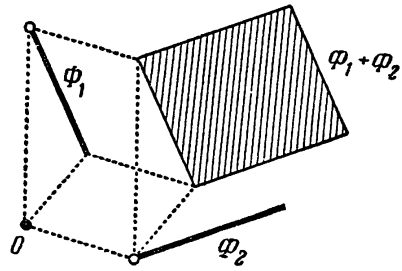


Рис. 27.

Геометрия изучает свойства фигур, не зависящие от их расположения. Данное же нами определение суммы фигур, конечно, зависит от положения слагаемых; сверх того, оно еще зависит и от выбора начала отсчета. Это обстоятельство безусловно является серьезным недостатком определения. Нетрудно, однако, доказать, что *при изменении начала отсчета и при параллельном переносе слагаемых форма фигуры, являющейся суммой* $\Phi_1+\Phi_2$, *не меняется*; эта сумма лишь подвергается в результате параллельному переносу. Вместе с тем поворот слагаемых может существенно изменить сумму. Так, на рис. 28,*а* изображена сумма двух равных между собой треуголь-

[1]) Частным случаем выпуклых фигур являются выпуклые многоугольники (см. в кн. V ЭЭМ статью о выпуклых фигурах и телах).

ников, а на рис. 28, *б* — сумма тех же треугольников, один из которых повернут на угол 180°.

Следует отметить, что между «арифметикой фигур» и арифметикой чисел имеются существенные различия. Так, например, вообще говоря, не существует «разности» $\Phi_1 - \Phi_2$ двух заданных фигур Φ_1 и Φ_2, т. е. такой фигуры Φ, что $\Phi_2 + \Phi = \Phi_1$; в частности, можно без труда доказать, что не существует разности между треугольником и кругом. Отметим, далее, что в «арифметике фигур», вообще говоря, не выполнены такие соотношения, как

$$\Phi + \Phi = 2 \cdot \Phi,$$
$$\Phi + \Phi + \Phi = 3 \cdot \Phi$$

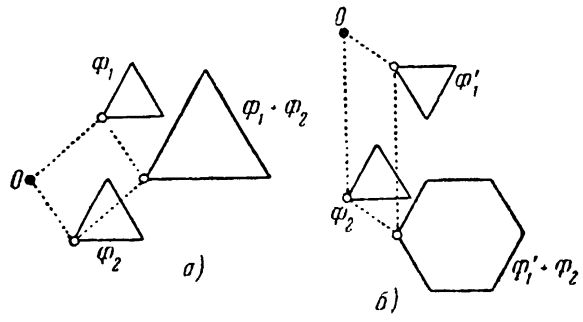


Рис. 28.

и т. д. Например, если Φ — окружность радиуса r, то, как нетрудно видеть, фигура $\Phi + \Phi$ будет *кругом* радиуса $2r$, а фигура 2Φ представляет собой *окружность* радиуса $2r$.

2.8. Деление отрезка в данном отношении. Нижеследующие три предложения очень удобны при решении многих задач геометрии с помощью векторов.

Предложение 1. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *параллельны и* $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, *то существует такое число* k, *что* $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$.

Доказательство очевидно.

Предложение 2. *Пусть* A, B *и* C *— три точки (плоскости или пространства), причем* $A \neq B$ *и* Q *— произвольная четвертая точка. Точка* C *тогда и только тогда лежит на прямой* AB, *когда существует такое число* λ, *что*

$$\overline{QC} = \lambda \overline{QA} + (1 - \lambda)\,\overline{QB} \qquad (22)$$

(рис. 29).

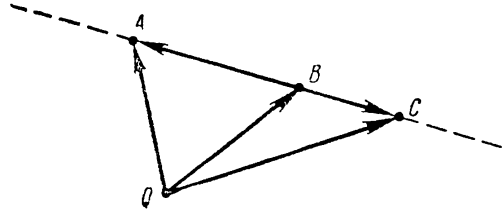


Рис. 29.

В самом деле, соотношение (22) можно переписать в виде

$$\overline{QC} = \lambda \overline{QA} + \overline{QB} - \lambda \overline{QB},$$

или, иначе,

$$\overline{QC} - \overline{QB} = \lambda\,(\overline{QA} - \overline{QB}),$$

или, наконец, в виде

$$\overline{BC} = \lambda \cdot \overline{BA},$$

а это соотношение выполнено тогда и только тогда, когда векторы $\overline{BC}$ и $\overline{BA}$ параллельны одной и той же прямой, т. е. когда точка C лежит на прямой AB.

Предложение 3. *Пусть C — точка, делящая отрезок AB в отношении $m:n$ (т. е. $AC:CB=m:n$[1]), и Q — произвольная точка плоскости. Тогда*

$$\overline{QC}=\frac{n}{m+n}\overline{QA}+\frac{m}{m+n}\overline{QB}. \tag{23}$$

Обратно, если выполнено соотношение (23), *то точка C делит отрезок AB в отношении $m:n$.*

В самом деле, соотношение (23) можно переписать в виде

$$\overline{QC}=\overline{QA}-\frac{m}{m+n}\overline{QA}+\frac{m}{m+n}\overline{QB},$$

или, иначе,

$$\overline{QC}-\overline{QA}=\frac{m}{m+n}(\overline{QB}-\overline{QA}),$$

или, наконец, в виде

$$\overline{AC}=\frac{m}{m+n}\overline{AB},$$

а это и означает, что точка C делит отрезок AB в отношении $m:n$ (рис. 30).

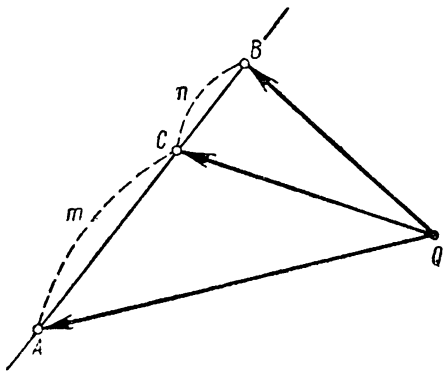


Рис. 30.

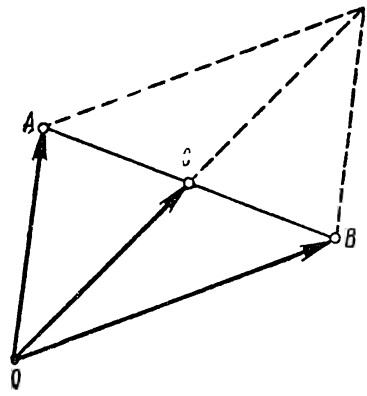


Рис. 31.

Отметим один важный частный случай предложения 3: *точка C тогда и только тогда является серединой отрезка AB, когда*

$$\overline{QC}=\frac{1}{2}(\overline{QA}+\overline{QB}) \tag{24}$$

(Q — произвольная точка; рис. 31). Это вытекает из формулы (23) при $m=n$ (ср. рис. 30). Можно сказать и иначе: *для того чтобы точки A и B были симметричны относительно точки C, необходимо и достаточно выполнение соотношения* (24).

[1]) Нижеследующее рассуждение и формула (23) сохраняют силу и в том случае, если отношение $AC:CB=m:n$ отрицательно, т. е. отрезки AC и CB имеют разное направление (точка C лежит на прямой AB вне отрезка AB).

2.9. Координаты вектора. До сих пор мы говорили лишь о таких свойствах векторов, которые являются одними и теми же как в случае плоскости, так и в случае пространства. Теперь мы впервые отметим различие между этими двумя случаями.

Пусть $i=\overline{OI}$ и $j=\overline{OJ}$ — два произвольных вектора плоскости, не принадлежащие одной прямой (рис. 32, *а*). Каждый вектор $a=\overline{OA}$ плоскости можно, как легко видеть, разложить на сумму двух векторов $a_1=\overline{OA}_1$ и $a_2=\overline{OA}_2$, направленных по тем же прямым, что и векторы i, j: для этого достаточно построить параллелограмм OA_1AA_2,

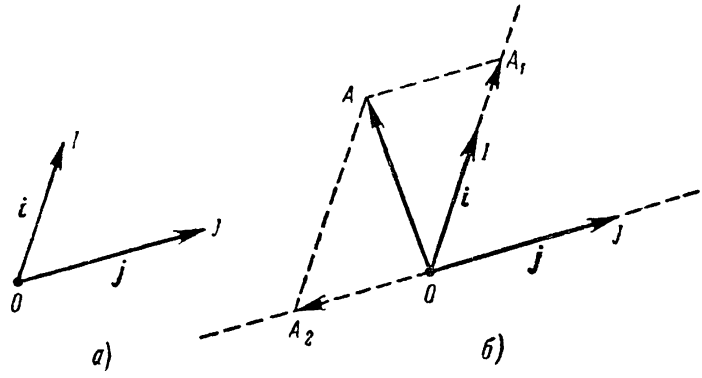


Рис. 32.

две стороны которого имеют направление векторов i и j, а диагональ совпадает с $\overline{OA}$ (рис. 32, *б*; одно из двух слагаемых a_1 или a_2 может и отсутствовать). В силу предложения 1 (стр. 310)

$$\overline{OA}_1=x\cdot\overline{OI}=xi,\quad \overline{OA}_2=y\cdot\overline{OJ}=yj,$$

где x и y — некоторые действительные числа, и потому

$$a=\overline{OA}=\overline{OA}_1+\overline{OA}_2=xi+yj.$$

Итак, *если на плоскости фиксированы два ненулевых вектора i, j, не параллельных одной прямой, то любой вектор a плоскости можно представить в виде суммы*

$$a=xi+yj, \tag{25}$$

где x и y — действительные числа (зависящие, конечно, от вектора a). Важно отметить, что *числа x и y определяются вектором a однозначно*. Действительно, если бы вектор a можно было двумя различными способами представить в виде суммы (25):

$$a=x_1i+y_1j,\quad a=x_2i+y_2j,$$

то мы имели бы

$$x_1 i + y_1 j = x_2 i + y_2 j,$$

или

$$(x_1 - x_2) i = (y_2 - y_1) j.$$

Так как мы двумя различными способами представили a в виде суммы (25), то хотя бы одно из равенств $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ места не имеет. Пусть, например, $x_1 \neq x_2$. Тогда

$$i = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} j,$$

а это противоречит тому, что векторы i, j не параллельны одной прямой.

Числа x и y, однозначно определяемые вектором a по формуле (25), называются *координатами* вектора a относительно пары векторов i, j (или относительно *системы координат*, определяемой векторами i, j). Говорят также: вектор a имеет в системе i, j координаты (x, y).

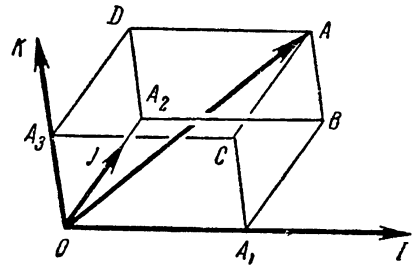


Рис. 33.

Аналогично этому, если $i = \overline{OI}$, $j = \overline{OJ}$, $k = \overline{OK}$ — три вектора пространства, не принадлежащие одной плоскости, то любой вектор $a = \overline{OA}$ можно представить в виде суммы $a = a_1 + a_2 + a_3$, где векторы a_1, a_2 и a_3 принадлежат прямым OI, OJ и OK. Для доказательства достаточно построить параллелепипед $OA_1BA_2A_3CAD$, три ребра OA_1, OA_2 и OA_3 которого направлены по прямым OI, OJ, OK (рис. 33; некоторые из векторов a_1, a_2 и a_3 могут превращаться и в нулевой вектор 0). Отсюда следует, что *любой вектор a пространства может быть представлен в виде суммы*

$$a = xi + yj + zk, \tag{26}$$

где x, y, z — действительные числа. Числа x, y, z и здесь однозначно определяются вектором a. Они называются *координатами* вектора a в системе i, j, k.

Из формул (25) и (26) вытекает:

Если векторы a и b имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (или, в пространстве, координаты (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2)), то векторы $a + b$ и λa имеют координаты $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ и $(\lambda x_1, \lambda y_1)$ (или, в пространстве, $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ и $(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$).

В самом деле, из правил, относящихся к сложению векторов и умножению вектора на число, сразу следует:

Если $a = x_1 i + y_1 j$, а $b = x_2 i + y_2 j$, то

$$a + b = (x_1 i + y_1 j) + (x_2 i + y_2 j) = (x_1 + x_2) i + (y_1 + y_2) j$$

и

$$\lambda a = \lambda (x_1 i + y_1 j) = (\lambda x_1) i + (\lambda y_1) j,$$

что и доказывает наше утверждение. Разбор случая векторов в пространстве (векторов, имеющих три координаты), почти не отличающегося от рассмотренного, мы предоставим читателю.

2.10. Линейная зависимость векторов. Отметим еще важное понятие *линейной зависимости* векторов, которое будет использовано ниже, в § 7. Векторы $a_1, \ldots, a_k$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, среди которых есть хотя бы одно отличное от нуля, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = 0.$$

Если таких чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ подобрать нельзя, то векторы $a_1, \ldots, a_k$ называются *линейно независимыми*. Имеют место следующие предложения:

Если два вектора параллельны одной прямой, то они линейно зависимы. Если три вектора параллельны одной плоскости, то они линейно зависимы. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Справедливость первого предложения вытекает из предложения 1 на стр. 310. Пусть теперь a, b, c — три вектора, параллельные одной плоскости. Если векторы a, b параллельны одной прямой, то между ними существует линейная зависимость: $\alpha a + \beta b = 0$, и потому между векторами a, b, c имеется линейная зависимость $\alpha a + \beta b + 0c = 0$. Если же векторы a и b не параллельны одной прямой, то, согласно (25), $c = xa + yb$, где x, y — действительные числа, и потому между векторами a, b, c имеется линейная зависимость $xa + yb + (-1)c = 0$. Наконец, пусть a, b, c, d — четыре вектора пространства. Если векторы a, b, c параллельны одной плоскости, то между ними существует линейная зависимость: $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$, и потому между векторами a, b, c, d имеется линейная зависимость $\alpha a + \beta b + \gamma c + 0d = 0$. Если же векторы a, b, c не параллельны одной плоскости, то, согласно (26), $d = xa + yb + zc$, где x, y, z — действительные числа, и потому между векторами a, b, c, d и в этом случае имеется линейная зависимость $xa + yb + zc + (-1)d = 0$.

Итак, в пространстве существуют три линейно независимых вектора (три вектора, не параллельных одной плоскости), но любые четыре вектора линейно зависимы. Этот факт обычно и имеют в виду, когда говорят, что *пространство имеет три измерения*. Плоскость имеет два измерения, так как на ней можно найти два линейно независимых вектора (два вектора, не параллельных между собой), но любые три вектора на плоскости линейно зависимы. Наконец, прямая имеет одно измерение. В математике рассматриваются также пространства любого (и даже бесконечного) числа измерений. Не-

сколько слов об этом читатель найдет ниже, в § 7 этой статьи [1]), а подробная статья о многомерных пространствах будет помещена в кн. V ЭЭМ.

2.11. Примеры. В заключение этого параграфа рассмотрим несколько примеров решения задач с помощью векторов. Приводимые ниже задачи имеют разную степень трудности: некоторые из них являются вовсе не простыми. Однако, как увидит читатель, использование векторов делает все эти задачи вычислительными, т. е. сводит геометрические рассуждения (с треугольниками, средними линиями и т. п.) к вычислениям с векторами, как правило, совсем не сложным. Приведенные примеры хорошо иллюстрируют и другие важные достоинства векторного аппарата: возможность обходиться без чертежей, почти неизбежно иллюстрирующих лишь один частный случай разбираемой ситуации и тем самым оставляющих сомнение в своей универсальности, параллельное доказательство родственных (и зачастую разных по формулировке!) планиметрических и стереометрических фактов и т. д.

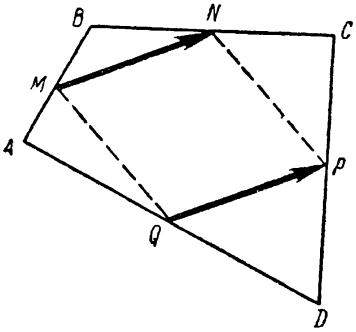


Рис. 34.

Задача 1. *Доказать, что середины сторон произвольного* (не обязательно плоского!) *четырехугольника являются вершинами параллелограмма.*

Решение. Пусть M, N, P, Q — середины сторон четырехугольника $ABCD$ (рис. 34). Тогда

$$\overline{MN}-\overline{QP}=\overline{MN}+\overline{PQ}=(\overline{MB}+\overline{BN})+(\overline{PD}+\overline{DQ})=$$
$$=\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{BC}+\frac{1}{2}\overline{CD}+\frac{1}{2}\overline{DA}=$$
$$=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA})=\frac{1}{2}\overline{AA}=\mathbf{0}.$$

Таким образом, $\overline{MN}=\overline{QP}$, т. е. противоположные стороны четырехугольника $MNPQ$ равны и параллельны. Следовательно, $MNPQ$ — параллелограмм.

Задача 2. *Даны три точки* O_1, O_2, O_3 *и еще одна точка* M (все эти точки могут и не лежать в одной плоскости!). *Обозначим через* M_1 *точку, симметричную* M *относительно точки* O_1, *через* M_2 *— точку, симметричную* M_1 *относительно* O_2, *через* M_3 *— точку, симметричную* M_2 *относительно* O_3, *через* M_4 *— точку, симмет-*

[1]) См. также статью, указанную в сноске[1]) на стр. 298.

ричную M_3 относительно O_1, через M_5 — точку, симметричную M_4 относительно O_2 и через M_6 — точку, симметричную M_5 относительно O_3. Доказать, что точка M_6 совпадает с исходной точкой M (рис. 35).

Решение. Пусть Q — какая угодно точка. Используя соотношение (24) (которое можно также переписать в виде соотношения $\overline{QA}+\overline{QB}=2\overline{QC}$), мы можем условие задачи записать в виде следующей цепочки равенств:

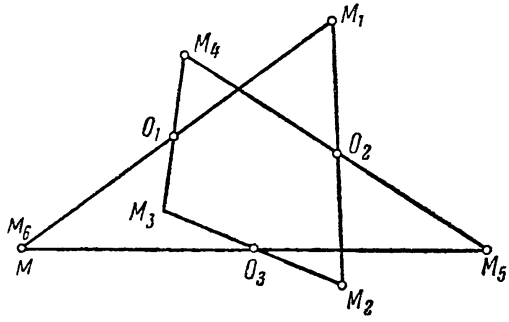


Рис. 35

$$\overline{QM}+\overline{QM_1}=2\overline{QO_1},$$
$$\overline{QM_1}+\overline{QM_2}=2\overline{QO_2},$$
$$\overline{QM_2}+\overline{QM_3}=2\overline{QO_3},$$
$$\overline{QM_3}+\overline{QM_4}=2\overline{QO_1},$$
$$\overline{QM_4}+\overline{QM_5}=2\overline{QO_2},$$
$$\overline{QM_5}+\overline{QM_6}=2\overline{QO_3}.$$

Так как первое и второе из этих равенств содержат вектор $\overline{QM_1}$, то с их помощью можно исключить этот вектор; второе и третье равенства позволяют исключить вектор $\overline{QM_2}$ и т. д. В результате окажется возможным вычислить вектор $\overline{QM_6}$. Это можно сделать, последовательно подставляя значения векторов $\overline{QM_1}$, $\overline{QM_2}$, ... в последующие равенства, но проще сложить первое, третье и пятое из выписанных равенств и вычесть из них второе, четвертое и шестое. Тогда сразу получим

$$\overline{QM}-\overline{QM_6}=\mathbf{0}, \quad \text{или} \quad \overline{M_6M}=\mathbf{0},$$

а это и означает, что точки M и M_6 совпадают.

«Обычное» решение этой задачи (не использующее векторов) требует рассмотрения целого ряда треугольников и довольно утомительно.

Задача 3. *Доказать, что медианы произвольного треугольника ABC пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении* 2:1, *считая от вершины.*

Решение. Обозначим медианы треугольника через AD, BE, CF и выберем еще одну произвольную точку Q (рис. 36). Согласно формуле (24) мы имеем

$$\overline{QD}=\frac{1}{2}(\overline{QB}+\overline{QC}).$$

Далее, точка M_1, делящая медиану AD в отношении $AM_1:M_1D=2:1$ (рис. 37), удовлетворяет соотношению (см (23))

$$\overline{QM_1}=\frac{1}{3}\overline{QA}+\frac{2}{3}\overline{QD}=\frac{1}{3}\overline{QA}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overline{QB}+\overline{QC})\right)=\frac{1}{3}(\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}).$$

Совершенно такой же подсчет показывает, что если M_2 и M_3 — точки, делящие медианы BE и CF в отношении 2:1, то

$$\overline{QM_2} = \overline{QM_3} = \frac{1}{3}(\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC}).$$

Таким образом, M_1, M_2 и M_3 — это одна и та же точка M (через которую проходят все три медианы).

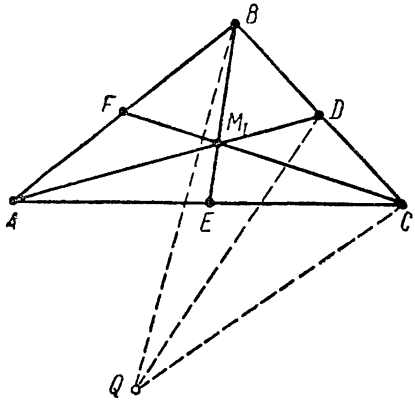


Рис. 36.

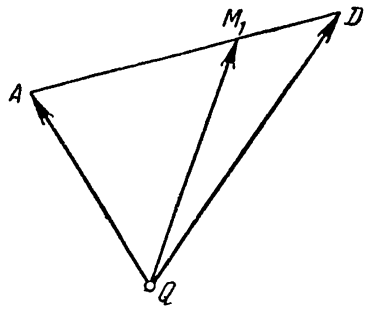


Рис. 37.

Из приведенного решения этой задачи вытекает следующий факт, который удобно использовать при решении ряда других задач:

Пусть ABC — произвольный треугольник и M — точка пересечения его медиан (она называется также центром тяжести треугольника). *Тогда при любой точке Q справедливо соотношение:*

$$\overline{QM} = \frac{1}{3}(\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC}). \qquad (27)$$

Задача 4. *Медианой «четырехвершинника» $ABCD$ называется отрезок, соединяющий одну из вершин* (скажем A) *с центром тяжести треугольника, образованного тремя другими вершинами* (треугольника BCD). *Доказать, что четыре медианы «четырехвершинника» пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении* 3:1, *считая от вершины* (рис. 38, *а*, *б*).

Заметим, что слово «четырехвершинник» может означать как обыкновенный плоский четырехугольник, так и треугольную пирамиду (тетраэдр); мы потому и используем этот новый термин, чтобы подчеркнуть, что рассматриваются одновременно оба случая. Таким образом, здесь мы имеем одновременно два разных предложения — одно планиметрическое, а второе стереометрическое, — которые не различаются по доказательству.

Решение. Обозначим медианы «четырехвершинника» $ABCD$ через AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 и выберем еще одну произвольную

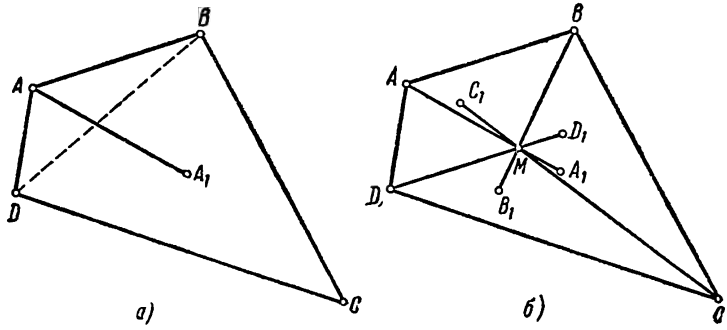


Рис. 38.

точку Q. Согласно формуле (27) мы имеем

$$\overline{QA_1}=\frac{1}{3}(\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}).$$

Далее, точка M_1, делящая медиану AA_1 в отношении $AM_1:M_1A_1=3:1$, удовлетворяет соотношению (см. (23))

$$\overline{QM_1}=\frac{1}{4}\overline{QA}+\frac{3}{4}\overline{QA_1}=\frac{1}{4}\overline{QA}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD})\right)=$$

$$=\frac{1}{4}(\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}).$$

Совершенно такой же подсчет показывает, что точки M_2, M_3, M_4, делящие в отношении 3:1 другие медианы, удовлетворяют тому же соотношению. Таким образом, M_1, M_2, M_3, M_4 — это одна и та же точка M, через которую проходят все четыре медианы.

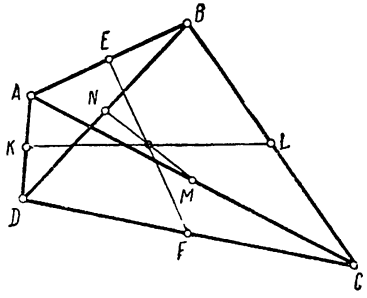


Рис. 39.

Задача 5. *Пусть E, F; K, L; M, N — середины «сторон» AB и CD, AD и BC, AC и BD «четырехвершинника» $ABCD$. Доказать, что отрезки EF, KL и MN пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам* (рис. 39).

Здесь тоже объединены следующие два с первого взгляда разные предложения: 1) *«средние линии» EF и KL произвольного (плоского) четырехугольника $ABCD$ и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам;* 2) *отрезки, соединяющие середины противопо-*

ложных ребер произвольной треугольной пирамиды (тетраэдра), пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

Решение. Пусть Q—произвольная точка; середины отрезков EF, KL и MN мы обозначим через S_1, S_2 и S_3 (пока нам еще неизвестно, что это—одна точка). С помощью формулы (24) получим:

$$\overline{QE}=\frac{1}{2}(\overline{QA}+\overline{QB}),\quad \overline{QF}=\frac{1}{2}(\overline{QC}+\overline{QD});$$

$$\overline{QK}=\frac{1}{2}(\overline{QA}+\overline{QD}),\quad \overline{QL}=\frac{1}{2}(\overline{QB}+\overline{QC});$$

$$\overline{QM}=\frac{1}{2}(\overline{QA}+\overline{QC}),\quad \overline{QN}=\frac{1}{2}(\overline{QB}+\overline{QD}).$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает:

$$\overline{QS_1}=\frac{1}{2}(\overline{QE}+\overline{QF})=\frac{1}{4}(\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}),$$

$$\overline{QS_2}=\frac{1}{2}(\overline{QK}+\overline{QL})=\frac{1}{4}(\overline{QA}+\overline{QD}+\overline{QB}+\overline{QC}),$$

$$\overline{QS_3}=\frac{1}{2}(\overline{QM}+\overline{QN})=\frac{1}{4}(\overline{QA}+\overline{QC}+\overline{QB}+\overline{QD}).$$

Последние три формулы и доказывают совпадение точек S_1, S_2 и S_3 (ср. формулу (7), стр. 301).

§ 3. Скалярное произведение векторов

3.1. Проекция вектора на ось. В этом параграфе мы будем предполагать, что выбрана единица измерения длин.

Прямая линия, на которой задано некоторое направление (обычно указываемое стрелкой), называется *осью*. Пусть l—некоторая ось и $\overline{AB}$—

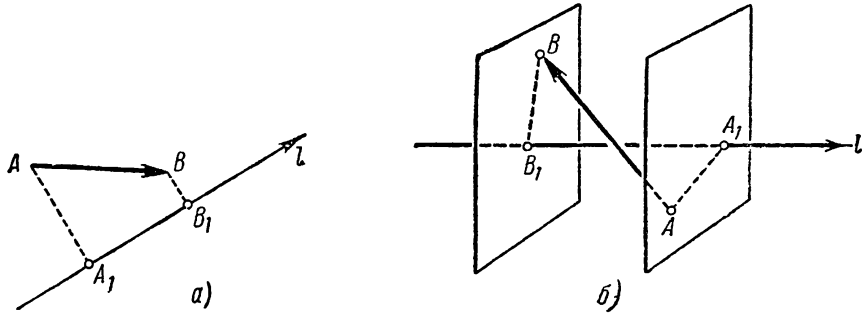


Рис. 40.

направленный отрезок (рис. 40, *а*, *б*). Проекции точек A и B на прямую l (т. е. основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую l; в случае векторов в пространстве это—точки пересечения

прямой l с перпендикулярными к l плоскостями, проходящими через точки A и B) мы обозначим через A_1 и B_1. Длину отрезка A_1B_1, взятую со знаком «+», если направление $\overline{A_1B_1}$ (от A_1 к B_1) совпадает с заданным на оси l направлением, и со знаком «—» в противном случае, мы будем называть *проекцией* направленного отрезка $\overline{AB}$ на ось l и будем обозначать ее через

$$\text{пр}_l \overline{AB} = \pm \text{(длина } A_1B_1\text{)}.$$

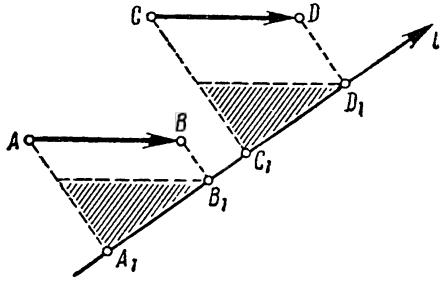


Рис. 41.

Если отрезок $\overline{AB}$ перпендикулярен оси l, то точки A_1 и B_1 совпадают, и $\text{пр}_l \overline{AB}$ оказывается равной нулю. Легко видеть, что если направленные отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ определяют один и тот же вектор, то их проекции на ось l одинаковы (ср. рис. 41, относящийся к случаю векторов на плоскости; заштрихованные треугольники, очевидно, равны между собой). Поэтому можно говорить о проекции вектора на ось. Проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на ось l мы будем обозначать символом $\text{пр.}_l \boldsymbol{a}$.

Проекцию вектора на ось можно определить еще следующим образом. Пусть обозначения A, B, A_1, B_1 имеют тот же смысл, что и выше. Обозначим через $\boldsymbol{l}$ вектор длины 1, имеющий направление оси l (рис. 42). Так как векторы $\overline{A_1B_1}$ и $\boldsymbol{l}$ параллельны одной прямой, причем $\boldsymbol{l} \neq 0$, то в силу предложения 1 на стр. 310 мы можем написать

$$\overline{A_1B_1} = x\boldsymbol{l}, \qquad (28)$$

где x — действительное число. Легко видеть, что число x как раз равно искомой проекции:

$$x = \text{пр}_l \overline{AB}.$$

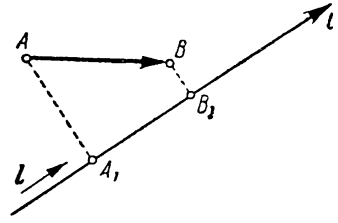


Рис. 42.

В самом деле, из соотношения (28) вытекает, что абсолютная величина числа x равна длине отрезка $\overline{A_1B_1}$, причем это число положительно, если векторы $\overline{A_1B_1}$ и $\boldsymbol{l}$ одинаково направлены, и отрицательно в противном случае.

3.2. Свойства проекций. Основные свойства проекций выражаются следующими двумя равенствами, в которых $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произвольные векторы, а λ — действительное число:

$$\text{пр}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \text{пр}_l \boldsymbol{a} + \text{пр}_l \boldsymbol{b}, \qquad (29)$$

$$\text{пр}_l(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \boldsymbol{a}. \qquad (30)$$

Соотношения (29) и (30) доказываются очень просто. В самом деле, пусть $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overline{BC}$; тогда $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overline{AC}$. Обозначим через A_1, B_1, C_1 проекции точек A, B, C на ось l. Согласно (28) мы можем написать

$$\overline{A_1B_1}=x'\boldsymbol{l}, \qquad \overline{B_1C_1}=x''\boldsymbol{l}, \qquad \overline{A_1C_1}=x\boldsymbol{l},$$

где

$$x'=\mathrm{пр}_l\,\boldsymbol{a}, \qquad x''=\mathrm{пр}_l\,\boldsymbol{b}, \qquad x=\mathrm{пр}_l\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Но мы имеем

$$x\boldsymbol{l}=\overline{A_1C_1}=\overline{A_1B_1}+\overline{B_1C_1}=x'\boldsymbol{l}+x''\boldsymbol{l}=(x'+x'')\,\boldsymbol{l},$$

откуда $x=x'+x''$, и соотношение (29) доказано. Далее, пусть $\boldsymbol{a}=\overline{AB}$, $\lambda\boldsymbol{a}=\overline{AB'}$. Спроектируем точки A, B, B' на ось $\boldsymbol{l}$; мы

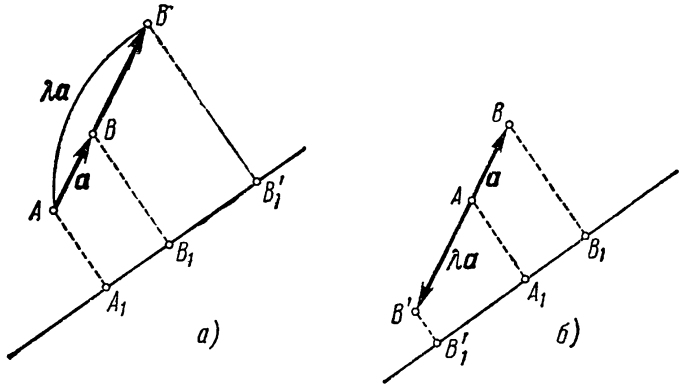


Рис. 43.

получим точки A_1, B_1, B_1' (рис. 43, *а*, *б*—случаи $\lambda>0$ и $\lambda<0$). Из параллельности прямых AA_1, BB_1, $B'B_1'$ вытекает, что $\overline{A_1B_1'}=\lambda\overline{A_1B_1}$. На основании (28) мы можем написать

$$\overline{A_1B_1}=x\boldsymbol{l}, \qquad \overline{A_1B_1'}=x'\boldsymbol{l},$$

где

$$x=\mathrm{пр}_l\,\boldsymbol{a}, \qquad x'=\mathrm{пр}_l\,(\lambda\boldsymbol{a}).$$

Таким образом,

$$x'\boldsymbol{l}=\overline{A_1B_1'}=\lambda\cdot\overline{A_1B_1}=\lambda\,(x\boldsymbol{l})=(\lambda x)\,\boldsymbol{l},$$

откуда $x'=\lambda x$, и соотношение (30) доказано.

3.3. Связь проекций с координатами. Нетрудно усмотреть связь понятия проекции вектора с его (прямоугольными декартовыми) координатами. Пусть OX и OY—две взаимно перпендикулярные оси на плоскости (или OX, OY и OZ—три взаимно перпендикулярные оси в пространстве), составляющие вместе *систему координат*. Обычно ось OX (иначе, *ось абсцисс*) представляют себе

в виде горизонтальной прямой, направленной вправо, а ось OY *(ось ординат)* — вертикальной прямой, направленной вверх; в пространстве оси OX и OY направляют в горизонтальной плоскости так, что поворот оси OX вокруг O против часовой стрелки (если наблюдать сверху!) на 90° переводит ее в ось OY (учитывая направления осей), а ось OZ *(ось апликат)* направляют вертикально вверх. Обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ единичные векторы осей OX и OY, т. е. векторы длины 1, направления которых совпадают с направлениями осей (соответственно в пространстве обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ единичные векторы осей OX, OY, OZ).

Если теперь $\boldsymbol{a}$ *— произвольный вектор на плоскости и* (x, y) *— его координаты в системе* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, *то имеют место соотношения*

$$x = \mathrm{пр}_{OX}\boldsymbol{a}, \quad y = \mathrm{пр}_{OY}\boldsymbol{a}. \tag{31}$$

Аналогично в пространстве координаты (x, y, z) *произвольного вектора* $\boldsymbol{a}$ *в системе* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ *выражаются через проекции по формулам*

$$x = \mathrm{пр}_{OX}\boldsymbol{a}, \quad y = \mathrm{пр}_{OY}\boldsymbol{a}, \quad z = \mathrm{пр}_{OZ}\boldsymbol{a}. \tag{31a}$$

В самом деле, мы имеем (в случае плоскости)

$$\mathrm{пр}_{OX}\boldsymbol{a} = \mathrm{пр}_{OX}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \mathrm{пр}_{OX}(x\boldsymbol{i}) + \mathrm{пр}_{OX}(y\boldsymbol{j}) = x\,\mathrm{пр}_{OX}\boldsymbol{i} + y\,\mathrm{пр}_{OX}\boldsymbol{j} = x.$$

(так как $\mathrm{пр}_{OX}\boldsymbol{i} = 1$, $\mathrm{пр}_{OX}\boldsymbol{j} = 0$). Тем самым первая из формул (31) установлена. Вторая формула и формулы (31а) в пространстве доказываются совершенно аналогично.

3.4. Связь с тригонометрическими функциями. Укажем еще связь проекций и координат векторов на плоскости с тригонометрическими функциями. Пусть XOY — некоторая прямоугольная система координат на плоскости. Пусть, далее, $\boldsymbol{l}$ — вектор длины 1, образующий с осью OX угол φ. Углы, как обычно, мы условливаемся отсчитывать против часовой стрелки (рис. 44); угол, отсчитываемый по часовой стрелке, считается отрицательным. Тогда имеют место формулы

$$\sin\varphi = \mathrm{пр}_{OY}\boldsymbol{l}, \quad \cos\varphi = \mathrm{пр}_{OX}\boldsymbol{l}, \tag{32}$$

т. е. вектор $\boldsymbol{l}$ имеет координаты: $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$. Соотношения (32) легко проверяются в случае острого угла φ (рис. 45); в случае же произвольного угла φ их следует рассматривать как *определение* величин $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Это определение, очевидно, совершенно эквивалентно определению с помощью тригонометрического круга, но, как мы увидим ниже, значительно удобнее.

Пусть $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор. Обозначим его длину через a, а угол, который он образует с осью OX, через φ. Тогда, как легко

видеть, координаты вектора $\boldsymbol{a}$ имеют следующие значения:

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\sin\varphi. \tag{33}$$

В самом деле, обозначим через $\boldsymbol{l}$ вектор длины 1, имеющий то же направление, что и вектор $\boldsymbol{a}$. Тогда $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{l}$. Так как вектор $\boldsymbol{l}$ имеет координаты $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, то вектор $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{l}$ имеет координаты, указанные формулой (33).

Из формулы (33) легко вытекает формула для вычисления проекции произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ на любую ось l. Примем ось l за ось абсцисс и направим ось ординат перпендикулярно к ней. Тогда мы

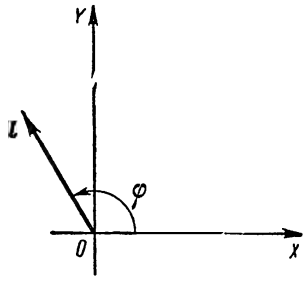


Рис. 44.

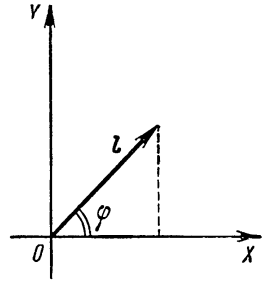


Рис 45.

получим систему координат XOY и в этой системе число $\mathrm{пр}_l \boldsymbol{a}$ будет в силу (31) абсциссой вектора $\boldsymbol{a}$. Согласно (33) эта абсцисса имеет значение $a\cos\varphi$, где a — длина вектора $\boldsymbol{a}$, а φ — угол, который он образует с осью абсцисс (т. е. с осью l). Итак,

$$\mathrm{пр}_l \boldsymbol{a} = a\cos\varphi. \tag{34}$$

Отметим еще, что из данного выше определения синуса и косинуса (см. (32)) легко вытекают известные формулы приведения:

$$\begin{aligned} \cos(-\varphi) &= \cos\varphi, \\ \sin(-\varphi) &= -\sin\varphi, \\ \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\varphi, \\ \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\varphi. \end{aligned} \tag{35}$$

В самом деле, вектор, образующий угол φ с осью OX, и вектор, образующий угол $-\varphi$ с осью OX, симметричны относительно оси абсцисс, откуда и следуют первые две формулы (35). Далее, рассмотрим, кроме системы координат XOY (рис. 46, *а*), еще систему координат $X'OY'$, получающуюся из нее поворотом на угол 90° против часовой стрелки (рис. 46, *б*). Вектор $\boldsymbol{l}$ длины 1, образующий

с осью OX угол φ, будет с осью OX' образовывать угол $\varphi-\frac{\pi}{2}$, и потому координаты вектора l в системе XOY будут

$$x=\cos\varphi, \quad y=\sin\varphi, \tag{36}$$

а в системе $X'OY'$ этот же вектор имеет координаты

$$x'=\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right), \quad y'=\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right). \tag{37}$$

Но из расположения систем XOY и $X'OY'$ ясно, что

$$x'=y, \quad y'=-x \tag{38}$$

(ибо ось OX' совпадает с OY, а ось OY' имеет направление, противоположное направлению оси OX). Из (36), (37), (38) непосредственно вытекают последние две формулы (35).

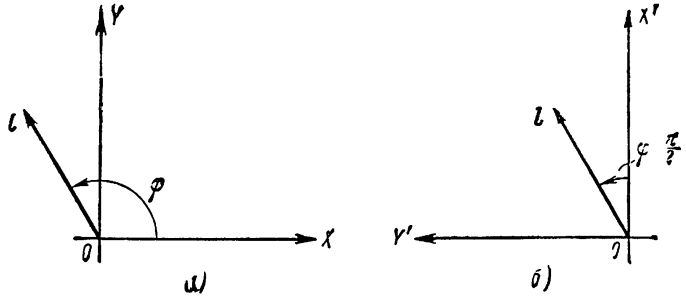


Рис. 46.

Из формул (35) легко вытекают все остальные формулы приведения. Например, заменяя в последних двух формулах (35) угол φ на $\varphi+\frac{\pi}{2}$, получим

$$\cos\varphi=\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right), \quad \sin\varphi=-\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right);$$

далее,

$$\sin(\varphi+\pi)=\sin\left[\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\varphi,$$

и т. д.

3.5. Примеры. Вышесказанное позволяет использовать векторы в решениях, связанных с тригонометрией задач.

Пример 1. *Доказать, что в произвольном треугольнике имеет место соотношение* (рис. 47)

$$a=b\cos C+c\cos B$$

(это соотношение называется формулой проекций).

Решение. Положим

$$\boldsymbol{a}=\overline{BC},\quad \boldsymbol{b}=\overline{AC},\quad \boldsymbol{c}=\overline{BA}$$

и обозначим через l ось, имеющую направление вектора $\boldsymbol{a}$ (рис. 48).

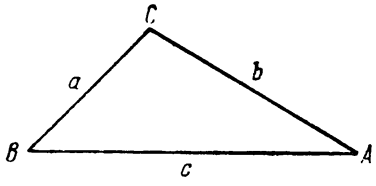


Рис. 47

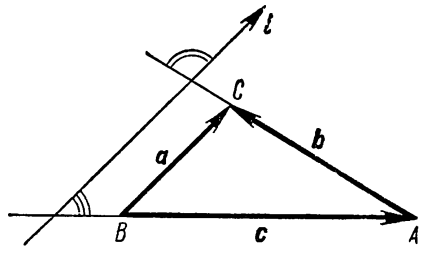


Рис. 48.

Тогда вектор $\boldsymbol{b}$ образует с осью l угол C, вектор $\boldsymbol{c}$ образует с этой осью угол B, а вектор $\boldsymbol{a}$ образует с осью l угол, равный нулю. Поэтому (см. (34))

$$\text{пр}_l\,\boldsymbol{a}=a,\quad \text{пр}_l\,\boldsymbol{b}=b\cos C,\quad \text{пр}_l\,\boldsymbol{c}=c\cos B.$$

Так как, кроме того, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}$, то из формулы (29) вытекает требуемое соотношение.

Пример 2. Представить выражения $\cos\alpha\pm\cos\beta$ и $\sin\alpha\pm\sin\beta$ в виде произведений тригонометрических функций некоторых углов.

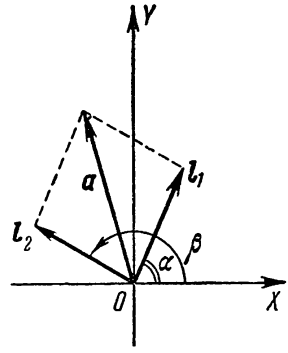


Рис. 49.

Решение. Обозначим через $\boldsymbol{l}_1$ вектор длины 1, образующий с осью OX угол α, а через $\boldsymbol{l}_2$ — вектор длины 1, образующий с осью OX угол β. Тогда вектор $\boldsymbol{l}_1$ имеет координаты $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, вектор $\boldsymbol{l}_2$ имеет координаты $(\cos\beta,\ \sin\beta)$ и, следовательно, вектор $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_2$ (рис. 49) имеет координаты

$$x=\cos\alpha+\cos\beta,\quad y=\sin\alpha+\sin\beta \tag{39}$$

(ср. выше, стр. 320 и 322). А так как вектор $\boldsymbol{a}$ образует с векторами $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ углы $\pm\frac{\alpha-\beta}{2}$, то мы имеем

$$a=|\boldsymbol{a}|=\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{a}=\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,(\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_2)=\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{l}_1+\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{l}_2=$$

$$=1\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

С осью OX вектор $\boldsymbol{a}$ образует угол $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Следовательно, координаты вектора $\boldsymbol{a}$ имеют значения

$$\begin{aligned} x &= a\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \\ y &= a\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \end{aligned} \tag{40}$$

Из (39) и (40) получаем

$$\begin{aligned} \cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \\ \sin\alpha+\sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \end{aligned} \tag{41}$$

Заменяя здесь β на $\beta+\pi$ и пользуясь формулами приведения, получаем еще два соотношения

$$\begin{aligned} \cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \\ \sin\alpha-\sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Заметим еще, что из (41) и (42), положив $\alpha=\varphi+\psi$, $\beta=\varphi-\psi$, мы легко сможем выразить $\cos(\varphi\pm\psi)$ и $\sin(\varphi\pm\psi)$ через тригонометрические функции углов φ и ψ (ср. ниже стр. 332). Приведенный вывод удобен тем, что пригоден для любых углов α, β, φ, ψ независимо от их величин и знаков.

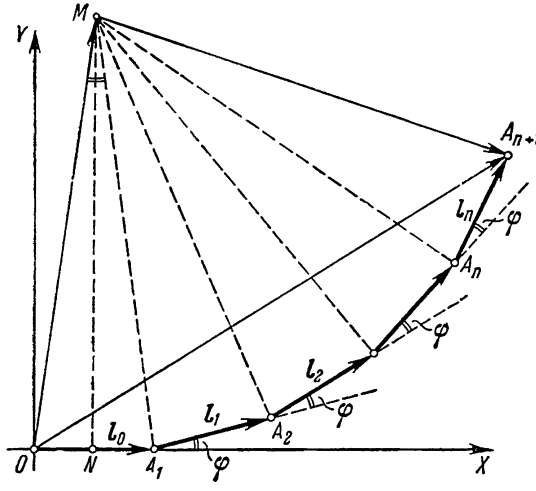


Рис. 50.

Задача 6. Вычислить суммы

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi, \tag{43а}$$

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots+\sin n\varphi. \tag{43б}$$

Решение. Построим ломаную $OA_1A_2\ldots A_{n+1}$, звенья которой имеют длину 1, а внешние углы равны φ (рис. 50) Далее, возьмем систему координат с началом O и осью OX, направленной по вектору $\overrightarrow{OA_1}$, и обозначим:

$$l_0=\overrightarrow{OA_1},\quad l_1=\overrightarrow{A_1A_2},\quad l_2=\overrightarrow{A_2A_3},\quad \ldots,\quad l_n=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}.$$

Тогда вектор l_0 образует с осью OX угол, равный нулю, вектор l_1 образует угол φ, вектор l_2 угол 2φ и т. д., вектор l_n — угол $n\varphi$.

Следовательно,

вектор l_0 имеет координаты $(\cos 0, \sin 0)$ (т. е. 1 и 0),

« l_1 « « $(\cos\varphi, \sin\varphi)$,

« l_2 « « $(\cos 2\varphi, \sin 2\varphi)$,

. . . . . .

« l_n « « $(\cos n\varphi, \sin n\varphi)$.

Из этого вытекает, что вектор $l_0+l_1+l_2+\ldots+l_n$ имеет абсциссу (43а) и ординату (43б). Но $l_0+l_1+\ldots+l_n=\overline{OA_1}+\overline{A_1A_2}+\ldots+\overline{A_nA_{n+1}}=\overline{OA}_{n+1}$, и нам остается вычислить координаты x, y вектора $\overline{OA}_{n+1}$—это и будут искомые суммы (43а) и (43б).

Пусть M—центр окружности, проходящей через вершины ломаной $OA_1A_2\ldots A_{n+1}$. Опустив из точки M перпендикуляр MN на отрезок OA_1, мы найдем

$$ON=\frac{1}{2},\quad \angle OMN=\frac{1}{2}\angle OMA_1=\frac{1}{2}\varphi,$$

и потому

$$OM=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Вектор $\overline{OM}$ образует с осью OX угол $\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}$ и потому имеет координаты

$$x=OM\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=OM\cdot\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2},$$

$$y=OM\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)=OM\cdot\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Далее, каждый из углов A_1MA_2, A_2MA_3, ... равен φ, поэтому $\angle A_1MA_{n+1}=n\varphi$. Следовательно, $\angle NMA_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi$, и, значит, вектор $\overline{MA}_{n+1}$ образует с осью OX угол $\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{2}$. А так как $MA_{n+1}=OM$, то вектор $\overline{MA}_{n+1}$ имеет координаты

$$x=OM\cdot\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{2}\right]=OM\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$y=OM\cdot\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\frac{\pi}{2}\right]=-OM\cdot\cos\left(n+\frac{1}{2}\varphi\right)=-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Наконец, вектор $\overline{OA}_{n+1}=\overline{OM}+\overline{MA}_{n+1}$ имеет координаты

$$x=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{\varphi}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$y=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}-\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Это и есть искомые значения сумм (43а) и (43б).

3.6. Определение и свойства скалярного произведения. Пусть теперь $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два произвольных вектора. *Скалярным произведением* вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ называется число $a\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$; оно обозначается символом $\boldsymbol{ab}$:

$$\boldsymbol{ab}=a\cdot\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}. \tag{44}$$

Это определение теряет смысл, если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, так как в этом случае направление вектора $\boldsymbol{a}$ не определено; однако в этом случае $a=0$, и скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ считается равным нулю.

Из формулы (34) следует, что скалярное произведение можно также определить формулой

$$\boldsymbol{ab}=ab\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \tag{45}$$

где через $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ обозначен угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, то скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ принимает вид $\boldsymbol{aa}$; его называют *скалярным квадратом* вектора $\boldsymbol{a}$ и обозначают также символом $\boldsymbol{a}^2$. Из (45) вытекает, что *скалярный квадрат вектора* $\boldsymbol{a}$ *равен квадрату его длины:*

$$\boldsymbol{a}^2=a^2. \tag{46}$$

Далее, из (45) непосредственно следует, что *скалярное умножение коммутативно (переместительно)*:

$$\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}. \tag{47}$$

Наконец, из (44) легко вытекает также *дистрибутивность (распределительность)* скалярного умножения:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac} \tag{48}$$

и его *ассоциативность (сочетательность)* по отношению к умножению вектора на число:

$$(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{ab})=\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b}). \tag{49}$$

В самом деле, в силу (29) и (30) мы имеем

$$\begin{aligned} a(b+c) &= a\cdot \mathrm{пр}_a(b+c) = a\cdot(\mathrm{пр}_a b + \mathrm{пр}_a c) = \\ &= a\cdot \mathrm{пр}_a b + a\,\mathrm{пр}_a c = ab + ac; \\ a(\lambda b) &= a\cdot \mathrm{пр}_a \lambda b = a(\lambda\cdot \mathrm{пр}_a b) = \lambda\cdot(a\cdot \mathrm{пр}_a b) = \lambda(ab). \end{aligned}$$

Соотношения (46)—(49) выражают свойства скалярного умножения. Мы добавим к ним еще одно свойство: *если* a *и* b *— отличные от нуля векторы, то равенство* $ab=0$ *имеет место тогда и только тогда, когда векторы* a *и* b *перпендикулярны между собой.* Это непосредственно вытекает из формулы (45).

Свойства (47)—(49) скалярного умножения очень похожи на хорошо знакомые правила действий с числами. Из этих свойств вытекает, что действия над векторами во многих случаях можно производить в точности так же, как и действия над числами. Например,

$$\begin{aligned} (2a+b)(3c-d) &= (2a+b)(3c) + (2a+b)(-d) = \\ &= 6ac + 3bc - 2ad - bd, \\ (a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2, \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

и т. д. В этом, собственно говоря, и заключается ценность скалярного произведения: с одной стороны, оно геометрически интересно, так как позволяет находить длины отрезков (см. (46)) и величины углов (см. (45) и указанное выше условие перпендикулярности); с другой стороны, скалярное произведение алгебраически удобно, так как вычисления со скалярными произведениями производятся по правилам, хорошо известным из арифметики и алгебры.

Имеются, однако, и серьезные различия между «арифметикой векторов» и привычной нам арифметикой чисел. Заметим прежде всего, что скалярное произведение двух векторов является не вектором, а объектом другой природы — числом («скаляром»). Это обстоятельство делает невозможным постановку вопроса об определении «векторного деления» — символу $\frac{a}{b}$ нельзя приписать никакого смысла [1]). Это же обстоятельство мешает рассматривать произведения трех векторов; например, формула

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

---

[1]) Можно, правда, определить «частное $\frac{\alpha}{a}$ от деления числа α на вектор a» как такой вектор b, что скалярное произведение ab равно α; однако и эта операция «деления числа на вектор» не заслуживает серьезного внимания (в первую очередь в силу неоднозначности определяемого таким образом вектора b).

на область векторов никак не переносится. Далее, в то время как в обычной арифметике произведение двух чисел равно нулю только в том случае, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, в «арифметике векторов» дело обстоит совсем не так: равенство $\boldsymbol{ab}=0$ может выполняться и при $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ (если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны). Последнее замечание влечет за собой еще одно существенное различие между «арифметикой векторов» и обычной арифметикой: *векторные равенства нельзя сокращать на отличный от нуля множитель*. В самом деле, если из соотношения $ac=bc$ для чисел a, b и $c\neq 0$ вытекает, что $a=b$, то из равенства

$$\boldsymbol{ac}=\boldsymbol{bc} \qquad (\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0})$$

вытекает лишь, что $\boldsymbol{ac}-\boldsymbol{bc}=0$ или $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=0$ и, следовательно, вектор $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{c}$.

Приведем еще формулу вычисления скалярного произведения при помощи координат.

Пусть в некоторой системе координат XOY вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты (x_1, y_1), а вектор $\boldsymbol{b}$ — координаты (x_2, y_2). Тогда в силу (25)

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j},$$

где $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ — единичные векторы, направленные по осям координат. Но $\boldsymbol{i}^2=1$, $\boldsymbol{j}^2=1$, $\boldsymbol{ij}=0$, откуда следует

$$\boldsymbol{ab}=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j})=x_1x_2\boldsymbol{i}^2+(x_1y_2+x_2y_1)\boldsymbol{ij}+y_1y_2\boldsymbol{j}^2=$$
$$=x_1x_2+y_1y_2.$$

Итак, *скалярное произведение двух векторов на плоскости можно вычислять по формуле*

$$\boldsymbol{ab}=x_1x_2+y_1y_2, \tag{50}$$

где (x_1, y_1) — *координаты вектора* $\boldsymbol{a}$, *а* (x_2, y_2) — *координаты вектора* $\boldsymbol{b}$.

Совершенно аналогично устанавливается, что *скалярное произведение двух векторов в пространстве можно вычислять по формуле*

$$\boldsymbol{ab}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, \tag{50а}$$

где (x_1, y_1, z_1) — *координаты вектора* $\boldsymbol{a}$, *а* (x_2, y_2, z_2) — *координаты вектора* $\boldsymbol{b}$.

Из формул (50), (50а) (которые можно, если угодно, причять за определение скалярного произведения) нетрудно вывести вновь все его свойства. Так, из них сразу следует, очевидно, что $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$; кроме того, если $\boldsymbol{a}=(x_1, y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2, y_2)$, $\boldsymbol{c}=(x_3, y_3)$ (мы здесь огра-

ничиваемся лишь несколько более простым случаем плоскости), то

$$\boldsymbol{a}(\lambda\boldsymbol{b}) = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 = \lambda(x_1 x_2 + y_1 y_2) = \lambda(\boldsymbol{ab}),$$
$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = x_1(x_2+x_3) + y_1(y_2+y_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + y_1y_2 + y_1y_3 =$$
$$= (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$$

и т. д. (ср. формулы (49) и (48), стр. 328).

3.7. Примеры и задачи. Рассмотрим теперь некоторые задачи, решаемые с применением скалярного произведения.

Пример 3. *Доказать, что для любого треугольника имеет место формула*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

(теорема косинусов).

Решение. Положим

$$\boldsymbol{a} = \overline{CB}, \quad \boldsymbol{b} = \overline{CA}, \quad \boldsymbol{c} = \overline{AB}$$

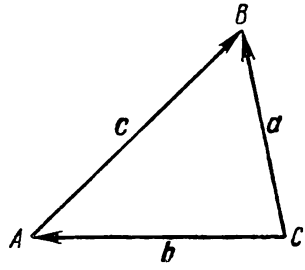


Рис. 51.

(рис. 51). Тогда $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ и мы имеем (учитывая, что $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \angle C$

$$\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{c}^2 = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 - 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 = a^2 - 2ab\cos C + b^2.$$

Пример 4. *Доказать, что для любого треугольника имеют место формулы*

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

(теорема синусов).

Решение. Сохраним те же обозначения, что и в предыдущей задаче (рис. 51). Тогда

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c};$$

умножая обе части этого равенства на вектор $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$, имеем

$$\boldsymbol{ab} - \boldsymbol{ac} = \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{c}^2,$$

или

$$ab\cos C - ac\cos B = b^2 - c^2, \quad \text{т. е.} \quad a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2.$$

Подставляя сюда выражение для a, даваемое формулой проекций (см. пример 1, стр. 324) имеем

$$(b\cos C + c\cos B)(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2,$$

или

$$b^2\cos^2 C - c^2\cos^2 B = b^2 - c^2.$$

Поскольку $1 - \cos^2 C = \sin^2 C$, $1 - \cos^2 B = \sin^2 B$, мы получаем отсюда

$$b^2\sin^2 C = c^2\sin^2 B.$$

Но так как b, c, $\sin C$, $\sin B$ положительны, то из последнего равенства следует, что

$$b \sin C = c \sin B,$$

или

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}.$$

Значит, в самом деле,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Пример 5. *Выразить* $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ *через тригонометрические функции углов* α *и* β.

Решение. Пусть $\boldsymbol{l}_1$ — единичный вектор, образующий с осью OX угол α, а $\boldsymbol{l}_2$ — единичный вектор, образующий с осью OX угол β. Тогда векторы $\boldsymbol{l}_1$ и $\boldsymbol{l}_2$ образуют между собой угол $\alpha - \beta$, и потому (см. (45))

$$\boldsymbol{l}_1 \boldsymbol{l}_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos(\alpha - \beta).$$

С другой стороны, вектор $\boldsymbol{l}_1$ имеет координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а вектор $\boldsymbol{l}_2$ имеет координаты $(\cos\beta, \sin\beta)$. Следовательно, по формуле (50)

$$\boldsymbol{l}_1 \boldsymbol{l}_2 = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

Сравнивая два найденных выражения для $\boldsymbol{l}_1 \boldsymbol{l}_2$, получаем

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

Отсюда с помощью формул приведения находятся и остальные формулы.

Задача 7. *Доказать, что если в произвольном «четырехвершиннике» ABCD противоположные «стороны» AB и CD, AD и BC взаимно перпендикулярны, то перпендикулярны и «диагонали» AC и BD.*

Здесь мы снова имеем две совершенно разные задачи в зависимости от того, лежат ли точки A, B, C, D в одной плоскости или они расположены в пространстве. В первом случае наше утверждение гласит: если $AB \perp CD$, $AD \perp BC$, т. е. CD и AD суть высоты треугольника ABC (рис. 52), то $BD \perp AC$ есть третья высота треугольника; другими словами, мы приходим к теореме о том, что *три высоты треугольника пересекаются в одной точке.* Во втором случае мы утверждаем, что *если противоположные ребра AB и CD, AD и BC*

треугольной пирамиды (тетраэдра) ABCD перпендикулярны между собой, то этим свойством обладает и третья пара противоположных ребер AC и BD (рис. 53).

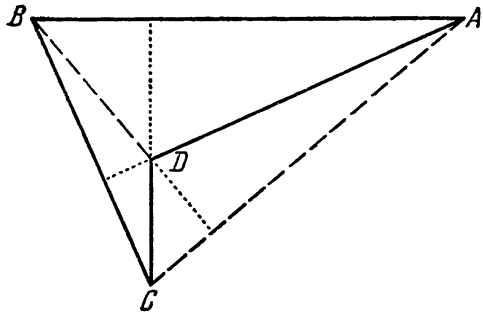


Рис. 52.

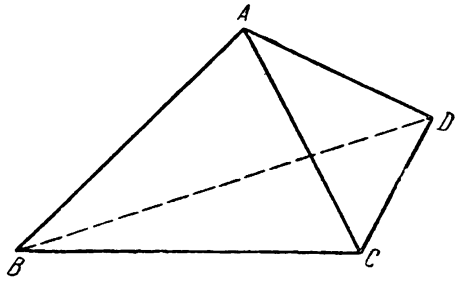


Рис. 53.

Решение. Пусть Q — произвольная точка. По условию имеем $\overline{AB}\cdot\overline{CD}=0$ или $(\overline{QB}-\overline{QA})(\overline{QD}-\overline{QC})=0$, т. е.

$$\overline{QB}\cdot\overline{QD}-\overline{QB}\cdot\overline{QC}-\overline{QA}\cdot\overline{QD}+\overline{QA}\cdot\overline{QC}=0 \qquad (51)$$

и

$$\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0, \quad \text{или} \quad (\overline{QD}-\overline{QA})(\overline{QC}-\overline{QB})=0,$$

т. е.

$$\overline{QD}\cdot\overline{QC}-\overline{QD}\cdot\overline{QB}-\overline{QA}\cdot\overline{QC}+\overline{QA}\cdot\overline{QB}=0. \qquad (52)$$

Сложив равенства (51) и (52), получаем

$$\overline{QC}\cdot\overline{QD}+\overline{QA}\cdot\overline{QB}-\overline{QC}\cdot\overline{QB}-\overline{QA}\cdot\overline{QD}=0,$$

или

$$(\overline{QC}-\overline{QA})(\overline{QD}-\overline{QB})=0,$$

или, наконец,

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=0,$$

что и доказывает теорему.

Задача 8. *Доказать, что сумма квадратов «диагоналей» AC и BD произвольного «четырехвершинника» ABCD равна сумме квадратов его «сторон» AB, BC, CD и DA, уменьшенной на учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины E и F «диагоналей», т. е.*

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2-4EF^2. \qquad (53)$$

Другими словами:

а) *Если стороны AB, BC, CD и DA (плоского) четырехугольника равны a, b, c и d, а диагонали AC и BD равны e и f, то*

$$a^2+b^2+c^2+d^2=e^2+f^2+4EF^2,$$

где EF — отрезок, соединяющий середины диагоналей четырехугольника (рис. 54; ср. с известной теоремой о том, что *в параллелограмме сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей*).

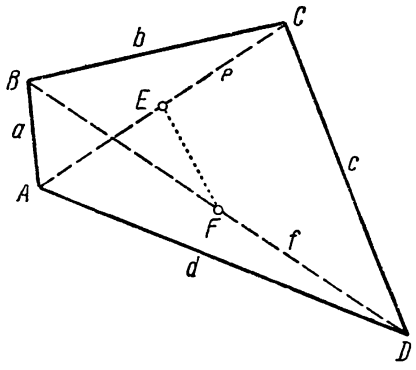


Рис. 54.

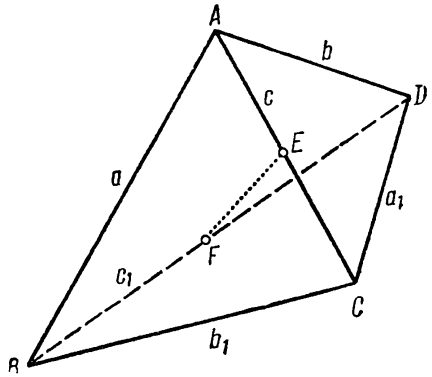


Рис. 55.

б) *Если противоположные ребра AB и CD, AD и BC, AC и BD треугольной пирамиды* (*тетраэдра*) $ABCD$ *равны* a *и* a_1, b *и* b_1, c *и* c_1, *то отрезок EF, соединяющий середины ребер AC и BD* (рис. 55), *определяется из формулы*

$$4EF^2 = a^2 + a_1^2 + b^2 + b_1^2 - c^2 - c_1^2.$$

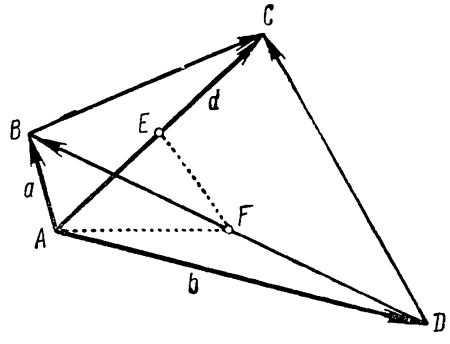


Рис. 56.

Решение. Положим

$$\overline{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overline{AD} = \boldsymbol{b}, \quad \overline{AC} = \boldsymbol{d}$$

(рис. 56). Тогда

$$\overline{BC} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a}, \quad \overline{DC} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{b},$$

$$\overline{DB} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b};$$

далее

$$\overline{AE} = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}, \quad \overline{AF} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}),$$

и, следовательно, получаем, что

$$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}).$$

Теперь равенство (53) можно переписать в виде

$$\boldsymbol{d}^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{a})^2 + (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{b})^2 + \boldsymbol{b}^2 - 4\left(\frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}}{2}\right)^2,$$

и для его доказательства достаточно раскрыть скобки в левой и правой частях написанного векторного равенства.

Задача 9. *Пусть $ABCD$ — произвольный «четырехвершинник»; KL и MN — его «средние линии», соединяющие середины «сторон» AB и CD, AD и BC; φ — угол между «диагоналями» AC и BD. Доказать, что*

$$(AB^2+CD^2)-(AD^2+BC^2)=2(KL^2-MN^2)=2AC\cdot BD\cdot\cos\varphi.$$

Другими словами:

а) *Если стороны AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ равны a, b, c и d, диагонали AC и BD равны e и f и угол между диагоналями есть φ, то*

$$a^2-b^2+c^2-d^2=2ef\cos\varphi=$$
$$=2(KL^2-MN^2),$$

где KL и MN — средние линии четырехугольника (рис. 57). Отсюда, в частности, вытекает, что *следующие три свойства четырехугольника $ABCD$ эквивалентны между собой* (т. е. из выполнения любого из них следует, что выполнены и два других свойства):

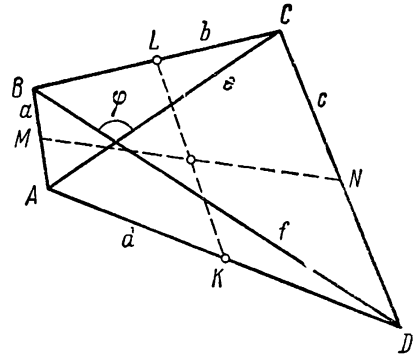


Рис. 57.

1) *диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны;*

2) *средние линии четырехугольника равны между собой;*

3) *сумма квадратов двух противоположных сторон четырехугольника равна сумме квадратов двух других его сторон.*

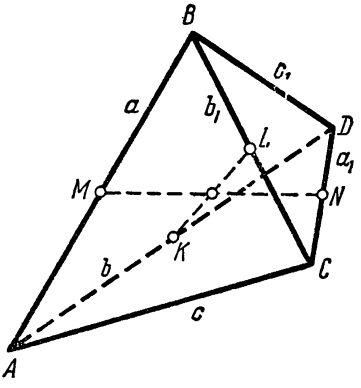


Рис. 58.

б) *Если противоположные ребра AB и CD, AD и BC, AC и BD треугольной пирамиды (тетраэдра) равны a и a_1, b и b_1, c и c_1, а угол между ребрами AC и BD равен φ, то*

$$(a^2+a_1^2)-(b^2+b_1^2)=2cc_1\cos\varphi=$$
$$=2(KL^2-MN^2),$$

где MN и KL — отрезки, соединяющие середины противоположных ребер AB и CD, AD и BC (рис. 58).

Из этой теоремы, в частности, вытекает эквивалентность следующих трех свойств тетраэдра $ABCD$:

1) *противоположные ребра AC и BD перпендикулярны между собой;*

2) *отрезки MN и KL, соединяющие середины ребер AB и CD, AD и BC, равны между собой;*

3) *суммы квадратов противоположных ребер AC и BD, AD и BC равны между собой.*

Решение. Сохраним обозначения, введенные при решении предыдущей задачи. Мы имеем (см. рис. 56, 57)

$$\overline{AK}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b},\quad \overline{AL}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{d}),\quad \overline{KL}=\overline{AL}-\overline{AK}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}),$$

$$\overline{AM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a},\quad \overline{AN}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}),\quad \overline{MN}=\overline{AN}-\overline{AM}=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}).$$

Следовательно,

$$(AB^2+CD^2)-(AD^2+BC^2)=[\boldsymbol{a}^2+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})^2]-[\boldsymbol{b}^2+(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})^2]=$$
$$=2\boldsymbol{a}\boldsymbol{d}-2\boldsymbol{b}\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\overline{AC}\cdot\overline{DB};$$

$$2(KL^2-MN^2)=2\left[\left(\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}}{2}\right)^2-\left(\frac{-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}}{2}\right)^2\right]=2\boldsymbol{a}\boldsymbol{d}-2\boldsymbol{b}\boldsymbol{d}=$$
$$=2\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2\overline{AC}\cdot\overline{DB}.$$

Остается применить формулу (45).

3.8. Единственность скалярного произведения. В заключение этого параграфа остановимся еще на следующем вопросе. Определения (44) или (45) скалярного произведения могут показаться довольно случайными: естественность их не мотивирована никакими достаточно убедительными соображениями. Впрочем, простые свойства (47), (48), (49) скалярного произведения убеждают нас в целесообразности изучения этой операции. Однако заранее не ясно, не существует ли других столь же «хороших» «произведений векторов», т. е. других способов сопоставить с двумя векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ число $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ (здесь кружочек символизирует неизвестную нам пока операцию «умножения векторов»), с тем чтобы выполнялись аналогичные (47)—(49) условия:

$$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\circ\boldsymbol{a}; \tag{54}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\circ\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\circ(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}); \tag{55}$$

$$\boldsymbol{a}\circ(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{c}. \tag{56}$$

Естественно, что кроме правил (54)—(56) желательно потребовать еще, чтобы число $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ имело геометрический смысл т. е. обладало тем свойством, что *если пара векторов* $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$ *и* $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$ *«равна» паре векторов* $\overline{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$ и $\overline{OB_1}=\boldsymbol{b}_1$ (т. е. может быть переведена в последнюю движением)[1], *то*

$$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1\circ\boldsymbol{b}_1. \tag{57}$$

Покажем, что в случае геометрии в пространстве уже условия (55), (56) и (57) почти однозначно приводят к скалярному произведению векторов. На плоскости же дело обстоит иным образом: здесь, для того чтобы выделить скалярное произведение векторов, существенно необходимы все четыре условия (54)—(57). В следующем параграфе мы рассмотрим отличное от скалярного «произведение» векторов плоскости, удовлетворяющее условиям (55)—(57), но не условию (54).

---

[1]) Ср. статью «Геометрические преобразования», п. 6.1.

Ясно, прежде всего, что если $a=aa^0$, $b=bb^0$, где векторы a^0 и b^0 единичные (имеют длину 1), то в силу (55)

$$a \circ b = (aa^0) \circ (bb^0) = ab\,(a^0 \circ b^0). \tag{58}$$

Таким образом, достаточно определить произведение единичных векторов. Далее, если векторы a^0 и c^0 единичные и взаимно перпендикулярные и мы рассматриваем геометрию в пространстве, то пара векторов $\overline{OA}=a^0$, $\overline{OC}=c^0$ «равна» паре векторов $\overline{OA_1}=-a^0$,

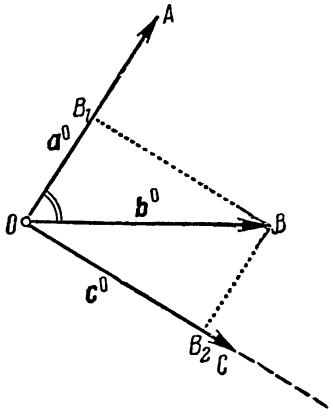


Рис. 59.

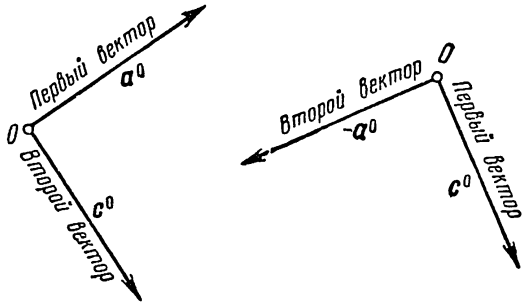


Рис. 60.

$\overline{OC_1}=c^0$ (одна из них переходит во вторую при вращении вокруг $\overline{OC}$ на угол 180°). Поэтому в этом случае в силу (57) и (55)

$$a^0 \circ c^0 = (-a^0) \circ c^0 = -(a^0 \circ c^0),$$

и, следовательно,

$$a^0 \circ c^0 = 0. \tag{59}$$

Кроме того, в силу того же условия (57) «квадрат» $a^0 \circ a^0$ любого единичного вектора a^0 будет иметь одно и то же значение δ:

$$a^0 \circ a^0 = \delta. \tag{60}$$

Пусть теперь $\overline{OA}=a^0$ и $\overline{OB}=b^0$—два произвольных единичных вектора, угол между которыми равен $\angle\,(a^0, b^0)$ (рис. 59). Если B_1 и B_2—проекции точки B на прямую OA и на перпендикулярную ей (и лежащую в плоскости OAB) прямую OC, то, очевидно,

$$b^0 = \overline{OB_1} + \overline{OB_2} = \cos\angle\,(a^0, b^0)\cdot a^0 + \sin\angle\,(a^0, b^0)\cdot c^0,$$

где c^0—единичный вектор направления OC. В силу (56), (55), (60) и (59) получаем

$$a^0 \circ b^0 = a^0 \circ [\cos\angle\,(a^0, b^0)\cdot a^0 + \sin\angle\,(a^0, b^0)\cdot c^0] =$$
$$= \cos\angle\,(a^0, b^0)\cdot(a^0 \circ a^0) + \sin\angle\,(a^0, b^0)\cdot(a^0 \circ c^0) = \delta\cos\angle\,(a^0, b^0).$$

Учитывая еще (58), получаем для произвольных векторов a и b

$$a \circ b = \delta \cdot ab\cos\angle\,(a, b).$$

Таким образом, мы пришли к выражению, отличающемуся от скалярного произведения (45) двух векторов лишь произвольным (но фиксированным!) множителем δ.

В нашем рассуждении мы нигде не использовали равенства (54). Однако если рассматриваются векторы не в пространстве, а на плоскости, и соответственно этому «равными» считаются лишь пары векторов, переводимые одна в другую движением в плоскости, то заключение о том, что пары векторов a^0, c^0 и $-a^0$, c^0 (где $a^0=c^0=1$, $a^0 \perp c^0$) «равны» между собой, будет уже неверно. В этом случае «равны» лишь пары a^0, c^0 и c^0, $-a^0$ (они получаются одна из другой вращением на 90° вокруг общего начала O векторов; см. рис. 60). Отсюда следует, что

$$a^0 \circ c^0 = c^0 \circ (-a^0) = -(c^0 \circ a^0),$$

и если имеет место также условие (54), то снова получаем

$$a^0 \circ c^0 = -(a^0 \circ c^0), \quad \text{т. е.} \quad a^0 \circ c^0 = 0.$$

Если же не требовать выполнения условия (54), то доказать равенство (59) нельзя (см. ниже, стр. 349—350).

§ 4. Косое произведение векторов плоскости

4.1. Ориентированные площади и косое произведение векторов. До сих пор мы все время рассматривали одновременно векторы на плоскости и векторы в пространстве; различия между этими двумя случаями были для нас весьма несущественными. Далее, однако, мы будем рассматривать геометрию на плоскости и геометрию в пространстве раздельно, поскольку в разбираемых здесь вопросах различие между той и другой сказывается очень сильно. В этом параграфе мы будем говорить лишь о *векторах на плоскости.*

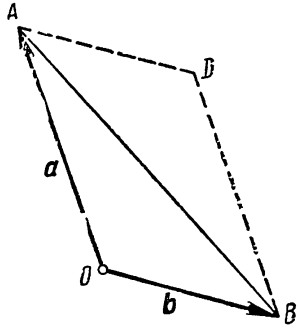


Рис. 61.

Вспомним определение скалярного произведения. Скалярное произведение ab двух векторов a и b есть число, сопоставляемое определенным образом с этими двумя векторами. Геометрический смысл этого числа не слишком прост — он дается формулой (45) или почти столь же искусственной формулой (44). Ценность скалярного произведения (и уместность употребления в применении к этому числу слова «произведение», обычно имеющего совсем другой смысл) определяется лишь свойствами (47), (48), (49) скалярного произведения, весьма похожими на привычные свойства умножения чисел. Здесь мы определим еще одно «произведение векторов», обладающее почти столь же простыми свойствами.

Ясно, что сопоставить число с двумя векторами можно весьма разнообразными способами.

Так, например, можно объявить этим числом площадь построенного на векторах a и b треугольника OAB или параллелограмма $OADB$ (рис. 61). Однако предложение назвать площадь S_{OADB} новым

«произведением» векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ представляется с первого взгляда мало обоснованным.

Проверим все же, не обладает ли величина S_{OADB} (обозначим ее, скажем, через $S_{a,\,b}$) свойствами, аналогичными свойствам (47)—(49) скалярного произведения. Ясно, прежде всего, что

$$S_{a,\,b} = S_{b,\,a}. \tag{61}$$

Но уже простое свойство (49) скалярного произведения переносится на величину $S_{a,\,b}$ лишь в том случае, если множитель λ является положительным

$$S_{\lambda a,\,b} = S_{a,\,\lambda b} = \lambda S_{a,\,b} \quad \text{при} \quad \lambda > 0, \quad \text{но} \quad S_{\lambda a,\,b} = S_{a,\,\lambda b} = \\ = |\lambda|\, S_{a,\,b} = -\lambda S_{a,\,b} \quad \text{при} \quad \lambda < 0 \tag{62}$$

(см. рис. 62).

Для того чтобы исправить это положение, условимся рассматривать площадь ориентированного параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. *считать площадь OADB положительной, если вектор* $\boldsymbol{b}$ *расположен слева от вектора* $\boldsymbol{a}$ (при этом

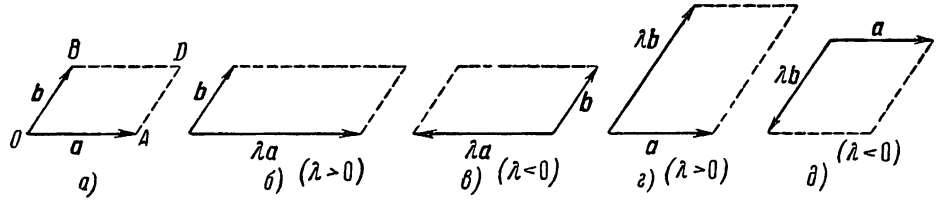


Рис. 62.

мы смотрим в направлении вектора $\boldsymbol{a}$), *и отрицательной в противном случае*. Другими словами, можно сказать, что площадь *OADB*

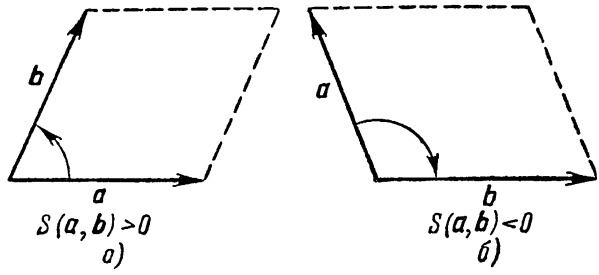


Рис. 63.

считается положительной, если направление вектора $\boldsymbol{a}$ можно совместить с направлением вектора $\boldsymbol{b}$ вращением вектора $\boldsymbol{a}$ против часовой стрелки на угол, меньший 180°, (рис. 63, *а*), и отрицательной, если направление вектора $\boldsymbol{a}$ переходит в направление вектора $\boldsymbol{b}$ при вращении вектора $\boldsymbol{a}$ по часовой стрелке на

угол, меньший 180° (рис. 63, *б*). Если, наконец, вектор $\boldsymbol{b}$ принадлежит той же прямой, что и $\boldsymbol{a}$, то площадь построенного на $\boldsymbol{a}$ и на $\boldsymbol{b}$ «параллелограмма» естественно считать равной нулю. Эту новую величину мы обозначим пока через $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

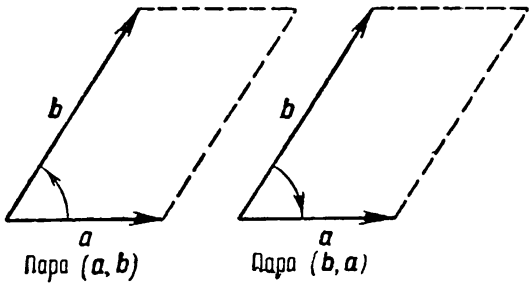


Рис. 64.

Нетрудно видеть, что для величины $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ уже имеет место правило, аналогичное свойству (49) скалярного произведения:

$$S(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = S(\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{b}) = \lambda S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \text{ при любом } \lambda \quad (63)$$

(ибо ориентация построенного на векторах $\lambda\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ или на векторах $\boldsymbol{a}$, $\lambda\boldsymbol{b}$ параллелограмма при $\lambda > 0$ будет совпадать с ориентацией исходного параллелограмма $OADB$, а при $\lambda < 0$ будет противоположна ей; см. рис. 62, *а*—*д*). Однако теперь уже простое правило (61) заменяется более сложным

$$S(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad (64)$$

(ибо построенные на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и на векторах $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}$ параллелограммы имеют противоположную ориентацию; см. рис. 64).

Обратимся теперь к свойству (48) скалярного произведения. Мы утверждаем, что аналогичное свойство имеет место и для величины $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

$$S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}). \quad (65)$$

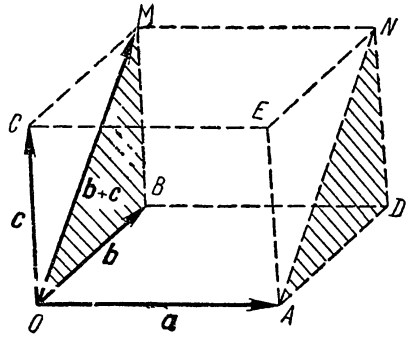


Рис. 65.

Полное доказательство этого равенства мы пока отложим; здесь же мы лишь проверим его для частного случая, когда все величины $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ и $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ положительны. В самом деле (рис. 65),

$$S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = S_{OADB} + S_{OAEC} = S_{OADB} + S_{BDNM} = S_{OADNMB} = S_{OANM} = S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

(ибо $S_{\Delta OBM} = S_{\Delta ADN}$, поскольку треугольники OBM и ADN равны).

Можно было бы доказать соотношение (65), рассмотрев аналогично случай, когда величины $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ и $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ имеют всевозможные знаки, но мы не будем этого делать, а приведем ниже совершенно другое доказательство.

Равенства (63), (64) и (65) уже дают основания для того, чтобы присвоить величине $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ название «произведения». Эту величину называют *косым произведением*[1]) векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначают через $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Равенства (64), (65) и (63) теперь можно переписать так:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}; \tag{66}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}; \tag{67}$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}). \tag{68}$$

Таким образом, косое произведение является *ассоциативным* по отношению к умножению вектора на число (см. (68)) *и дистрибутивным* относительно сложения векторов (см. (67)), но не коммутативным, а *антикоммутативным* (так выражают словами равенство (66)). Заметим также, что известная формула для площади параллелограмма и правило определения знака произведения $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ позволяют утверждать, что

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = ab \sin \angle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), \tag{69}$$

где под $\angle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ теперь надо понимать ориентированный угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. угол, знак которого определяется, как в тригонометрии (угол $\angle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \varphi$ положителен, если направление вектора $\boldsymbol{a}$ совмещается с направлением вектора $\boldsymbol{b}$ вращением на угол φ в направлении против часовой стрелки, и отрицательным, если вектор $\boldsymbol{a}$ принимает направление вектора $\boldsymbol{b}$ при вращении на угол φ по часовой стрелке). То обстоятельство, что в формуле (45) мы под $\angle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ понимали неориентированный угол между $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е. что в двух соседних формулах мы одним и тем же символом обозначаем разные величины, не должно нас смущать, ибо можно считать, что и в формуле (45) угол $\angle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ является ориентированным (ибо $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$).

Из формулы (69) вытекает, в частности, что *косое произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равно нулю в том и только в том случае, когда один из этих двух векторов нулевой (в этом случае о направлении этого вектора вообще не приходится говорить), или когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллельны (и, значит, угол φ равен* 0 *или* 180°). В частности, «косой квадрат» вектора всегда равен нулю:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0. \tag{70}$$

Это обстоятельство часто оказывается важным. Отметим еще следующее простое соотношение, связывающее скалярное и косое произведения двух векторов:

$$(\boldsymbol{ab})^2 + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 \boldsymbol{b}^2 \qquad (= a^2 b^2); \tag{71}$$

это соотношение сразу следует из формул (45) и (69).

Относящиеся к косому произведению правила (66)—(68) позволяют раскрывать скобки при косом умножении сложных комбинаций

[1]) В литературе употребляется также термин *псевдоскалярное произведение*.

векторов. Например,

$$(a+2b-3c)\times(2d-5e)=$$
$$=2a\times d-5a\times e+4b\times d-10b\times e-6c\times d+15c\times e.$$

Надо только иметь в виду, что замена свойства коммутативности умножения антикоммутативностью заставляет изменять знак каждый раз при изменении порядка перемножаемых векторов. Это приводит к своеобразному искажению знакомых из обычной алгебры формул:

$$(a-b)\times(a+b)=a\times a+a\times b-b\times a-b\times b=a\times b-b\times a=2a\times b$$

ибо $a\times a=b\times b=0$). Рис. 66 иллюстрирует эту последнюю формулу: площадь параллелограмма $OEFG$, построенного на диагоналях $\overline{BC}=a-b$ и $\overline{AD}=a+b$ параллелограмма $ABDC$ в два раза больше

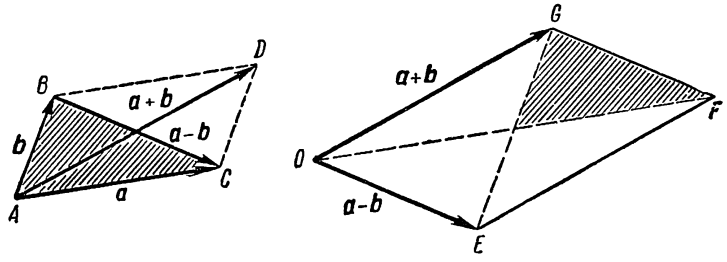


Рис. 66.

площади самого этого параллелограмма. Заметим еще, что условие равенства нулю косого произведения двух векторов влечет за собой недопустимость «сокращения» равенств, в которых разные векторы косо умножаются на один и тот же (векторный) множитель: из равенства

$$a\times c=b\times c$$

следует лишь, что $(a-b)\times c=0$, т. е. что либо один из «множителей» $a-b$ и c равен нулю, либо $a-b\|c$.

4.2. Аналогия между косым и скалярным произведениями. Известный параллелизм между косым и скалярным произведениями, выражающийся в близости формул (43) и (67), (49) и (68), а также то, что

если $ab=0$, то $a\perp b$ (и если $a\perp b$, то $ab=0$);
если $a\times b=0$, то $a\|b$ (и если $a\|b$, то $a\times b=0$),

влечет за собой известный «параллелизм» между понятиями перпендикулярности и параллельности, позволяющий в некоторых теоремах заменять слово «перпендикулярный» словом «параллельный» и наоборот без нарушения истинности теоремы. В качестве примера укажем следующее несложное предложение: *если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что прямые, проведенные через вершины треугольника ABC* $\overset{\text{перпендикулярно}}{\underset{\text{параллельно}}{}}$ *соответствующим сторонам треугольника $A_1B_1C_1$* (т. е. через вершину A перпендикулярно или параллельно стороне B_1C_1 и т. д.), *пересекаются в одной*

точке O, то и прямые, проведенные через вершины треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярно параллельно соответственно сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке O_1 (рис. 67, *а*, *б*). Для того чтобы не повторять два раза одни и те же выкладки, мы условимся обозначать через $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}$ скалярное или косое произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

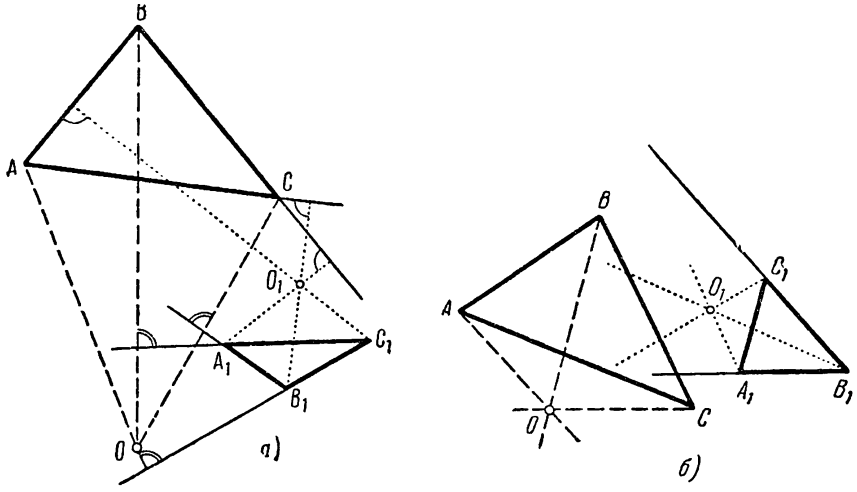


Рис. 67.

Обозначим $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overline{OC}=\boldsymbol{c}$; $\overline{OA_1}=\boldsymbol{a_1}$, $\overline{OB_1}=\boldsymbol{b_1}$, $\overline{OC_1}=\boldsymbol{c_1}$. В таком случае из условия теоремы следует

$$\boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{c_1}) = 0,$$

т. е.

$$\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c_1} \qquad \text{(а)}$$

и, аналогично,

$$\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{c_1} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a_1}, \qquad \text{(б)}$$

$$\boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{b_1}. \qquad \text{(в)}$$

Далее, пусть $\overline{OO_1}=\boldsymbol{r}$, где O_1 есть точка пересечения прямых, проведенных через вершины A_1 и B_1 перпендикулярно параллельно прямым BC, соответственно CA; нам надо доказать, что $CO_1 \perp\!\!\!\parallel AB$. Из определения точки O_1 имеем

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) \circ (\boldsymbol{a_1}-\boldsymbol{r}) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a_1} - \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{r} - \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{r}, \qquad \text{(г)}$$

$$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}) \circ (\boldsymbol{b_1}-\boldsymbol{r}) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{r}. \qquad \text{(д)}$$

Складывая равенства (г) и (д) и используя то, что в силу (а)—(в) $\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{c_1}$, $\boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{b_1}$, $\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b_1} = \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c_1}$, получаем $\boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{c_1} - \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c_1} = \boldsymbol{b} \circ \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{r}$, или $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \circ (\boldsymbol{c_1}-\boldsymbol{r}) = 0$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

4.3. Дальнейшие свойства косого произведения. Мы до сих пор не дали полного доказательства формулы (67). Для того чтобы сделать это, заметим, что косое произведение векторов можно свести к скалярному произведению (других!) векторов:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{b}, \qquad (72)$$

где вектор $[\boldsymbol{a}]$ [1]) получается из вектора $\boldsymbol{a}$ поворотом на 90° в положительном направлении (в направлении, обратном направлению вращения часовой стрелки; рис. 68). Это сразу следует из формул (45) и (69): в самом деле, очевидно, что если $[a]$ есть длина вектора $[\boldsymbol{a}]$, то

$$[a]=a \quad \text{и} \quad \angle([\boldsymbol{a}],\ \boldsymbol{b})=\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})-90^\circ,\quad \cos\angle([\boldsymbol{a}],\ \boldsymbol{b})=\sin\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}).$$

Отсюда следует, что

$$[\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{b}=[a]\,b\cos\angle([\boldsymbol{a}],\ \boldsymbol{b})=ab\sin\angle(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

А теперь имеем

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=[\boldsymbol{a}]\,(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=[\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},$$

что и требовалось доказать.

Выведем еще выражение для косого произведения двух векторов в координатах. Пусть $(x,\ y)$ и $(x_1,\ y_1)$ — координаты векторов $\boldsymbol{a}$

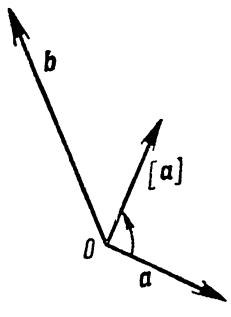


Рис. 68.

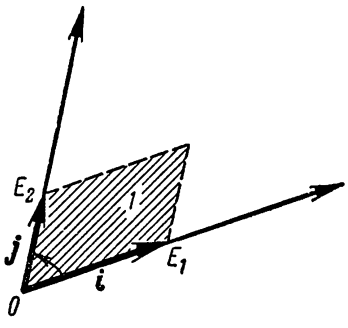


Рис. 69.

и $\boldsymbol{b}$; при этом единичные векторы $\boldsymbol{i}=\overline{OE}_1$ и $\boldsymbol{j}=\overline{OE}_2$, направленные по осям координат, выберем так, чтобы было

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=S(\overline{OE}_1,\ \overline{OE}_2)=1$$

(рис. 69; здесь у нас нет необходимости требовать, чтобы оси координат OE_1 и OE_2 были обязательно взаимно перпендикулярны или чтобы оба отрезка OE_1 и OE_2 были равны единице длины). В таком случае, очевидно, имеем

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\times(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j})=$$
$$=xx_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+xy_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+yx_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+yy_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}).$$

---

[1]) Обозначение $[\boldsymbol{a}]$ для вектора, получаемого из вектора $\boldsymbol{a}$ поворотом на 90°, с первого взгляда может показаться несколько вычурным; однако оно согласуется с обозначениями, введенными ниже, на стр. 354 и 379.

А так как $i \times i = j \times j = 0$ и согласно условию $i \times j = -j \times i = 1$, то получаем

$$a \times b = xy_1 - yx_1. \tag{73}$$

Формулу (73) можно также принять за определение косого произведения. Из нее сразу получаем:

$$b \times a = yx_1 - xy_1 = -a \times b,$$

$$a \times (b + c) = x(y_1 + y_2) - y(x_1 + x_2) = (xy_1 - yx_1) + (xy_2 - yx_2) = a \times b + a \times c$$

(здесь вектор c имеет координаты (x_2, y_2)) и

$$a \times (\lambda b) = x(\lambda y_1) - y(\lambda x_1) = \lambda(xy_1 - yx_1) = \lambda(a \times b)$$

(ср. выше формулы (66)—(68)).

Равенство (73) можно переписать так:

$$a \times b = \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix}; \tag{74}$$

в таком виде оно равносильно известному геометрическому истолкованию определителя второго порядка как площади ориентированного параллелограмма, построенного на векторах, координаты которых совпадают со столбцами определителя [1]). При этом свойства (66)—(68) можно будет истолковать как (хорошо известные) свойства определителей

$$a \times b = -b \times a, \quad \text{ибо} \quad \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & x \\ y_1 & y \end{vmatrix};$$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \quad \text{ибо} \quad \begin{vmatrix} x & x_1 + x_2 \\ y & y_1 + y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x_2 \\ y & y_2 \end{vmatrix};$$

$$(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b), \quad \text{ибо} \quad \begin{vmatrix} \lambda x & x_1 \\ \lambda y & y_1 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x & x_2 \\ y & y_1 \end{vmatrix}.$$

Наконец, формулу (71) можно истолковать как правило возведения определителя в квадрат [2]):

$$(a \times b)^2 = \begin{vmatrix} x & x_1 \\ y & y_1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & xx_1 + yy_1 \\ xx_1 + yy_1 & x_1^2 + y_1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2b^2 - (ab)^2. \tag{71'}$$

4.4. Примеры и задачи. Приведем теперь несколько примеров на применение косого произведения векторов.

---

[1]) См. по этому поводу § 1 статьи «Векторные пространства и линейные преобразования» в кн. II ЭЭМ.

[2]) Ибо $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 d_1 \\ c_2 d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_2 & a_1 d_1 + a_2 d_2 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 & b_1 d_1 + b_2 d_2 \end{vmatrix}$.

Пример 6. *Вычислить площадь треугольника ABC, зная длины всех его сторон.*

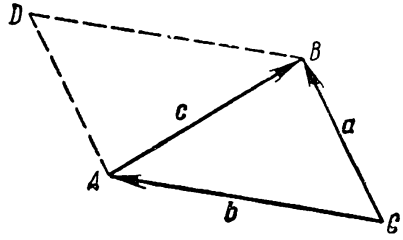


Рис. 70.

Решение. Обозначим $\overline{CB}=\boldsymbol{a}$, $\overline{CA}=\boldsymbol{b}$, $\overline{AB}=\boldsymbol{c}$. Очевидно, имеем (рис. 70)

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{CBDA}=\frac{1}{2}\cdot|\overline{CB}\times\overline{CA}|=\frac{1}{2}\cdot|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|, \tag{75}$$

откуда

$$(S_{\triangle ABC})^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2.$$

Но в силу формулы (71)

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=a^2b^2-(\boldsymbol{ab})^2,$$

и, значит,

$$(S_{\triangle ABC})^2=\frac{1}{4}[a^2b^2-(\boldsymbol{ab})^2].$$

С другой стороны,

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^2,$$

и, следовательно,

$$\boldsymbol{ab}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}(S_{\triangle ABC})^2&=\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]=\\&=\frac{1}{16}[2ab+(a^2+b^2-c^2)][2ab-(a^2+b^2-c^2)]=\\&=\frac{1}{16}[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]=\\&=\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a),\end{aligned}$$

или, если обозначить $a+b+c=2p$,

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Это — известная формула Герона для площади треугольника.

Задача 10. *Пусть L, M, N — такие точки сторон BC, CA, AB треугольника ABC, что*

$$BL:LC=\lambda_1,\quad CM:MA=\lambda_2,\quad AN:NB=\lambda_3$$

(рис. 71). *Известно, что площадь треугольника ABC равна S; требуется определить площадь треугольника LMN.*

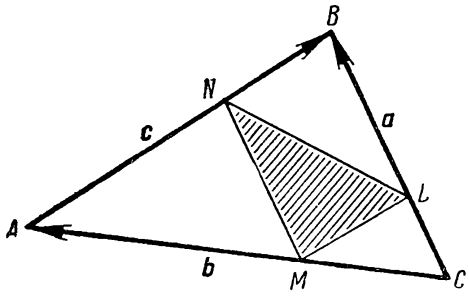


Рис. 71.

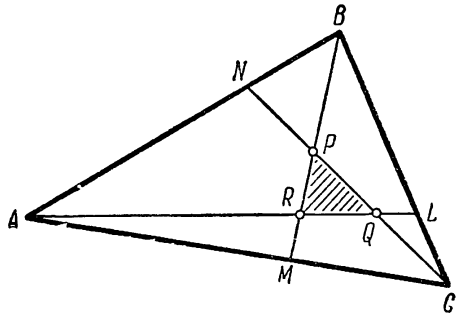


Рис. 72.

Решение. Сохраним те же обозначения, что и в примере 6. В силу формулы (23) из § 2 (стр. 311) имеем

$$\overline{CL}=\frac{a}{1+\lambda_1},\quad \overline{CM}=\frac{\lambda_2 b}{1+\lambda_2},\quad \overline{CN}=\frac{b+\lambda_3 a}{1+\lambda_3}.$$

Далее из формулы (75) выводим

$$S_{\triangle LMN}=\frac{1}{2}\cdot|\overline{NL}\times\overline{NM}|=\frac{1}{2}|(\overline{CL}-\overline{CN})\times(\overline{CM}-\overline{CN})|=$$
$$=\frac{1}{2}|(\overline{CL}\times\overline{CM})+(\overline{CM}\times\overline{CN})+(\overline{CN}\times\overline{CL})|. \qquad (76)$$

Следовательно,

$$S_{\triangle LMN}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{a}{1+\lambda_1}\times\frac{\lambda_2 b}{1+\lambda_2}\right)+\left(\frac{\lambda_2 b}{1+\lambda_2}\times\frac{b+\lambda_3 a}{1+\lambda_3}\right)+\left(\frac{b+\lambda_3 a}{1+\lambda_3}\times\frac{a}{1+\lambda_1}\right)\right|=$$
$$=\frac{1}{2}\left|\frac{\lambda_2}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}(a\times b)-\frac{\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}(a\times b)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(1+\lambda_3)(1+\lambda_1)}(a\times b)\right|=\left|\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\right|\cdot\left|\frac{1}{2}(a\times b)\right|.$$

Таким образом, окончательно получаем (см. ту же формулу (75))

$$S_{\triangle LMN}=\left|\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\right|\cdot S.$$

Особенно интересен тот случай, когда точки L, M и N лежат на одной прямой. Из последней формулы заключаем:

Точки L, M и N в том и только в том случае лежат на одной прямой, если

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1 \qquad (77)$$

(теорема Менелая).

Задача 11. *Сохраним те же обозначения, что и в предыдущей задаче и обозначим через P, Q, R точки попарного пересечения прямых AL, BM и CN* (рис. 72). *Площадь треугольника*

ABC по-прежнему обозначим через S; требуется определить площадь треугольника PQR.

Решение. Применим теорему Менелая (см. формулу (77)):

1) к точкам B, P, M, лежащим на сторонах треугольника ACN:

$$\frac{CP}{PN}\frac{NB}{BA}\frac{AM}{MC}=-1, \quad \frac{CP}{PN}=-\frac{CM}{MA}\frac{AB}{BN}=\lambda_2(1+\lambda_3);$$

2) к точкам A, Q, L, лежащим на сторонах треугольника BCN:

$$\frac{CQ}{QN}\frac{NA}{AB}\frac{BL}{LC}=-1, \quad \frac{CQ}{QN}=-\frac{CL}{LB}\frac{BA}{AN}=\frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{1+\lambda_3}{\lambda_3};$$

3) к точкам A, R, L, лежащим на сторонах треугольника BCM:

$$\frac{BR}{RM}\frac{MA}{AC}\frac{CL}{LB}=-1, \quad \frac{BR}{RM}=-\frac{BL}{LC}\frac{CA}{AM}=\lambda_1(1+\lambda_2).$$

Отсюда, используя формулу (23) и применяя прежние обозначения, получим:

$$\overline{CP}=\frac{\lambda_2(1+\lambda_3)}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\overline{CN}=\frac{\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_2\lambda_3\boldsymbol{a}}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3};$$

$$\overline{CQ}=\frac{\frac{1+\lambda_3}{\lambda_1\lambda_3}}{1+\frac{1+\lambda_3}{\lambda_1\lambda_3}}\overline{CN}=\frac{\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{a}}{1+\lambda_3+\lambda_1\lambda_3};$$

$$\overline{CR}=\frac{\overline{CB}+\lambda_1(1+\lambda_2)\overline{CM}}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}=\frac{\boldsymbol{a}+\lambda_1\lambda_2\boldsymbol{b}}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}.$$

Наконец, из формулы (75) имеем (ср. формулу (76))

$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\left|(\overline{CP}\times\overline{CQ})+(\overline{CQ}\times\overline{CR})+(\overline{CR}\times\overline{CP})\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_2\lambda_3\boldsymbol{a}}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\times\frac{\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{a}}{1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}\right)+\left(\frac{\boldsymbol{b}+\lambda_3\boldsymbol{a}}{1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}\times\frac{\boldsymbol{a}+\lambda_1\lambda_2\boldsymbol{b}}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\boldsymbol{a}+\lambda_1\lambda_2\boldsymbol{b}}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}\times\frac{\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_2\lambda_3\boldsymbol{a}}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\right)\right|=$$

$$=\left|\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3-1}{(1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)}+\frac{\lambda_2(1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)}{(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)}\right|\cdot\left|\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\right|,$$

или, окончательно,

$$S_{\triangle PQR}=\left|\frac{(1-\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2}{(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)(1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}\right|S.$$

Особенно интересен тот случай, когда прямые AL, BM и CN пересекаются в одной точке. Из последней формулы следует:

Прямые AL, BM и CN пересекаются в одной точке в том и только в том случае, если

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 \tag{78}$$

(теорема Чевы)[1]).

4.5. Вопрос о единственности косого произведения. В конце предыдущего параграфа мы видели, что скалярное произведение векторов плоскости однозначно определяется условиями (54), (55), (56) и еще одним естественным требованием (57), заключающимся в том, что две «равные» (т. е. переводимые одна в другую движением) пары векторов должны иметь одинаковое «произведение». В этом параграфе мы отказались от условия (54) и пришли к косому произведению векторов, коренным образом отличающемуся от скалярного произведения по своим свойствам. Естественно, однако, поставить вопрос о том, нельзя ли найти иные «произведения» векторов плоскости, обладающие столь же простыми свойствами как скалярное и косое произведения, но отличные от них обоих?

Нетрудно показать, что всякое «произведение» $\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}$ векторов плоскости, обладающее перечисленными в конце предыдущего параграфа (стр. 336) свойствами

$$(\lambda\boldsymbol{a})\circ\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\circ(\lambda\boldsymbol{b}) = \lambda(\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b}), \tag{55}$$

$$\boldsymbol{a}\circ(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{c} \tag{56}$$

и свойством

$$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1\circ\boldsymbol{b}_1, \tag{57}$$

где пары векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ «равны» друг другу, сводится к скалярному произведению и косому произведению. В самом деле, из условия (55) по-прежнему следует

$$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} = ab\cdot(\boldsymbol{a}^0\circ\boldsymbol{b}^0), \tag{58}$$

где векторы $\boldsymbol{a}^0$ и $\boldsymbol{b}^0$ единичные и

$$\boldsymbol{a}^0\circ\boldsymbol{a}^0 = \delta = \text{const}. \tag{60}$$

Кроме того, если $\boldsymbol{a}^0$ и $\boldsymbol{c}^0$ — два таких единичных и взаимно перпендикулярных вектора, что $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{c}^0) = +90°$, то произведение $\boldsymbol{a}^0\circ\boldsymbol{c}^0$ будет иметь некоторое постоянное (т. е. одно и то же для всех таких пар векторов $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{c}^0$) значение ε:

$$\boldsymbol{a}^0\circ\boldsymbol{c}^0 = \varepsilon = \text{const}, \tag{79}$$

поскольку любые две такие пары $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{c}^0$ и $\boldsymbol{a}_1^0$, $\boldsymbol{c}_1^0$ можно перевести одну в другую движением.

А теперь, разлагая произвольный единичный вектор $\boldsymbol{b}^0$ по векторам $\boldsymbol{a}^0$ и $\boldsymbol{c}^0$, где $c^0 = 1$, $\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{c}^0) = +90°$, получим (ср. стр. 337)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^0\circ\boldsymbol{b}^0 &= \boldsymbol{a}^0\circ[\cos\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\,\boldsymbol{a}^0 + \sin\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\,\boldsymbol{c}^0] = \\ &= \cos\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\cdot(\boldsymbol{a}^0\circ\boldsymbol{a}^0) + \sin\angle(\boldsymbol{a}^0, \boldsymbol{b}^0)\cdot(\boldsymbol{a}^0\circ\boldsymbol{c}^0),\end{aligned}$$

откуда в силу (58), (60) и (79) имеем

$$\boldsymbol{a}\circ\boldsymbol{b} = \delta ab\cos\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \varepsilon\, ab\sin\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \delta(\boldsymbol{ab}) + \varepsilon(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}). \tag{80}$$

---

[1]) В нашем рассуждении мы считали, что точки P, Q и R существуют (прямые AL, BM и CN не параллельны между собой). Более точная формулировка теоремы Чевы такова: *условие* (78) *имеет место в том и только в том случае, если прямые AL, BM и CN пересекаются в одной точке или все параллельны между собой.*

Таким образом, каждое «произведение» векторов, обладающее свойствами (55)—(57), сводится к комбинации (80) скалярного и косого произведений с некоторыми постоянными коэффициентами δ и ε. Ясно, что из всех таких «произведений» лишь скалярное является коммутативным (ср. выше, стр 338) и лишь косое является антикоммутативным.

Отметим еще в заключение, что все наши рассуждения проводились в предположении, что две пары векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ на плоскости, переводимые одна в другую движением в пространстве (именно так в конце § 3 мы переводили друг в друга пары векторов $\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{c}^0$ и $-\boldsymbol{a}^0$, $\boldsymbol{c}^0$), но не переводимые друг в друга движением на плоскости, не считаются равными. Таким образом, здесь мы рассматриваем геометрию, в которой, скажем, две симметричные относительно прямой фигуры (рис. 73; такие фигуры нельзя перевести одну в другую движением, оставляющим их в плоскости) не считаются одинаковыми. Свое проявление этот подход находит в том, что в рассуждениях мы свободно пользовались понятием направления вращения: угол $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ мы считали положительным или отрицательным в зависимости от того, каково направление вращения на меньший 180° угол, переводящего направление $\boldsymbol{a}$ в направление $\boldsymbol{b}$ (см. стр. 339—340). Ясно, что если не различать между собой также и симметричные фигуры (и вообще произвольные фигуры, переводимые одна в другую движением в пространстве), то понятие «направление вращения» становится бессодержательным — ведь при симметрии относительно прямой направление вращения угла меняется на обратное (рис. 73). Плоскость, на которой задано определенное направление вращения углов, принимаемое за положительное, называется *ориентированной плоскостью*[1]). Таким образом, скалярное произведение векторов определяется на неориентированной плоскости[2]); косое же произведение векторов можно определить лишь на ориентированной плоскости.

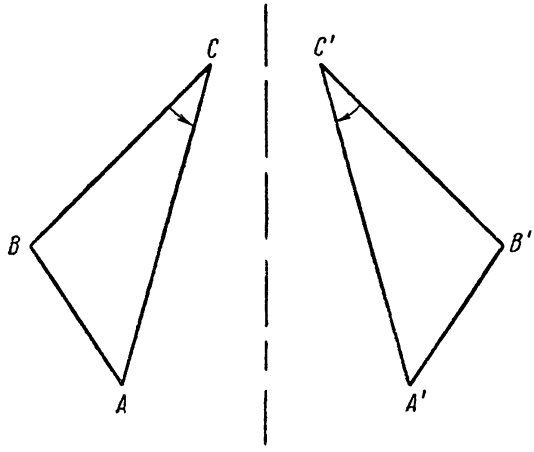


Рис. 73.

---

[1]) Другими словами, ориентированная плоскость — это поле действия «геометрии», изучающей свойства фигур, сохраняющиеся при движениях первого рода (собственных движениях), в то время как обычная, или неориентированная, плоскость рассматривается как поле действия геометрии, изучающей свойства фигур, сохраняющиеся при произвольных движениях (ср. § 6 статьи «Геометрические преобразования», а также стр. 524—526).

[2]) Разумеется, ничто не мешает нам и на ориентированной плоскости рассматривать и скалярное произведение векторов (ср. с замечанием на стр. 341 о смысле символа $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ в определении (45) скалярного произведения).

§ 5. Тройное произведение и векторное произведение векторов пространства

5.1. Ориентированные объемы и тройное произведение. Перейдем теперь к случаю *векторов в пространстве*. Роль параллелограмма в пространственной геометрии играет параллелепипед; поэтому естественно вместо площади $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ ориентированного параллелограмма, построенного на двух векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ плоскости, рассматривать объем $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ ориентированного параллелепипеда $OADBCA_1D_1B_1$, построенного на трех векторах $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ пространства (рис. 74). При этом прилагательное «ориентированный» означает, что объем параллелепипеда мы считаем положительным, если вращение вектора $\boldsymbol{a}$ на меньший 180° угол, совмещающее его направление с направлением вектора $\boldsymbol{b}$, наблюдается из конца вектора $\boldsymbol{c}$ происходящим против часовой стрелки (рис. 75, *а*; такие параллелепипеды мы будем называть положительно ориентированными); $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ считается отрицательным, если вращение

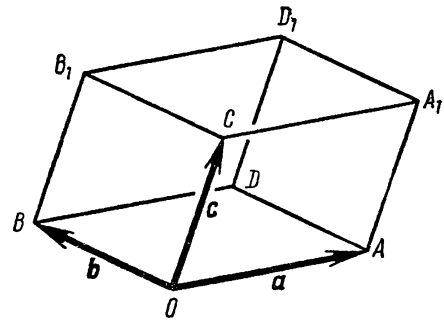


Рис. 74.

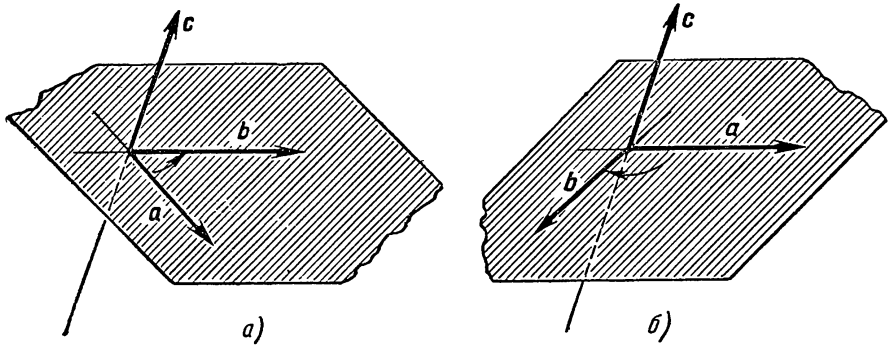


Рис. 75.

на меньший 180° угол, совмещающее направление вектора $\boldsymbol{a}$ с направлением вектора $\boldsymbol{b}$, наблюдается из конца вектора $\boldsymbol{c}$ происходящим по часовой стрелке (рис. 75, *б*; такие параллелепипеды мы будем называть ориентированными отрицательно). Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ принадлежат одной плоскости, то объем $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ естественно считать равным нулю.

Определенную таким образом величину $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ мы будем называть *тройным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$; далее мы

всюду будем обозначать ее через $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Таким образом, здесь мы впервые встречаемся с весьма своеобразным «произведением» — в нем фигурируют не два «сомножителя», как обычно, а обязательно три (векторных) «сомножителя» $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Несмотря на это обстоятельство, за величиной $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ оказывается удобным оставить название тройное произведение — и не только в силу близости этой величины к косому произведению векторов плоскости, употребление для которого названия «произведение» мы уже можем считать привычным, но в первую очередь в силу того, что величина $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ обладает, как мы увидим несколько ниже, целым рядом свойств, родственных свойствам обычного произведения чисел (а также свойствам скалярного и косого произведений векторов).

Нам будет удобнее несколько отложить вывод большинства свойств тройного произведения. Здесь мы только отметим, что в силу определения, *тройное произведение (ненулевых) векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *равно нулю в том и только в том случае, если все векторы принадлежат одной плоскости* (аналогично тому как косое произведение двух векторов плоскости равно нулю в том и только в том случае, если эти векторы принадлежат одной прямой). Отметим еще, что тройное произведение *антикоммутативно*, т. е. меняет знак при перестановке любых двух сомножителей:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}).$$

Действительно, по абсолютной величине все выписанные тройные произведения равны объему одного и того же параллелепипеда и поэтому одинаковы. Далее $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$, ибо если вращение от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ наблюдается из конца вектора $\boldsymbol{c}$ происходящим против часовой стрелки, то вращение от вектора $\boldsymbol{b}$ к вектору $\boldsymbol{a}$ наблюдается из конца $\boldsymbol{c}$ происходящим по часовой стрелке и наоборот. Менее очевидно соотношение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})$; однако, чтобы его доказать, достаточно проверить, что вращение от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{c}$ наблюдается из конца вектора $\boldsymbol{b}$ происходящим по или против часовой стрелки в зависимости от того, имеем ли мы $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$ (черт. 75, *а*) или $V(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) < 0$ (черт. 75, *б*). Точно так же проверяется и соотношение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

Тройные произведения $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a})$ и $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ могут быть получены из произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ путем двукратной перемены местами двух «сомножителей»: сначала меняем местами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а затем либо $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}$, либо $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$. Отсюда следует, что $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$. Таким образом, мы приходим к следующему соотношению, которое является наиболее полным описанием свойства антикоммутативности — тройного произведения:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}). \quad (81)$$

5.2. Векторное произведение и его связь с тройным произведением. Прежде чем идти дальше в исследовании свойств тройного произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, обсудим несколько более тщательно его строение. До сих пор произведение трех множителей (например, abc, где a, b, c — три числа, или $\alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, где α — число, а $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы) встречалось у нас лишь как повторное произведение — сперва перемножались два из наших трех множителей, а затем результат умножался на третий множитель. Естественно задать себе вопрос о том, нельзя ли и тройное произведение трех векторов представить как повторное?

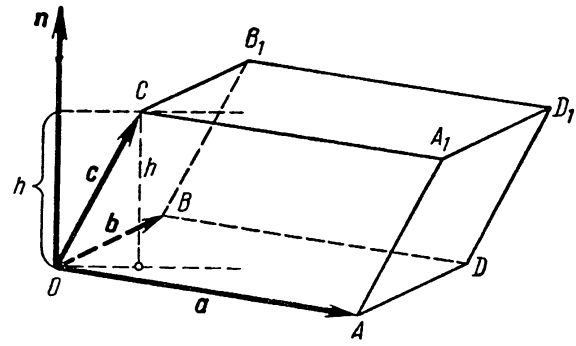


Рис. 76.

Выше мы имели лишь один вид «произведения» двух векторов пространства—скалярное произведение. Но скалярное произведение сопоставляет с двумя векторами число; если это число затем умножить на вектор, являющийся третьим сомножителем, то мы получим некоторый вектор, а между тем окончательный результат тройного произведения должен быть числом. Иначе обстояло бы дело, если бы в результате перемножения двух первых сомножителей мы получили бы не число (скаляр), а вектор, — тогда, умножив этот вектор на последний сомножитель скалярно, мы могли бы получить число, как нам и требуется. Итак, если мы хотим представить тройное произведение векторов в виде повторного произведения, то нам необходимо использовать не только скалярное произведение векторов, но еще и некоторое новое, «векторное» произведение, которое в результате «умножения» двух векторов дает снова вектор.

Постараемся сообразить, как может выглядеть такое «векторное произведение». Объем параллелепипеда $OADBCA_1D_1B_1$, построенного на векторах $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$ и $\overline{OC}=\boldsymbol{c}$, равен произведению площади его основания $OADB$ на высоту. Но высота параллелепипеда h есть не что иное, как *проекция вектора* $\overline{OC}=\boldsymbol{c}$ *на вектор* $\boldsymbol{n}$, *перпендикулярный к плоскости основания* (рис. 76). Таким образом, по абсолютной величине произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ равно площади построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ параллелограмма $OADB$, умноженной на величину проекции вектора $\boldsymbol{c}$ на вектор $\boldsymbol{n}$; знак же произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ будет положительным или отрицательным в зависимости от того, в какую сторону от плоскости $OADB$ направлен вектор $\boldsymbol{c}$.

Пусть площадь параллелограмма $OADB$ равна α; в таком случае мы имеем

$$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})| = \alpha \cdot |\mathrm{пр}_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{c}|.$$

Если мы *направим вектор* $\boldsymbol{n}$ *в такую сторону от плоскости* $OADB$, *что вращение от положительного направления вектора* $\boldsymbol{a}$ *к положительному направлению вектора* $\boldsymbol{b}$ *(на угол, меньший* 180°*) наблюдается из конца* $\boldsymbol{n}$ *происходящим против часовой стрелки,* то величина $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ будет положительной или отрицательной в зависимости от того, направлены ли векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{n}$ в одну сторону от (перпендикулярной $\boldsymbol{n}$) плоскости $OADB$ или в разные стороны. Поэтому при таком выборе вектора $\boldsymbol{n}$ мы можем отбросить знаки абсолютной величины в последней формуле и написать

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \alpha \cdot \mathrm{пр}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{c} \tag{82}$$

(ср. с определением проекции вектора на другой вектор, стр. 320).

Формула (82) очень напоминает по своему строению формулу (44) из § 3 (стр. 328). Ясно, как перейти от нее к представлению тройного произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ в виде скалярного произведения двух векторов. *Обозначим через* $\boldsymbol{N}$ *вектор, направление которого совпадает с вектором* $\boldsymbol{n}$, *а длина равна* $\alpha = S_{OADB}$; в таком случае $\alpha = N$, $\mathrm{пр}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{c} = \mathrm{пр}_{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{c}$ и формулу (82) можно будет переписать следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = N \cdot \mathrm{пр}_{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{c}.$$

Теперь в силу определения (44) скалярного произведения получаем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{N}\boldsymbol{c}.$$

Условимся теперь называть вектор $\boldsymbol{N}$ *векторным произведением векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$; обозначать его мы будем через $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. В силу всего сказанного выше *векторное произведение* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *определяется следующими тремя условиями*:

а) *абсолютная величина (длина) вектора* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *равна площади параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$; *если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *принадлежат одной прямой, то* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0}$;

б) *вектор* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *перпендикулярен плоскости, определяемой векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ (т. е. перпендикулярен обоим этим векторам);

в) *вектор* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *направлен в такую сторону, что из его конца вращение на меньший* 180° *угол, совмещающее направление вектора* $\boldsymbol{a}$ *с направлением вектора* $\boldsymbol{b}$, *представляется происходящим против часовой стрелки.*

Таким образом, мы записали тройное произведение $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ как повторное:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}, \tag{83}$$

или, словами: *для того чтобы составить тройное произведение* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ *векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$, *надо прежде всего образовать век-*

торное произведение $[a, b]$ *первых двух векторов, а затем умножить его скалярно на третий вектор* c [1]).

5.3. Свойства векторного и тройного произведений. Разумеется, уместность употребления в применении к вектору $N=[a, b]$ названия «векторное произведение» обусловливается не полученной таким путем возможностью представлять тройное произведение векторов как повторное, а сходством свойств «векторного произведения» $[a, b]$ с произведением чисел (а также со скалярным и с косым произведениями векторов). К выводу этих свойств векторного произведения мы сейчас и перейдем.

Заметим прежде всего, что в силу формулы (81) и коммутативности скалярного произведения (см. формулу (47) стр. 328) мы имеем

$$(a, b, c)=(b, c, a)=[b, c]a=a[b, c]; \tag{84}$$

таким образом, *тройное произведение векторов* a, b *и* c *равно также скалярному произведению первого вектора* a *на векторное произведение двух последних векторов* b *и* c.

Перейдем теперь к выводу свойств тройного произведения и векторного произведения. Мы уже видели, что тройное произведение (a, b, c) антикоммутативно (см. (81)). Отсюда немедленно вытекает, что *векторное произведение* $[a, b]$ *антикоммутативно*:

$$[a, b]=-[b, a]. \tag{85}$$

В самом деле, из антикоммутативности тройного произведения и формулы (84) следует

$$[a, b]c=(a, b, c)=-(b, a, c)=-[b, a]c.$$

Как мы видим, два вектора $[a, b]=N$ и $[b, a]=M$ таковы, что для любого вектора c имеет место соотношение: $Nc=-Mc$, или, что то же самое, $(M+N)c=0$. Таким образом, вектор $M+N$ должен быть перпендикулярен любому вектору c, что невозможно при $M+N\neq 0$. Следовательно, $M+N=0$, т. е. $M=-N$, а это и есть соотношение (85).

Докажем теперь, что *тройное произведение* (a, b, c) *ассоциативно по отношению к умножению любого из векторов-сомножителей на численный множитель*:

$$(\lambda a, b, c)=(a, \lambda b, c)=(a, b, \lambda c)=\lambda\cdot(a, b, c). \tag{86}$$

Из формулы (84) и ассоциативности скалярного произведения имеем

$$(\lambda a, b, c)=(\lambda a)[b, c]=\lambda(a[b, c])=\lambda\cdot(a, b, c).$$

---

[1]) В литературе тройное произведение (a, b, c) называется также часто *смешанным произведением*. Это последнее название имеет в виду то, что для образования произведения (a, b, c) надо использовать два разных вида умножения векторов — векторное и скалярное.

Формула

$$(\boldsymbol{a},\ \lambda\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$$

следует отсюда очевидным образом, если использовать антикоммутативность тройного произведения:

$$(\boldsymbol{a},\ \lambda\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=-(\lambda\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})=-\lambda(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}).$$

Аналогично устанавливается соотношение $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \lambda\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$.

Установим теперь, что *векторное произведение* $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$ *ассоциативно по отношению к умножению любого вектора-сомножителя на численный множитель:*

$$[\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a},\ \lambda\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]. \tag{87}$$

В самом деле, имеем

$$[\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{c}=(\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=\lambda[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{c}.$$

Но если векторы $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=\boldsymbol{N}$ и $[\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=\boldsymbol{M}_1$ таковы, что при любом векторе $\boldsymbol{c}$ имеем

$$\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{N}\boldsymbol{c},\quad \text{т. е.}\quad (\boldsymbol{M}_1-\lambda\boldsymbol{N})\,\boldsymbol{c}=0,$$

то, очевидно,

$$\boldsymbol{M}_1=\lambda\boldsymbol{N},\quad \text{т. е.}\quad [\lambda\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}].$$

Отсюда, используя антикоммутативность векторного произведения, сразу получаем и равенство $[\boldsymbol{a},\ \lambda\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$.

Наконец, докажем *дистрибутивность тройного произведения*:

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2)=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}_1)+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}_2) \tag{88}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{c})&=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{c}),\\ (\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})&=(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c}).\end{aligned} \tag{88a}$$

В силу дистрибутивности скалярного произведения, очевидно, имеем

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2)=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}](\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2)=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}_1+[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}_2=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_1)+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}_2).$$

Формулы (88а) выводятся из формулы (88) с использованием антикоммутативности тройного произведения; так

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{c})&=-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)=-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}_1)-(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}_2)=\\ &=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

Докажем также и *дистрибутивность векторного произведения*:

$$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2]=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1]+[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2],\quad [\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}]=[\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{b}]. \tag{89}$$

Ясно, что достаточно доказать лишь первую из формул (89). Но

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2]\,\boldsymbol{c}&=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{c})=\\ &=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1]\,\boldsymbol{c}+[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2]\,\boldsymbol{c}=([\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1]+[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2])\,\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

для любого вектора $\boldsymbol{c}$. Отсюда: $[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2]=[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_1]+[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}_2]$

Заметим еще, что ассоциативность векторного произведения для умножения *трех векторов* места не имеет: вообще говоря,

$$[[a, b], c] \neq [a, [b, c]].$$

Например, если i, j — два взаимно перпендикулярных вектора (рис. 77), то мы имеем

$$[[i, j], j] = [k, j] = -i, \quad [i, [j, j]] = [i, 0] = 0.$$

Ассоциативность векторного произведения заменяется следующим своеобразным тождеством:

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \tag{90}$$

связывающим «двойные векторные произведения» $[a, [b, c]]$, $[b, [c, a]]$ и $[c, [a, b]]$ одних и тех же векторов a, b и c взятые с разным порядком расстановки скобок. Тождество (90) носит название тождества Якоби; мы его докажем ниже.

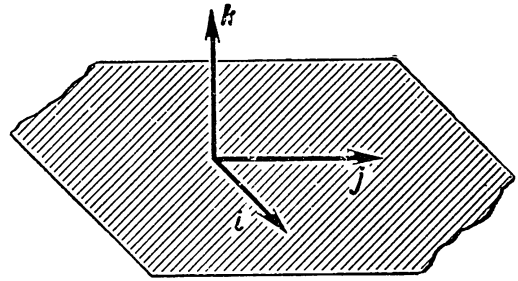


Рис 77.

Нетрудно понять, что соотношения (85), (86) и (87) можно довольно просто вывести из самого определения тройного и векторного произведений По-иному обстоит дело с соотношениями дистрибутивности (88)—(88а) и (89)—здесь выбранный нами довольно длинный путь доказательства этих свойств вряд ли можно сократить.

Из доказанных свойств тройного и векторного произведений вытекают правила перемножения сумм векторов, родственные обычным правилам раскрытия скобок:

$$(2a + 3b, 2c\ d - 5e) = 4(a, c, d) - 20(a, c, e) + 6(b, c, d) - 30(b, c, e)$$

или

$$[4a - b, c + 3d] = 4[a, c] + 12[a, d] - [b, c] - 3[b, d].$$

Однако при этом приходится учитывать антикоммутативность тройного и векторного произведений — в частности то, что векторное произведение двух одинаковых множителей («векторный квадрат») всегда равно нулевому вектору и тройное произведение трех множителей, по крайней мере два из которых одинаковы, всегда равно нулю:

$$[a, a] = 0, \quad (a, a, b) = (a, b, a) = (b, a, a) = (a, a, a) = 0.$$

Учитывая антикоммутативность, имеем, например,

$$(a+b,\ b+c,\ c+a)=(a,\ b,\ c)+(b,\ c,\ a)=2(a,\ b,\ c)$$

или

$$[a+2b,\ 3b-a]=3[a,\ b]-2[b,\ a]=5[a,\ b].$$

Найдем теперь выражения для тройного и векторного произведений в координатах. Пусть векторы a, b и c имеют координаты $(x,\ y,\ z)$, $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $(x_2,\ y_2,\ z_2)$, т. е.

$$a=xi+yj+zk,$$
$$b=x_1i+y_1j+z_1k,$$
$$c=x_2i+y_2j+z_2k.$$

От векторов i, j, k, направленных по осям координат, мы потребуем только, чтобы объем построенного на них параллелепипеда был равен 1 и чтобы этот параллелепипед был ориентирован положительно:

$$(i,\ j,\ k)=+1.$$

В таком случае имеем

$$(a,\ b,\ c)=(xi+yj+zk,\ x_1i+y_1j+z_1k,\ x_2i+y_2j+z_2k)=$$
$$=xy_1z_2(i,\ j,\ k)+xz_1y_2(i,\ k,\ j)+yx_1z_2(j,\ i,\ k)+$$
$$+yz_1x_2(j,\ k,\ i)+zx_1y_2(k,\ i,\ j)+zy_1x_2(k,\ j,\ i),$$

или, окончательно,

$$(a,\ b,\ c)=xy_1z_2+yz_1x_2+zx_1y_2-xz_1y_2-yx_1z_2-zy_1x_2. \qquad (91)$$

Для того чтобы найти выражение для векторного произведения векторов a и b, потребуем, чтобы система координат была декартовой прямоугольной и к тому же правой, т. е. чтобы было

$$[i,\ j]=k,\quad [j,\ k]=i,\quad [k,\ i]=j$$

(см. рис. 77). При этом получаем

$$[a,\ b]=[xi+yj+zk,\ x_1i+y_1j+z_1k]=$$
$$=xy_1[i,\ j]+xz_1[i,\ k]+yx_1[j,\ i]+yz_1[j,\ k]+zx_1[k,\ i]+zy_1[k,\ j],$$

или, окончательно,

$$[a,\ b]=(yz_1-zy_1)i+(zx_1-xz_1)j+(xy_1-yx_1)k. \qquad (92)$$

Таким образом, векторное произведение векторов a и b с координатами $(x,\ y,\ z)$ и $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ имеет координаты

$$(yz_1-zy_1,\ zx_1-xz_1,\ xy_1-yx_1).$$

Формулу (91) можно принять за о п р е д е л е н и е тройного произведения векторов. Если записать ее в виде

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \tag{91a}$$

то мы узнаем в ней известное геометрическое истолкование определителей третьего порядка как объемов ориентированных параллелепипедов [1]). При таком определении антикоммутативность $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = -(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, ассоциативность по отношению к умножению вектора на число $(\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ и дистрибутивность $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ тройного произведения векторов становятся следствиями известных свойств определителей третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} x^{(1)}+x^{(2)} & y^{(1)}+y^{(2)} & z^{(1)}+z^{(2)} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} & z^{(1)} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^{(2)} & y^{(2)} & z^{(2)} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Из известного правила умножения определителей третьего порядка [2])

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} & z^{(1)} \\ x^{(2)} & y^{(2)} & z^{(2)} \\ x^{(3)} & y^{(3)} & z^{(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1x^{(1)}+y_1y^{(1)}+z_1z^{(1)} & x_1x^{(2)}+y_1y^{(2)}+z_1z^{(2)} & x_1x^{(3)}+y_1y^{(3)}+z_1z^{(3)} \\ x_2x^{(1)}+y_2y^{(1)}+z_2z^{(1)} & x_2x^{(2)}+y_2y^{(2)}+z_2z^{(2)} & x_2x^{(3)}+y_2y^{(3)}+z_2z^{(3)} \\ x_3x^{(1)}+y_3y^{(1)}+z_3z^{(1)} & x_3x^{(2)}+y_3y^{(2)}+z_3z^{(2)} & x_3x^{(3)}+y_3y^{(3)}+z_3z^{(3)} \end{vmatrix}$$

получаем также

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{c}_1)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{b}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{c}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}\boldsymbol{c}_1 \end{vmatrix}.$$

В частности,

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})^2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix}. \tag{93}$$

---

[1]) См. в кн. II ЭЭМ статью «Векторные пространства и линейные преобразования»

[2]) Ср., например, кн. II ЭЭМ, стр. 96.

Эта формула является «трехмерным аналогом» формулы (71′) предыдущего параграфа (см. стр. 345).

Формулу (92) также можно записать с использованием определителей третьего порядка:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}. \tag{92а}$$

Стоящий справа определитель», можно разложить по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}. \tag{92б}$$

Формулу (92) (или (92а) — (92б)) можно принять за о п р е д е л е н и е векторного произведения; из нее нетрудно вывести все его свойства.

5.4. Двойное векторное произведение. В качестве примера на использование формулы (92) докажем с ее помощью следующее тождество:

$$[\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]] = (\boldsymbol{bc})\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{ac})\,\boldsymbol{b}. \tag{94}$$

Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы направление оси x совпадало с направлением вектора $\boldsymbol{a}$; в качестве плоскости xOy выберем плоскость, содержащую векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; направление оси z при этом уже определится. В таком случае координаты векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ будут иметь вид: $(x, 0, 0)$; $(x_1, y_1, 0)$ и (x_2, y_2, z_2). Вектор $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ будет в силу (92) иметь координаты $(0, 0, xy_1)$, а вектор $[\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]]$ будет в силу той же формулы (92) иметь координаты $(y_2(xy_1), -x_2(xy_1), 0)$. Таким образом, мы нашли координаты вектора, стоящего в левой части соотношения (94). Далее, согласно (50а) мы имеем

$$\boldsymbol{bc} = x_1x_2 + y_1y_2, \quad \boldsymbol{ac} = xx_2,$$

и потому вектор $(\boldsymbol{bc})\,\boldsymbol{a}$ имеет координаты $(x(x_1x_2 + y_1y_2), 0, 0)$, а вектор $(\boldsymbol{ac})\,\boldsymbol{b}$ — координаты $(x_1(xx_2), y_1(xx_2), 0)$. Отсюда, наконец, следует, что вектор $(\boldsymbol{bc})\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{ac})\,\boldsymbol{b}$ имеет координаты $(x(y_1y_2) - y_1(xx_2), 0)$. Таким образом, векторы, стоящие в левой и правой частях соотношения (94), имеют одни и те же координаты, и потому соотношение (94) справедливо.

Заменяя в соотношении (94) обозначения векторов, получим

$$[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = (\boldsymbol{ac})\,\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{ab})\,\boldsymbol{c}, \tag{94а}$$

$$[\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]] = (\boldsymbol{ab})\,\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{bc})\,\boldsymbol{a}. \tag{94б}$$

Складывая теперь все три соотношения (94), (94а), (94б), мы получаем соотношение (90), которое, таким образом, также доказано.

Докажем еще следующие соотношения, которые понадобятся нам в следующем параграфе:

$$[[a, b], [c, d]] = (a, c, d)\,b - (b, c, d)\,a, \tag{95а}$$

$$[[a, b], [c, d]] = (a, b, d)\,c - (a, b, c)\,d, \tag{95б}$$

$$[a, b]\,[c, d] = (ac)\,(bd) - (ad)\,(bc). \tag{96}$$

Соотношение (95б) легко вытекает из соотношений (94) и (83):

$$[[a, b], [c, d]] = ([a, b]\,d)\cdot c - ([a, b]\,c)\cdot d = (a, b, d)\,c - (a, b, c)\,d.$$

Далее, из соотношений (95б) и (85) вытекает (95а):

$$[[a, b], [c, d]] = -[[c, d], [a, b]] = -(c, d, b)\,a + (c, d, a)\,b = (a, c, d)\,b - (b, c, d)\,a.$$

Наконец, формула (96) вытекает из (83), (81) и (94):

$$[a, b]\,[c, d] = (a, b, [c, d]) = (b, [c, d], a) = [b, [c, d]]\,a = \{(bd)\,c - (bc)\,d\}\,a = (bd)(ac) - (bc)(ad).$$

5.5. Примеры. Рассмотрим теперь несколько задач, иллюстрирующих применения тройного и векторного произведений в геометрии.

Задача 12. *Найти объем треугольной пирамиды (тетраэдра), зная длины всех его ребер.*

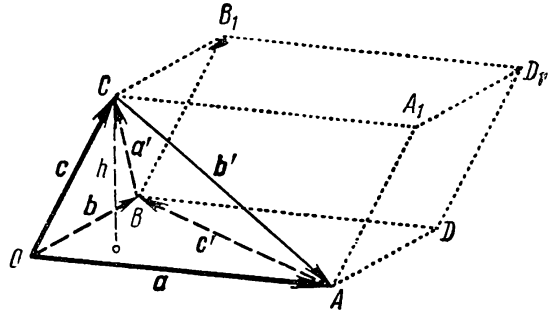


Рис. 78.

Решение. Пусть дан тетраэдр $OABC$ (рис. 78). Векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ обозначим через a, b, c; c', a', b'. Дополним тетраэдр до параллелепипеда $OADBCA_1D_1B_1$; очевидно, что объем этого параллелепипеда будет в 6 раз больше объема тетраэдра (если h есть общая высота тетраэдра и параллелепипеда, опущенная из вершины C, то $V_{\text{пар}} = S_{OADB}\cdot h$; $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} S_{OAB}\cdot h$ и $S_{OAB} = \frac{1}{2} S_{OADB}$). Отсюда получаем

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}\,|(a, b, c)|; \quad (V_{\text{тетр}})^2 = \frac{1}{36}(a, b, c)^2.$$

Но в силу формулы (93)

$$(a, b, c)^2 = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, очевидно,

$$\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{c}'^2 = \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}^2, \quad \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \frac{a^2 + b^2 - c'^2}{2}$$

и аналогично

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{c} = \frac{a^2 + c^2 - b'^2}{2}, \quad \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} = \frac{b^2 + c^2 - a'^2}{2}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} a^2 & \frac{a^2+b^2-c'^2}{2} & \frac{a^2+c^2-b'^2}{2} \\ \frac{a^2+b^2-c'^2}{2} & b^2 & \frac{b^2+c^2-a'^2}{2} \\ \frac{a^2+c^2-b'^2}{2} & \frac{b^2+c^2-a'^2}{2} & c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c'^2 & a^2+c^2-b'^2 \\ a^2+b^2-c'^2 & 2b^2 & b^2+c^2-a'^2 \\ a^2+c^2-b'^2 & b^2+c^2-a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

и, следовательно,

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-c'^2 & a^2+c^2-b'^2 \\ a^2+b^2-c'^2 & 2b^2 & b^2+c^2-a'^2 \\ a^2+c^2-b'^2 & b^2+c^2-a'^2 & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Эта формула родственна элементарной формуле Герона (стр. 346), выражающей площадь треугольника через длины его сторон.

Задача 13. *Определить объем параллелепипеда* $OADBCA'D'B'$, *зная длины ребер* $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ *и углы* $\angle AOB = \gamma$, $\angle AOC = \beta$, $\angle BOC = \alpha$ *между этими ребрами.*

Решение. Обозначим по-прежнему $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{OC} = \boldsymbol{c}$. Мы знаем, что

$$V = V_{\text{пар}} = |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})|, \quad V^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2.$$

В силу формулы (93) и определения (45) скалярного произведения имеем

$$V^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}^2 & \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} & \boldsymbol{c}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}.$$

Вынося из 1-й строки определителя множитель a, из 2-й строки — множитель b, из 3-й строки — множитель c, затем вынося из 1-го

столбца множитель a, из 2-го столбца — множитель b, из 3-го столбца — множитель c, окончательно получаем

$$V^2 = a^2b^2c^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix};$$

$$V = abc \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}.$$

Задача 14. *Дана треугольная пирамида (тетраэдр) $OABC$. Доказать, что если высоты тетраэдра, опущенные из вершин A и B, пересекаются между собой, то*

$$OA^2 + BC^2 = OB^2 + AC^2.$$

При каком условии все высоты тетраэдра пересекаются в одной точке?

Решение. Обозначим по-прежнему $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{OC} = \boldsymbol{c}$; $AB = \boldsymbol{c}'$, $\overline{BC} = \boldsymbol{a}'$, $\overline{CA} = \boldsymbol{b}'$ (рис. 79). Если высоты AP и BQ тетраэдра пересекаются, то векторы $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ и $\overline{AB}$ лежат в одной плоскости (и обратно, если эти три вектора лежат в одной плоскости, то высоты AP и BQ пересекаются). Условие нахождения трех векторов $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{AB}$ в одной плоскости имеет вид

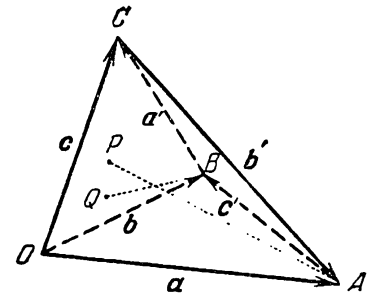


Рис. 79

$$(\overline{AP}, \overline{BQ}, \overline{AB}) = 0.$$

Но $\overline{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$; вектор $\overline{AP}$ имеет направление перпендикуляра $[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ к плоскости OBC; вектор $\overline{BQ}$ имеет направление перпендикуляра $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]$ к плоскости OAC. Поэтому условие пересечения высот AP и BQ принимает вид

$$([\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}], \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 0$$

или (см. (83))

$$[[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]](\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 0$$

Но согласно (95 а) вектор $[[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]]$ равен $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})\boldsymbol{c}$ (ибо $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = 0$), т. е. параллелен вектору $\boldsymbol{c}$ (и отличен от нуля).

Таким образом, последнее условие равносильно следующему:

$$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = 0, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{bc} = \boldsymbol{ac}.$$

Заменяя здесь bc и ac на $\frac{b^2+c^2-a'^2}{2}$ и $\frac{a^2+c^2-b'^2}{2}$ (см. решение задачи 12), получаем

$$\frac{b^2+c^2-a'^2}{2}=\frac{a^2+c^2-b'^2}{2}, \text{ или } a^2+a'^2=b^2+b'^2,$$

что и требовалось доказать.

Этому же равенству равносильно требование, чтобы высоты CR и OS пересекались между собой. Требование, чтобы пересекались высоты AP и CR (а также BQ и OS), равносильно равенству

$$a^2+a'^2=c^2+c'^2.$$

Высоты BQ и CR (а также AP и OS) пересекаются между собой тогда и только тогда, когда

$$b^2+b'^2=c^2+c'^2.$$

Наконец, необходимым и достаточным условием пересечения всех высот тетраэдра в одной точке является выполнение равенств

$$a^2+a'^2=b^2+b'^2=c^2+c'^2.$$

5.6. Вопрос о единственности тройного и векторного произведений. В заключение остановимся на вопросе о том, насколько необходимым являются именно те определения векторного и тройного произведений, которые были приняты выше; при этом мы, естественно, требуем, чтобы эти «произведения» удовлетворяли тем условиям, справедливость которых и обусловила возможность употребления самого слова «произведение». Рассмотрим какую либо операцию $*$, сопоставляющую с каждыми двумя векторами a и b третий вектор $a*b$. Потребуем, чтобы это «произведение» обладало свойством ассоциативности по отношению к умножению вектора на число:

$$(\lambda a)*b=a*(\lambda b)=\lambda(a*b) \tag{97}$$

и свойством дистрибутивности

$$a*(b+c)=a*b+a*c. \tag{98}$$

Кроме того, потребуем, чтобы наше «произведение» $a*b$ имело геометрический смысл; другими словами, это означает, что если векторы $\overline{OA}=a$ и $\overline{OB}=b$ могут быть переведены в векторы $\overline{OA_1}=a_1$ и $\overline{OB_1}=b_1$ каким-либо движением в пространстве (каким либо вращением вокруг точки O), то и вектор $\overline{OC}=a*b$ должен переходить при этом движении в вектор $\overline{OC_1}=a_1*b_1$ (ср. стр 336)

Докажем, что в таком случае «произведение» $a*b$ с неизбежностью сводится к векторному произведению $[a, b]$

Положим $a=aa^0$, $b=bb^0$, где a^0 и b^0—единичные векторы Из (97) вытекает

$$a*b=(aa^0)*(bb^0)=(ab)(a^0*b^0).$$

Таким образом, нам достаточно определить «произведение» единичных векторов (ср. выше, стр. 337).

Далее, пусть OP — прямая, перпендикулярная к плоскости единичных векторов $\overline{OA}=a^0$, $\overline{OB}=b^0$ (рис. 80). Вращение вокруг прямой OP на угол в 180° переводит векторы a^0 и b^0 в векторы $-a^0$ и $-b^0$; следовательно, это вращение должно переводить вектор $a^0 * b^0$ в вектор $(-a^0) * (-b^0) = a^0 * b^0$ (см (97)), т. е. оставлять вектор $a^0 * b^0$ на месте. Но это возможно лишь в том случае, если вектор $a^0 * b^0$ принадлежит прямой OP (т. е. перпендикулярен векторам a^0 и b^0).

Отсюда вытекает, прежде всего, что «квадрат» $a^0 * a^0$ любого (единичного) вектора равен нуль-вектору 0:

$$a^0 * a^0 = 0. \qquad (99)$$

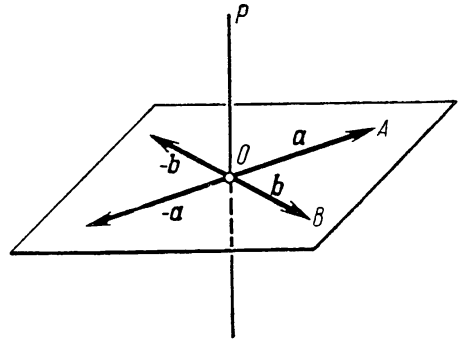


Рис. 80.

В самом деле, если вектор b^0 совпадает с вектором a^0, то прямую OP можно выбирать бесчисленным числом способов, и вектор $a^0 * a^0$, который должен принадлежать всем этим прямым, с необходимостью оказывается нулевым. Далее, пусть $c^0 \perp a^0$; тогда «произведение» $a^0 * c^0$ равно λu^0, где u^0 есть единичный вектор, перпендикулярный a^0 и c^0. Для определенности мы выберем u^0 таким образом, чтобы из его конца вращение на 90° от вектора a^0 к вектору c^0 наблюдалось проти. часовой стрелки Множитель λ должен быть постоянным, т. е. одним и тем же для любой пары перпендикулярных единичных векторов a^0 и c^0: в самом деле, если a_1^0 и c_1^0 — два других единичных взаимно перпендикулярных вектора, то вращение, совмещающее пару a^0, c^0 с парой a_1^0, c_1^0, переводит вектор λu^0 в вектор λu_1^0, где u_1^0 есть единичный вектор, построенный по векторам a_1^0 и c_1^0 в точности так же, как строится вектор u^0 по векторам a^0 и c^0. Таким образом, имеем

$$a^0 * c^0 = \lambda u^0, \quad \lambda = \text{const}. \qquad (100)$$

Теперь остается только разложить любой единичный вектор b^0 по векторам a^0 и c^0, где вектор c^0 лежит в плоскости векторов a^0 и b^0 и перпендикулярен вектору a^0:

$$b^0 = \cos \angle (a^0, b^0) \cdot a^0 + \sin \angle (a^0, b^0) \cdot c^0$$

(ср. выше, стр. 337) Используя теперь (98), (97), (99) и (100), получаем

$$a^0 * b^0 = \cos \angle (a^0, b^0)\,(a^0 * a^0) + \sin \angle (a^0, b^0)\; a^0 * c^0) = \lambda \sin \angle (a^0, b^0)\, u^0,$$

и, следовательно,

$$a * b = \lambda\, ab \sin \angle (a, b) \cdot u^0 = \lambda\, [a, b],$$

где λ — постоянная величина.

Аналогично этому решается и вопрос об определении тройного произведения $(a\ b, c)$ его свойствами [1])

Заметим в заключение, что, потребовав от «векторного произведения» $a * b$ выполнения условий ассоциативности по отношению к умножению

[1]) Ср., например, §§ 2—6 напечатанной в кн. II ЭЭМ статьи «Векторные пространства и линейные преобразования».

вектора на число (97) и дистрибутивности (98), мы пришли к произведению $[a, b]$. Отсюда следует, что если бы мы дополнительно потребовали от «произведения» $a * b$ коммутативности

$$a * b = b * a \tag{101}$$

или ассоциативности в обычном смысле

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \tag{102}$$

то мы не пришли бы ни к какому «произведению» $a * b$, отличному от (совершенно неинтересного) «нулевого произведения» $a * b = 0$. Таким образом, *требования* (97), (98) *и хотя бы одно из требований* (101), (102) *являются несовместимыми* (если только еще требовать, чтобы «произведение» $a * b$ имело геометрический смысл)

§ 6. Применения векторного исчисления к сферической геометрии и тригонометрии

6.1. Выражение сторон и углов сферического треугольника с помощью векторов. С помощью векторного исчисления можно весьма изящно доказать многие теоремы сферической геометрии и тригонометрии.

Будем характеризовать каждую точку A сферы радиуса r ее радиусом-вектором $\boldsymbol{A}$ с началом в центре сферы (рис. 81). Тогда

$$|\boldsymbol{A}| = r. \tag{103}$$

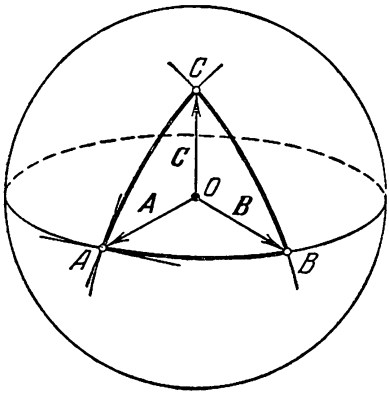


Рис. 81.

Очевидно, что радиусы-векторы двух диаметрально противоположных точек противоположны, а радиусы-векторы двух полярно сопряженных точек [1]) ортогональны, т. е. *условие диаметральной противоположности точек A и B имеет вид*

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 0,$$

а условие полярной сопряженности точек A и B имеет вид

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = 0. \tag{104}$$

Стороны a, b, c сферического треугольника ABC связаны с радиусами-векторами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ его вершин очевидными соотношениями

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = r^2 \cos\frac{a}{r}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{A} = r^2 \cos\frac{b}{r}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = r^2 \cos\frac{c}{r}, \tag{105}$$

$$|[\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]| = r^2 \sin\frac{a}{r}, \quad |[\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A}]| = r^2 \sin\frac{b}{r}, \quad |[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]| = r^2 \sin\frac{c}{2}. \tag{106}$$

Угол A этого сферического треугольника, т. е. угол между касательными к сторонам b и c, проведенным в точке A, равен углу между плоскостями AOB и AOC (где O — центр сферы), т е. равен углу между перпендикулярными к этим плоскостям векторами $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$ и $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}]$. Отсюда

[1]) По поводу используемых здесь понятий сферической геометрии см. статью «Основные понятия сферической геометрии и тригонометрии» в этой книге ЭЭМ (стр. 518—557).

следует, что

$$\cos A=\frac{[A, B][A, C]}{|[A, B]|\cdot|[A, C]|} \tag{107}$$

и

$$\sin A=\frac{|[[A, B], [A, C]]|}{|[A, B]|\cdot|[A, C]|}. \tag{108}$$

Из формулы (104) вытекает условие того, что сферический треугольник $A'B'C'$ является полярным по отношению к сферическому треугольнику ABC; оно имеет вид

$$AB'=AC'=BA'=BC'=CA'=CB'=0. \tag{109}$$

Пусть вершины сферического треугольника ABC занумерованы в таком порядке, что векторы A, B, C составляют правую тройку, т. е. удовлетворяют условию $(A, B, C)>0$. Тогда векторы A', B', C', идущие к вершинам полярного треугольника $A'B'C'$, выражаются через векторы A, B, C по формулам

$$A'=\frac{[B, C]}{|[B, C]|}r, \quad B'=\frac{[C, A]}{|[C, A]|}r, \quad C'=\frac{[A, B]}{|[A, B]|}r. \tag{110}$$

Действительно, векторы (110) удовлетворяют условию (109); кроме того, так как векторы A', B, C, так же как векторы A, B', C и A, B, C', составляют правые тройки, то точки A', B', C' находятся по ту же сторону от больших окружностей BC, CA и AB, что и соответственно точки A, B, C. Нетрудно проверить (например, воспользовавшись формулами (83) и (95а)), что тройка векторов A', B' C' также является правой.

Из симметричности формул (109) относительно двух правых троек векторов A, B, C и A', B', C' видно, что сферический треугольник, полярный по отношению к треугольнику $A'B'C'$, совпадает со сферическим треугольником ABC.

Сторона a' полярного треугольника $A'B'C'$ определяется соотношением, аналогичным первому соотношению (105)

$$B'C'=r^2\cos\frac{a'}{r},$$

откуда в силу (110) и (107) получаем

$$\cos\frac{a'}{r}=\frac{1}{r^2}B'C'=\frac{[C, A][A, B]}{|[C, A]|\cdot|[A, B]|}=-\frac{[A, B][A, C]}{|[A, B]|\cdot|[A, C]|}=$$

$$=-\cos A=\cos(\pi-A).$$

Аналогично получим

$$\cos\frac{b'}{r}=-\cos B=\cos(\pi-B), \quad \cos\frac{c'}{r}=-\cos C=\cos(\pi-C),$$

откуда видно, что стороны a', b', c' сферического треугольника $A'B'C'$ соответственно равны $(\pi-A)r$, $(\pi-B)r$ и $(\pi-C)r$. В силу того, что сферический треугольник ABC является полярным треугольником для сферического треугольника $A'B'C'$, таким же образом мы находим, что стороны a, b, c сферического треугольника ABC соответственно равны $(\pi-A')r$, $(\pi-B')r$, $(\pi-C')r$. Отсюда следует, что углы A', B', C' сферического треугольника $A'B'C'$ соответственно равны $\pi-\frac{a}{r}$, $\pi-\frac{b}{r}$, $\pi-\frac{c}{r}$.

6.2. Сферические теоремы косинусов и синусов.
Для доказательства *сферической теоремы косинусов*[1]) заметим, что формулу (107) в силу соотношения (96) можно переписать в виде

$$\cos A = \frac{A^2 \cdot (BC) - (AB)(AC)}{|[A, B]| \cdot |[A, C]|}.$$

Но в силу формул (103), (105) и (106) это соотношение можно переписать так

$$\cos A = \frac{\cos \frac{a}{r} - \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r}}{\sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r}}.$$

Отсюда непосредственно вытекает сферическая теорема косинусов:

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos A.$$

Для доказательства *сферической теоремы синусов* заметим, что формулу (108) в силу соотношения (95а) можно переписать в виде

$$\sin A = \frac{|(A, A, C) B - (B, A, C) \cdot A|}{|[A, B]| \cdot |[A, C]|} = \frac{|A| \cdot |(A, B, C)|}{|[A, B]| \cdot |[A, C]|}.$$

Но в силу формул (103) и (106) это соотношение можно переписать так:

$$\sin A = \frac{1}{r^3} \frac{|(A, B, C)|}{\sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r}},$$

откуда

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{r}} = \frac{1}{r^3} \cdot \frac{|(A, B, C)|}{\sin \frac{a}{r} \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r}}.$$

Так как полученное выражение симметрично относительно векторов A, B, C и сторон a, b, c, то этому же выражению равны и отношения $\frac{\sin B}{\sin \frac{b}{r}}$ и $\frac{\sin C}{\sin \frac{c}{r}}$, откуда и вытекает сферическая теорема синусов:

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{r}} = \frac{\sin B}{\sin \frac{b}{r}} = \frac{\sin C}{\sin \frac{c}{r}}.$$

Применяя сферическую теорему косинусов к полярному треугольнику $A'B'C'$ и выражая a', b', c' через A, B, C, а A' — через a, b, c, мы, так же как на стр. 551, получим двойственную теорему косинусов.

---

[1]) См. стр. 547.

§ 7. Понятие о векторных пространствах

7.1. Аксиоматическое определение векторного пространства. В этом параграфе мы приведем аксиоматику, описывающую совокупность всех векторов (на плоскости или в пространстве). Это, в частности, позволит нам дать еще одну систему аксиом геометрии, отличную от аксиоматики, приведенной в статье «Аксиомы и основные понятия геометрии» (стр. 32—40).

Обозначим через R совокупность всех векторов в пространстве. В предыдущих параграфах были установлены многие важные свойства множества R. Некоторые из этих свойств мы отметим здесь еще раз.

I. Групповые свойства

Для каждых двух векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (т. е. для каждых двух элементов множества R) определен вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, называемый их *суммой*. Эта *операция сложения* обладает следующими тремя свойствами:

1°. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

2°. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

3°. Для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ уравнение $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ имеет решение (т. е. существует хотя бы один вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий соотношению $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$).

Свойства 1°—3° показывают, что множество R является *коммутативной группой* относительно операции сложения векторов (ср. стр. 27).

II. Свойства линейности

Для каждого вектора $\boldsymbol{a}$ и каждого действительного числа λ определен вектор $\lambda\boldsymbol{a}$, называемый *произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* λ. Эта *операция умножения вектора на число* обладает следующими свойствами:

4°. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$ для любого вектора $\boldsymbol{a}$.

5°. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

6°. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

7°. $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(В свойствах 5°, 6°, 7° $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — произвольные векторы, а λ, μ — действительные числа.)

III. Метрические свойства

Для каждых двух векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ определено действительное число $\boldsymbol{ab}$, называемое их *скалярным произведением*. Эта *операция скалярного умножения* обладает следующими свойствами:

8°. $\boldsymbol{ab}=\boldsymbol{ba}$ для любых двух векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

9°. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ac}+\boldsymbol{bc}$ для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

10°. $(\lambda \boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{ab})$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и любого действительного числа λ.

11°. Для любого вектора $\boldsymbol{a}$ число $\boldsymbol{aa}$ неотрицательно и равно нулю только в случае, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

[Нулевой вектор $\boldsymbol{0}$ определяется равенством $\boldsymbol{c} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}$ — произвольный вектор.]

IV. Свойства размерности

12°. Существуют в множестве R три линейно независимых вектора.

13°. Всякие четыре вектора из R линейно зависимы.

Перечисленные аксиомы играют очень важную роль в современной математике. Как мы знаем, аксиомы 1°—3° вводят весьма важное понятие *группы* (см. стр. 27). Аксиомы 1°—7° определяют понятие *векторного пространства*, также играющее очень важную роль. Наконец, аксиомы 1°—11° определяют понятие *евклидова векторного пространства*, имеющее многие плодотворные применения в математике. Ниже мы скажем несколько подробнее о векторных (в частности, евклидовых) пространствах. Сейчас же мы хотим прежде всего показать, что *система аксиом* 1°—13° *непротиворечива и полна* (см. стр. 28—30). Это означает, что, исходя из действительных чисел, можно построить *модель* для этой аксиоматики (непротиворечивость) и что любые две такие модели *изоморфны* между собой (полнота).

7.2. Арифметическая модель векторного пространства. Модель для аксиоматики 1°—13° строится очень просто. Вспомним, что введение координатной системы позволяет записывать каждый вектор в виде тройки чисел (x, y, z), причем указанные выше операции весьма просто выражаются в координатах. Мы установили эти факты, используя *геометрическую модель* системы векторов (см. § 1). Теперь же мы примем координатную запись векторов в качестве исходного определения. Итак, каждую тройку (x, y, z) действительных чисел (записанных во вполне определенном порядке) мы условимся называть «вектором» и обозначим через R совокупность всех таких «векторов». Далее, сумму двух векторов, произведение вектора на число и скалярное произведение векторов определим формулами:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2),$$
$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z),$$
$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Остается проверить, что в этой «арифметической» модели системы векторов выполнены аксиомы 1°—13°. Проверка аксиом 1°—11° не представляет никакого труда. Укажем кратко, каким образом проверяются аксиомы 12° и 13°. Для проверки аксиомы 12° мы установим,

что векторы

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

линейно независимы. В самом деле, линейная комбинация этих векторов с коэффициентами λ, μ, ν имеет вид

$$\lambda(1, 0, 0)+\mu(0, 1, 0)+\nu(0, 0, 1)=(\lambda, \mu, \nu);$$

ясно, что эта линейная комбинация обращается в нулевой вектор (0, 0, 0) только при $\lambda=\mu=\nu=0$, т. е. рассматриваемые три вектора линейно независимы.

Обратимся, наконец, к аксиоме 13°. Возьмем четыре произвольных вектора

$$(a_1, b_1, c_1), \quad (a_2, b_2, c_2), \quad (a_3, b_3, c_3), \quad (a_4, b_4, c_4).$$

Для доказательства того, что эти четыре вектора линейно зависимы, мы должны найти числа x, y, z, t, среди которых хотя бы одно отлично от нуля и которые удовлетворяют условию

$$x(a_1, b_1, c_1)+y(a_2, b_2, c_2)+z(a_3, b_3, c_3)+t(a_4, b_4, c_4)=(0, 0, 0)$$

Это соотношение, как легко видеть, равносильно выполнению трех равенств

$$a_1x+a_2y+a_3z+a_4t=0,$$
$$b_1x+b_2y+b_3z+b_4t=0,$$
$$c_1x+c_2y+c_3z+c_4t=0.$$

Таким образом, для проверки аксиомы 13° достаточно установить, что написанная система уравнений имеет хотя бы одно ненулевое решение. Но однородная (т. е. не содержащая свободных членов) система уравнений первой степени, в которой число неизвестных больше числа уравнений, всегда имеет ненулевое решение.

Итак, аксиомы 1°—13° в рассматриваемой модели выполняются, и потому приведенная аксиоматика непротиворечива. Рассмотренную модель мы будем называть *арифметической моделью* векторного пространства.

7.3 Полнота аксиоматики векторного пространства. Прежде чем переходить к доказательству полноты аксиоматики 1°—13°, мы выведем из аксиом 1°—13° некоторые теоремы. Так как эти теоремы будут доказаны с помощью аксиом, то они справедливы в любой модели этой аксиоматики.

Теорема 1. *Существует единственный вектор* $\mathbf{0}$, *обладающий тем свойством, что* $\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ *для любого вектора* $\boldsymbol{a}$.

Это вытекает из групповых аксиом 1°—3° (см., например, ЭЭМ, кн. I, стр. 105—106).

Теорема 2. *Для любого вектора* $\boldsymbol{p}$ *имеет место соотношение*

$$0\cdot\boldsymbol{p}=\mathbf{0}.$$

Действительно, в силу аксиом 4° и 5° мы имеем

$$\boldsymbol{p} = 1 \cdot \boldsymbol{p} = (1+0) \cdot \boldsymbol{p} = 1 \cdot \boldsymbol{p} + 0 \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} + 0 \cdot \boldsymbol{p},$$

и потому в силу теоремы 1 мы получаем $0 \cdot \boldsymbol{p} = \mathbf{0}$.

Теорема 3. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *линейно независимы, то каждый из них отличен от* $\mathbf{0}$.

В самом деле, если, например, $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, то

$$1 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = 1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

т. е. векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно зависимы, а это противоречит предположению.

Теорема 4. *Пусть* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *— линейно независимые векторы. Положим*

$$\boldsymbol{a}' = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c},$$

где λ, μ, ν *— действительные числа, причем* $\lambda \neq 0$. *Тогда векторы* $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *линейно независимы.*

Действительно, пусть $\alpha \boldsymbol{a}' + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$, т. е.

$$\alpha (\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c}) + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \mathbf{0}.$$

Пользуясь аксиомами 6°, 7°, 5° (и аксиомой 2°), мы можем это равенство переписать в виде

$$(\alpha\lambda)\, \boldsymbol{a} + (\alpha\mu + \beta)\, \boldsymbol{b} + (\alpha\nu + \gamma)\, \boldsymbol{c} = \mathbf{0}.$$

Так как векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно независимы, то отсюда вытекает, что

$$\alpha\lambda = 0, \quad \alpha\mu + \beta = 0, \quad \alpha\nu + \gamma = 0.$$

Отсюда $\alpha = 0$ (ибо $\lambda \neq 0$), и потому $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Таким образом, равенство $\alpha \boldsymbol{a}' + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ имеет место только в случае $\alpha = \beta = \gamma = 0$, т. е. векторы $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ линейно независимы.

Теорема 5. *Для любых* векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и любых действительных чисел* λ, μ *имеем:* $(\lambda \boldsymbol{a})(\mu \boldsymbol{b}) = (\lambda\mu)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})$.

Действительно, в силу аксиом 8° и 10° мы имеем

$$(\lambda \boldsymbol{a})(\mu \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} (\mu \boldsymbol{b})) = \lambda ((\mu \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{a}) = \lambda\mu (\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}).$$

Терема 6. *Для любого отличного от нуля вектора* $\boldsymbol{a}$ *можно найти такое действительное число* λ, *что вектор* $\boldsymbol{a}^* = \lambda \boldsymbol{a}$ *удовлетворяет соотношению* $\boldsymbol{a}^* \boldsymbol{a}^* = 1$.

Достаточно положить $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}}}$ и применить теорему 5 (число $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ положительно в силу аксиомы 11°).

Теорема 7. *Существуют три вектора* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *удовлетворяющих соотношениям*

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\boldsymbol{c} = 1, \quad \boldsymbol{a}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{c} = 0.$$

(Такая тройка векторов называется *ортонормированным базисом.*)

Доказательство. Пусть a', b', c' — три произвольных линейно независимых вектора (аксиома 12°). Тогда вектор a' отличен от $\mathbf{0}$ (теорема 3). Выберем такое число λ (очевидно, отличное от нуля), что вектор $a=\lambda a'$ удовлетворяет соотношению $aa=1$ (теорема 6). В силу теоремы 4 векторы a, b', c' линейно независимы. Положим $b''=b'-(ab')a$. Из аксиом 8°, 9°, 10° следует, что $ab''=0$ (непосредственный подсчет). В силу теоремы 4 векторы a, b'', c' линейно независимы. Поэтому вектор b'' отличен от нуля (теорема 3), и значит существует такое число μ, что вектор $b=\mu b''$ удовлетворяет соотношению $bb=1$ (теорема 6). Из теоремы 5 вытекает, что $ab=\mu(ab'')=0$. В силу теоремы 4 векторы a, b, c' линейно независимы. Положим $c''=c'-(ac')a-(bc')b$. Непосредственный подсчет с помощью аксиом 8°,9°,10° показывает, что $ac''=0$, $bc''=0$. Кроме того, векторы a, b, c'' линейно независимы (теорема 4), и потому $c''\neq\mathbf{0}$. Поэтому существует такое число ν, что вектор $c=\nu c''$ удовлетворяет соотношению $cc=1$. Кроме того, в силу теоремы 5 мы имеем: $ac=\nu(ac'')=0$, $bc=\nu(bc'')=0$. Таким образом, построенные векторы a, b, c удовлетворяют всем требуемым условиям.

Теорема 8. *Пусть a, b, c — произвольный ортонормированный базис, т. е. тройка векторов, удовлетворяющих условиям*

$$aa=bb=cc=1,\quad ab=ac=bc=0.$$

Тогда векторы a, b, c линейно независимы.

В самом деле, пусть λ, μ, ν — такие числа, что выполнено соотношение $\lambda a+\mu b+\nu c=0$. Умножив скалярно обе части этого равенства на вектор a, мы получим (используя аксиомы 9°, 10°)

$$\lambda(aa)+\mu(ab)+\nu(ac)=0,$$

откуда (в силу соотношений, указанных в условии теоремы) $\lambda=0$. Аналогично (умножая на b, а затем на c) мы найдем, что $\mu=0$, $\nu=0$. Таким образом, векторы a, b, c линейно независимы.

Теорема 9. *Пусть a, b, c — произвольный ортонормированный базис и p — произвольный вектор. Тогда существуют такие числа α, β, γ, что*

$$p=\alpha a+\beta b+\gamma c.$$

Эти числа α, β, γ определены однозначно (они называются координатами вектора p в базисе a, b, c).

Доказательство. Так как любые четыре вектора линейно зависимы (аксиома 13°), то существуют такие числа $\varkappa$, λ, μ, ν, что

$$\varkappa p+\lambda a+\mu b+\nu c=\mathbf{0}$$

и среди чисел $\varkappa$, λ, μ, ν хотя бы одно отлично от нуля. Если бы число $\varkappa$ было равно нулю, то написанное соотношение приняло бы

вид $\lambda a+\mu b+\nu c=0$, а это противоречит линейной независимости векторов a, b, c (теорема 8). Таким образом, $\varkappa\neq 0$. Умножив обе части написанного выше соотношения на $\frac{1}{\varkappa}$, мы получаем (используя соотношение $\lambda 0=0$, которое доказывается примерно так же, как теорема 2)

$$p+\frac{\lambda}{\varkappa}a+\frac{\mu}{\varkappa}b+\frac{\nu}{\varkappa}c=0,$$

откуда

$$p=\left(-\frac{\lambda}{\varkappa}\right)a+\left(-\frac{\mu}{\varkappa}\right)b+\left(-\frac{\nu}{\varkappa}\right)c.$$

Таким образом, числа

$$\alpha=-\frac{\lambda}{\varkappa},\quad \beta=-\frac{\mu}{\varkappa},\quad \gamma=-\frac{\nu}{\varkappa}$$

удовлетворяют требуемому соотношению $p=\alpha a+\beta b+\gamma c$.

Если α', β', γ' — другие числа, удовлетворяющие соотношению $p=\alpha' a+\beta' b+\gamma' c$, то, вычитая из одного выражения вектора p другое, мы получим

$$(\alpha-\alpha')a+(\beta-\beta')b+(\gamma-\gamma')c=0.$$

Отсюда в силу линейной независимости векторов a, b, c (теорема 8) мы находим

$$\alpha-\alpha'=0,\quad \beta-\beta'=0,\quad \gamma-\gamma'=0.$$

Таким образом, числа α, β, γ определены вектором p однозначно.

Теперь уже нетрудно доказать полноту аксиоматики 1°—13°. В самом деле, пусть R' — произвольная модель для этой аксиоматики. Выберем в R' ортонормированный базис a, b, c (теорема 7). Далее, для каждого вектора p (т. е. элемента множества R') мы выберем такие числа α, β, γ, что $p=\alpha a+\beta b+\gamma c$ (теорема 9), и затем поставим в соответствие вектору p тройку чисел (α, β, γ). Мы получаем таким образом взаимно однозначное соответствие между элементами модели R' и тройками чисел (α, β, γ), т. е. элементами арифметической модели. Нетрудно показать, что это соответствие является *изоморфизмом*. Действительно, если вектору p соответствует тройка (α, β, γ), а вектору p' — тройка $(\alpha', \beta', \gamma')$, т. е.

$$p=\alpha a+\beta b+\gamma c,\quad p'=\alpha' a+\beta' b+\gamma' c,$$

то мы имеем

$$p+p'=(\alpha a+\beta b+\gamma c)+(\alpha' a+\beta' b+\gamma' c)=$$
$$=(\alpha+\alpha')a+(\beta+\beta')b+(\gamma+\gamma')c,$$

и потому вектору $p+p'$ соответствует тройка $(\alpha+\alpha', \beta+\beta', \gamma+\gamma')$, т. е. сумма векторов (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$ в арифметической мо-

дели. Аналогично, вектору λp соответствует тройка $(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = \lambda(\alpha, \beta, \gamma)$. Наконец, скалярное произведение

$$pp' = (\alpha a + \beta b + \gamma c)(\alpha' a + \beta' b + \gamma' c),$$

как легко подсчитать (используя соотношения $aa = bb = cc = 1$, $ab = ac = bc = 0$ и аксиомы 8°, 9°, 10°), равно $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'$, т. е. равно скалярному произведению векторов (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$ в арифметической модели. Итак, построенное соответствие между элементами множества R' и элементами арифметической модели сохраняет сумму векторов, произведение вектора на число и скалярное произведение, т. е. является изоморфизмом. Таким образом, любая модель изоморфна арифметической, и потому система аксиом 1°—13° является полной.

Мы уже знаем две модели этой аксиоматики — арифметическую модель и геометрическую (т. е. множество всех векторов трехмерного евклидова пространства, см. § 1). Для сравнения приведем еще две *алгебраические модели* аксиоматики 1°—13°. Именно будем называть «вектором» каждый многочлен второй степени с действительными коэффициентами:

$$ax^2 + bx + c.$$

Сумму двух «векторов» и умножение «вектора» на число определим как обычное сложение многочленов и умножение многочлена на число. Очевидно, что при этом аксиомы 1°—7° будут выполнены. Скалярное произведение «векторов» определим формулой

$$(ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c') = aa' + bb' + cc'.$$

Без труда проверяется справедливость аксиом 8°—11°. Проверка аксиом 12°, 13° проводится примерно так же, как в арифметической модели. Таким образом, мы получаем новую модель для аксиоматики 1°—13°.

Еще одну, четвертую модель мы получим из этой третьей модели, по-прежнему считая «векторами» квадратные многочлены, сохраняя тот же смысл сложения и умножения на число, но вводя скалярное произведение по-другому:

$$(ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c') = \int_0^1 (ax^2 + bx + c)(a'x^2 + b'x + c')\,dx$$

(под интегралом стоит обычное произведение многочленов). Это скалярное произведение также удовлетворяет аксиомам 8°—11° (что легко проверяется), и потому мы действительно получаем еще одну модель аксиоматики 1°—13°.

7.4. Аксиоматика элементарной геометрии. Теперь, пользуясь аксиоматикой 1°—13°, мы построим новую *аксиоматику геометрии*, отличную от той, которая приведена в статье «Аксиомы и основные понятия геометрии» (стр. 32—40). В этой аксиоматике основными понятиями являются, во-первых, *векторы* и операции над ними (сложение, умножение на число и скалярное умножение) и, во-вторых, *точки* и *откладывание векторов*. Векторы и операции над

ними описываются теми же четырьмя группами аксиом, которые рассмотрены выше. Пятая группа аксиом, связанная с *откладыванием векторов*, формулируется следующим образом.

V. Точки и откладывание векторов

Кроме множества R, элементы которого называются *векторами* и подчиняются аксиомам 1°—13°, вводится в рассмотрение множество A (*пространство*), элементы которого называются *точками*. Предполагается, что каждой упорядоченной паре точек M, N пространства A поставлен в соответствие некоторый вектор (т. е. элемент множества R), обозначаемый через $\overline{MN}$, причем выполнены следующие три аксиомы:

14°. Для любой точки M пространства A и любого вектора $\boldsymbol{a}$ существует такая точка N пространства A, что $\overline{MN}=\boldsymbol{a}$.

15°. Для любых трех (не обязательно различных) точек M, N, P пространства A выполнено соотношение $\overline{MN}+\overline{NP}+\overline{PM}=\mathbf{0}$.

16°. Если $\overline{MN}=\mathbf{0}$, то точки M и N совпадают.

Аксиомами 1°—16° и исчерпывается аксиоматика геометрии.

Как же в этой аксиоматике определяются прямые, плоскости, отрезки и т. д.? Пусть M и N—две различные точки пространства A. *Прямой* MN мы будем называть множество, состоящее из всех таких точек P, что векторы $\overline{PM}$ и $\overline{PN}$ линейно зависимы. Из приведенных выше аксиом можно вывести, что прямая MN определяется не только точками M и N, но и любыми двумя своими различными точками; поэтому мы можем говорить просто о *прямых линиях* пространства A. Аналогично определяются плоскости: если M, N, P—три точки пространства A, не лежащие на одной прямой, то *плоскостью* MNP называется множество, состоящее из всех таких точек Q пространства A, что векторы $\overline{QM}$, $\overline{QN}$ и $\overline{QP}$ линейно зависимы. Далее мы будем говорить, что точка P лежит *между* точками M и N (где $M\neq N$), если существует такое число λ, заключенное между нулем и единицей, что $\overline{MP}=\lambda\cdot\overline{MN}$. Наконец, взаимно однозначное преобразование φ пространства A мы будем называть *движением*, если для любых двух точек M, N скалярный квадрат вектора $\overline{MN}$ равен скалярному квадрату вектора $\overline{M'N'}$, где $M'=\varphi(M)$, $N'=\varphi(N)$.

Теперь мы имеем все основные понятия геометрии, описанные в аксиоматике, которая приведена на стр. 32—40. Не очень сложная проверка позволяет установить, что все аксиомы, указанные на стр. 32—40, здесь выполняются, так что приведенная здесь система аксиом 1°—16° также доставляет нам аксиоматику геометрии. В свою очередь из аксиоматики, приведенной на стр. 32—40, можно вы-

вести все аксиомы 1°—16° (если определить векторы так, как это указано в § 1). Таким образом, система аксиом геометрии, приведенная на стр. 32—40, эквивалентна указанной здесь системе аксиом 1°—16°.

7.5. Некоторые типы многомерных пространств. Отметим в заключение, что различные видоизменения аксиоматики 1°—16° приводят к определению других «геометрий», играющих очень важную роль в современной математике и ее приложениях. Мы уже отмечали выше, что всякое множество, удовлетворяющее аксиомам 1°—7°, называется *векторным пространством*. Аксиоматика 1°—7° неполна, т. е. существуют различные, не изоморфные между собой векторные пространства. Если к аксиомам 1°—7° добавить сформулированные ниже аксиомы 17°, 18° (представляющие собой видоизменение аксиом 12°, 13°), то мы получаем *n-мерное векторное пространство*. Вот эти аксиомы размерности:

17°. Существуют (в множестве R) n линейно независимых векторов.

18°. Всякие $n+1$ векторов из R линейно зависимы.

Примером множества, удовлетворяющего аксиомам 1°—7°, 17°, 18° (т. е. примером n-мерного векторного пространства) может служить множество всех многочленов степени меньшей n с действительными коэффициентами (сложение и умножение на число понимаются в обычном смысле). Другим примером может служить «арифметическая» модель, в которой «векторами» считаются всевозможные наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящие из n действительных чисел, а сложение векторов и умножение вектора на число определяются следующим образом: если $a=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $b=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — произвольные два вектора, а λ — число, то

$$a+b=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ \ldots,\ x_n+y_n),$$
$$\lambda a=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ \ldots,\ \lambda x_n).$$

Система аксиом 1°—7°, 17°, 18° полна, т. е. все n-мерные векторные пространства изоморфны между собой. В математике рассматриваются также *бесконечномерные векторные пространства* (в таком пространстве для любого n существуют n линейно независимых векторов). Подробнее о векторных пространствах читатель может прочитать в статье «Векторные пространства и линейные преобразования», помещенной в кн. II ЭЭМ.

Всякое множество R, удовлетворяющее аксиомам 1°—11°, 17°, 18°, называется *n-мерным евклидовым векторным пространством*. Система аксиом 1°—11°, 17°, 18° полна, т. е. все n-мерные евклидовы векторные пространства изоморфны между собой. Например, множество всех векторов на плоскости представляет собой *двумерное*

евклидово векторное пространство. Моделью n-мерного евклидова векторного пространства может служить множество всех наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n действительных чисел со скалярным произведением, определенным по формуле

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot(y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

(«арифметическая модель»). Добавление к аксиомам 1°—11°, 17°, 18° аксиом 14°—16° определяет *n-мерное евклидово пространство* (геометрическое) [1]).

Отметим еще *n-мерное аффинное пространство*, определяемое аксиомами 1°—7°, 14°—18°. Геометрия этого пространства называется *аффинной геометрией.*

В n-мерном евклидовом пространстве можно определить операции над векторами, аналогичные тем, которые рассматривались в этой статье. Сложение векторов, умножение вектора на число и скалярное произведение векторов существенно используются в самом определении n-мерного евклидова пространства; связанные с этими операциями аксиомы требуют, чтобы свойства всех трех операций оставались теми же, что и в случае плоскости или (трехмерного) пространства. Роль тройного произведения векторов в n-мерном евклидовом пространстве играет так называемое *n-кратное произведение векторов*, ставящее в соответствие n векторам

$$\boldsymbol{a}_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}),\ \boldsymbol{a}_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}),\ \ldots,$$
$$\ldots,\ \boldsymbol{a}_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}),$$

заданным своими координатами в ортонормированном базисе, число

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей (см. указанную выше статью в кн. II ЭЭМ) следует, что

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n),$$
$$(\lambda\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \lambda(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

и что n-кратное произведение векторов меняет знак при перемене местами любых двух из них

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \ldots$$

Роль векторного произведения в n-мерном евклидовом пространстве играет так называемое $(n-1)$-*кратное произведение векто-*

[1]) См. статью о многомерных пространствах в V кн. ЭЭМ.

ров, определяемое следующим образом: каждым $n-1$ векторам $\boldsymbol{a}_1=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$, $\boldsymbol{a}_2=(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)})$, $\ldots$ $\ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}=(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, \ldots, x_n^{(n-1)})$ ставится в соответствие вектор

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}]=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \ldots & \boldsymbol{e}_n \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Здесь $\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n=(0, 0, \ldots, 0, 1)$ — векторы, образующие ортонормированный базис [1]); стоящий справа определитель раскрывается по первой строке следующим образом:

$$\boldsymbol{e}_1\begin{vmatrix} x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_2^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \boldsymbol{e}_2\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_3^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_3^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)} & x_3^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} +$$

$$+\boldsymbol{e}_3\begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_4^{(1)} & \ldots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_4^{(2)} & \ldots & x_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)} & x_2^{(n-1)} & x_4^{(n-1)} & \ldots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} - \ldots$$

Из свойств определителей легко вывести, что

$$[\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}]=[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}]+[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}];$$
$$[\lambda\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}]=\lambda[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}],$$

а также то, что $(n-1)$-кратное произведение векторов заменяется на противоположный вектор при перемене местами любых двух векторов-множителей; так,

$$[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}]=-[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}].$$

---

[1]) Отметим, что при $n=2$ (т. е. в случае векторов на плоскости) мы получаем этим путем «однократное» произведение, сопоставляющее с каждым вектором $\boldsymbol{a}$ с координатами (x, y), т. е. с вектором $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы, новый вектор

$$[\boldsymbol{a}]=-\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} \\ x & y \end{vmatrix}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j},$$

т. е. вектор с координатами $(-y, x)$. Вектор $[\boldsymbol{a}]$ получается из вектора $\boldsymbol{a}$ поворотом на угол 90° в направлении от $\boldsymbol{j}$ к $\boldsymbol{i}$ (ср. стр. 344)

Заметим также, что из определения n-кратного произведения, $(n-1)$-кратного произведения и скалярного произведения следует, что

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \boldsymbol{a}_1 [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$$

(ср. выше, стр. 355).

Все эти операции над векторами могут быть использованы для вывода теорем, относящихся к n-мерному евклидову пространству.

Наконец, отметим еще одну аксиоматику, также тесно связанную с понятием вектора и играющую важную роль в современной математике. Аксиоматика n-мерного евклидова векторного пространства (1°—11°, 17°, 18°) получается из аксиоматики n-мерного векторного пространства (1°—7°, 17°, 18°) добавлением аксиом 8°—11°, вводящих скалярное произведение. Если же к аксиомам векторного пространства вместо аксиом 8°—11° добавить нижеследующие аксиомы 8°а—11°а описывающие векторное произведение, то мы приходим к важному понятию алгебры Ли. Таким образом, *алгеброй Ли* называется множество, удовлетворяющее аксиомам 1°—7°, 17°, 18° и следующим четырем аксиомам.

VI Аксиомы алгебры Ли

Каждой паре векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ множества R поставлен в соответствие вектор $\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, называемый *косым произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (иногда также—*коммутатором* этих двух векторов), причем выполнены нижеследующие аксиомы 8°а—11°а (ср. аксиомы 8°а—10°а с аксиомами 8°—10° на стр. 370; новая аксиома 11°а описывает то свойство рассматриваемого здесь косого умножения, которое заменяет свойство ассоциативности обычного умножения чисел)[1]).

8°а. $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

9°а. $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]+[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

10°а. $[\lambda\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ для любых векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и действительного числа λ.

11°а. $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]]+[\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]]+[\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]]=0$ для любых трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

Таким образом, множество всех векторов трехмерного пространства является относительно векторного умножения (§ 5) алгеброй Ли.

Мы видим, что описанная в предыдущих параграфах «арифметика векторов» находится в центре многих важных идей современной математики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. С. Дубнов, Основы векторного исчисления, ч. 1, М., Гостехиздат, 1950.

Обстоятельная книга, посвященная в основном векторной алгебре и ее геометрическим и механическим приложениям. Книга снабжена большим числом задач и примеров.

---

[1]) Ср. с тождеством Якоби, выполняющимся для векторного умножения векторов обычного пространства (стр. 357).

[2] В. Г. Болтянский и И. М. Яглом, Векторы в курсе геометрии средней школы, М., Учпедгиз, 1962.

Пособие для учителей средней школы. Содержит ряд примеров применения векторных методов в планиметрии и стереометрии. В заключительном параграфе рассматриваются применения векторного аппарата в механике.

[3] Н. В. Ефимов, Краткий курс аналитической геометрии, М., Физматгиз, 1962.

[4] А. М. Лопшиц, Аналитическая геометрия, Учпедгиз, М., 1948.

[5] Н. И. Мусхелишвили, Курс аналитической геометрии, М., Гостехиздат, 1947.

Книги [3]—[5] представляют собой вузовские учебники аналитической геометрии, рассчитанные на студентов втузов, пединститутов и университетов; они широко используют векторные методы. Все три книги содержат изложение векторной алгебры (особенно обстоятельное в книге [4]).

[6] М. Лагалли, Векторное исчисление, перев. с нем., М., Гостехиздат, 1936.

Серьезный учебник векторного исчисления, содержащий много приложений.

МНОГОУГОЛЬНИКИ И МНОГОГРАННИКИ

(В. Г. Ашкинузе)

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Основные определения. Теорема Эйлера 382
1.1. Плоские многоугольники 382
1.2. Многогранники 384
1.3. Теорема Эйлера 386
1.4. Число вершин, ребер и граней многогранника нулевого рода 391
1.5. Другое доказательство теоремы Эйлера. 394
§ 2. Комбинаторный (топологический) тип многогранника. Теорема Штейница 399
2.1. Комбинаторные свойства многогранников. Изоморфизм . . . 399
2.2. Абстрактный многогранник 401
2.3. Теорема Штейница 403
2.4. Двойственность 407
§ 3. Развертка многогранника. Теорема Коши 410
3.1. Развертка многогранника Существование многогранника с данной разверткой 410
3.2. Теорема Коши. Основные леммы 412
3.3. Доказательство теоремы Коши 416
3.4. Некоторые обобщения на случай кривых поверхностей . . . 419
§ 4 Правильные многоугольники и многогранники и их обобщения 420
4.1 Топологически правильные многогранники 420
4.2. Правильные многоугольники и многогранники 424
4.3 Равноугольно полуправильные многогранники 429
4.4. Равногранно полуправильные многогранники 440
4.5 Правильные самопересекающиеся многогранники 440
Литература 446

§ 1. Основные определения. Теорема Эйлера

1.1. Плоские многоугольники. *Многоугольником* (точнее, *плоским многоугольником*) называется (плоская) замкнутая ломаная линия, т. е. совокупность отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, где A_1, A_2, ..., A_n — различные точки плоскости, не лежащие все на одной прямой. Точки A_1, A_2, ..., A_n называются *вершинами* многоугольника, а перечисленные выше отрезки — *сторонами* многоугольника. Две стороны, имеющие общую вершину, называются *смежными сторонами*, а две вершины, являющиеся концами одной и той же стороны, — *смежными вершинами* многоугольника.

Очевидно, во всяком многоугольнике число вершин равно числу сторон. Наименьшее возможное число вершин многоугольника равно трем. Многоугольник с тремя вершинами называется *треугольником*, многоугольник с четырьмя вершинами — *четырехугольником* и т. д.

Многоугольник называется *простым*, если никакие две его не смежные стороны не имеют общих точек (внутренних или концевых); в противном случае многоугольник называется *самопересекающимся*. Так, многоугольники, изображенные на рис. 1, *а*, *б*, *в*, *г*, простые, а на рис. 1 *д*, *е*, *ж* — самопересекающиеся. Можно доказать, что

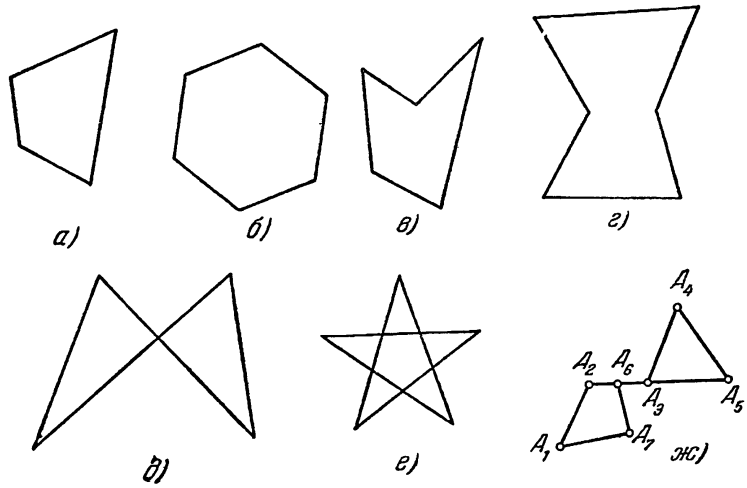


Рис. 1.

каждый простой многоугольник делит всю плоскость на две области таким образом, что две точки принадлежат одной и той же области тогда и только тогда, когда их можно соединить непрерывной линией, не пересекающей данного многоугольника [1]). Одна из этих областей характеризуется тем, что она содержит целиком некоторую прямую линию; она называется внешней областью многоугольника. Другая область называется внутренней областью многоугольника (рис. 2, *а*, *б*, внутренние области многоугольников заштрихованы). Внутреннюю область многоугольника часто называют тоже многоугольником [2]).

---

[1]) См., например, книгу А. Д. Александрова [1], указанную в списке литературы в конце статьи.

[2]) Различие между этими двумя определениями многоугольника заключается, таким образом, в том, что первое определение рассматривает многоугольник как линию, а второе — как часть плоскости (т. е. как «площадь»). Разумеется, бессмысленно говорить о том, какое из этих двух определений является более «правильным», — все зависит от того, в связи с решением каких задач рассматривается понятие «многоугольник».

Многоугольник называется *выпуклым*, если для любой его стороны все прочие стороны расположены по одну сторону от прямой, на которой лежит данная сторона; так многоугольники, изображенные на рис. 1, *а*, *б* — выпуклые, а на рис. 1, *в*, *г*, *д*, *е*, *ж* — невыпуклые. Легко видеть, что всякий выпуклый многоугольник является простым; обратное, разумеется, неверно: существуют простые невыпуклые многоугольники (см. рис. 1, *в*, *г*).

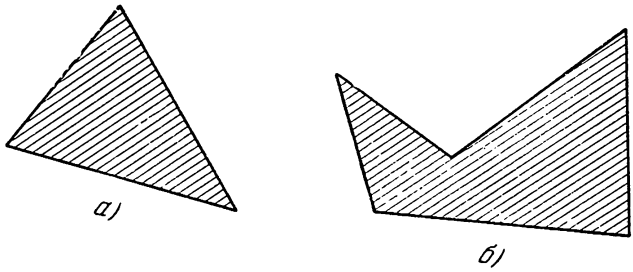


Рис. 2.

1.2. Многогранники. Многогранники представляют собой простейшие геометрические фигуры в пространстве, подобно тому, как многоугольники — это простейшие фигуры на плоскости.

Многогранником называется фигура, состоящая из конечного числа плоских многоугольников (называемых *гранями* многогранника), расположенных в пространстве так, что:

1) любая сторона каждой из этих граней является стороной еще одной и только одной грани (называемой *смежной* с первой гранью);

2) для любых двух граней α и β можно указать такую цепочку граней α_1, α_2, ..., α_n, что грань α смежна с α_1, грань α_1 смежна с α_2, ..., грань α_n смежна с β;

3) если грани α и β имеют общую вершину A, то выбор граней α_1, α_2, ..., α_n, о которых говорится в предыдущем пункте, можно осуществить так, чтобы все они имели ту же вершину A [1]).

Стороны и вершины граней многогранника называются соответственно *ребрами* и *вершинами* этого многогранника.

Если рассматривать грани многогранника как плоские области (это возможно в том случае, когда все эти грани являются простыми

ник». В этой статье наиболее целесообразно считать многоугольником замкнутую ломаную; в статьях же «Площадь и объем» и «Равносоставленность многоугольников и многогранников», помещенных в кн. V ЭЭМ, под многоугольником удобнее понимать часть плоскости.

[1]) Многогранник также можно определять по-разному: можно его представлять себе как «поверхность»; в других задачах (например, в цитированных выше статьях) его удобнее представлять как «часть пространства» (объем) и т. п.

многоугольниками), то согласно введенному выше определению многогранник есть некоторая поверхность в пространстве. При этом первое из содержащихся в определении многогранника требований говорит о том, что эта поверхность не имеет границы, т. е. является замкнутой, а второе — о том, что она является связной, т. е. не распадается на две (замкнутые) поверхности; наконец, третье требование исключает из числа многогранников поверхности, подобные изображенной на рис. 3, у которых при одной вершине имеется несколько многогранных углов.

Простейшими примерами многогранников могут служить призмы и пирамиды. Многогранник называется *n*-угольной *пирамидой*, если он

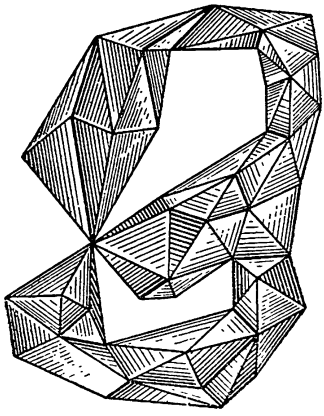


Рис. 3.

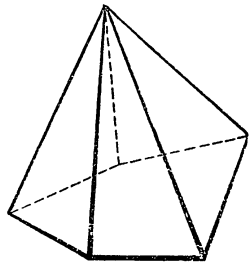


Рис. 4.

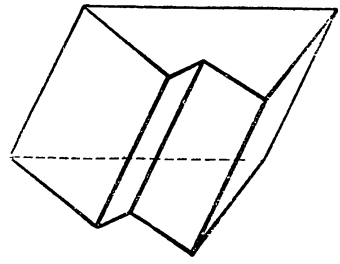


Рис. 5.

имеет одной своей гранью (основанием) какой-либо *n*-угольник, а остальными гранями — треугольники с общей вершиной, не лежащей в плоскости основания (рис. 4). Треугольная пирамида называется также *тетраэдром*. Многогранник называется *n*-угольной *призмой*, если он имеет двумя своими гранями (основаниями) равные *n*-угольники (не лежащие в одной плоскости), получающиеся друг из друга параллельным переносом, а остальными гранями — параллелограммы, противоположными сторонами которых являются соответственные стороны оснований (рис. 5).

Многогранник называется *простым*, если:

1) все его грани являются простыми многоугольниками;

2) никакие две его несмежные грани не имеют общих точек (внутренних или граничных), за исключением, быть может, одной общей вершины;

3) две смежные грани имеют только одно общее ребро и не имеют других общих точек.

Подобно простому многоугольнику, поверхность простого многогранника делит все пространство на две области. Одна из этих областей характеризуется тем, что она содержит целиком некоторую плоскость; она называется внешней областью многогранника. Другая область называется внутренней областью многогранника; часто внутреннюю область, так же как и ограничивающую ее поверхность, называют многогранником

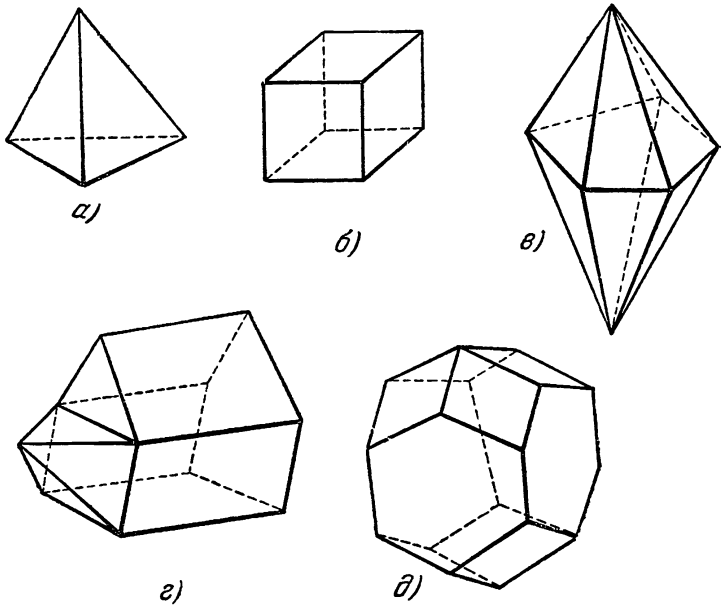


Рис. 6.

Многогранник называется *выпуклым*, если все его вершины, не принадлежащие произвольной грани этого многогранника, расположены по одну сторону от плоскости этой грани. Легко доказать (мы предоставляем это читателю), что всякий выпуклый многогранник является простым и что все его грани являются выпуклыми многоугольниками [1]).

1.3. Теорема Эйлера. Перейдем теперь к вопросу о числе вершин, ребер и граней многогранника. Для многоугольника вопрос о

---

[1]) Выпуклые многоугольники и многогранники имеют также и другие определения (эквивалентные приведенному здесь). Например, выпуклый многогранник можно определить как (ограниченное и содержащее внутренние точки) множество, являющееся пересечением конечного числа полупространств, или еще как «выпуклую оболочку» конечного числа точек (вершин). См. по этому поводу статью о выпуклых телах в кн. V ЭЭМ.

числе вершин и сторон решается очень просто: число C сторон многоугольника всегда равно числу B его вершин:

$$C=B \quad \text{или} \quad C-B=0,$$

причем существуют многоугольники с любым числом $n \geqslant 3$ вершин (и сторон). Для многогранников же, как показывают уже простейшие примеры (рис. 6, *а*—*д*), положение оказывается значительно более сложным. Обозначая число граней, вершин и ребер многогранника соответственно через Γ, B и P, получим для многогранников, изображенных на рис. 6, следующую таблицу.

Таблица 1

Многогранник	Γ	B	P
Треугольная пирамида (рис. 6, *а*)	4	4	6
Четырехугольная призма (рис. 6, *б*) . . .	6	8	12
Пятиугольная бипирамида (рис. 6, *в*) . . .	10	7	15
Одиннадцатигранник (рис. 6, *г*)	11	11	20
Двенадцатигранник (рис. 6, *д*)	12	18	28

Чтобы обнаружить какую-либо общую закономерность, связывающую число граней, вершин и ребер многогранника, рассмотрим подробнее, например, произвольные призмы и пирамиды. Для n-угольной призмы мы имеем $\Gamma=n+2$, $B=2n$, $P=3n$, а для n-угольной пирамиды $\Gamma=n+1$, $B=n+1$, $P=2n$. Если увеличить число n на единицу, то у призмы число граней увеличится на 1, число вершин на 2, число ребер — на 3, а у пирамиды соответственно на 1, 1 и 2. Неизменной при этом остается разность $(B+\Gamma)-P$; при любом n она равна 2. Таким образом, для призм и пирамид соотношение между числами Γ, B и P найдено:

$$\Gamma+B-P=2. \tag{1}$$

Читатель без труда проверит, пользуясь приведенной выше таблицей, что это же соотношение выполняется и для многогранников, изображенных на рис. 6, *в*, *г*, *д*. Мы покажем сейчас, что на самом деле оно справедливо для весьма широкого класса многогранников.

Для этого заметим, что все более и более сложные многогранники можно получать из более простых, «приставляя» эти простые друг к другу равными гранями (см., например, рис. 7). Выясним, что будет происходить с величиной $\Gamma+B-P$ если мы «приставим» к данному многограннику какой-нибудь другой; ограничимся пока

случаем, когда этот второй многогранник является простейшим из всех многогранников — тетраэдром.

Итак, пусть мы некоторую (треугольную) грань многогранника M совмещаем с равной ей гранью ABC тетраэдра $ABCD$ (рис. 8) так, что при этом вершина D тетраэдра не совмещается ни с одной из вершин многогранника M. Тогда число вершин многогранника M

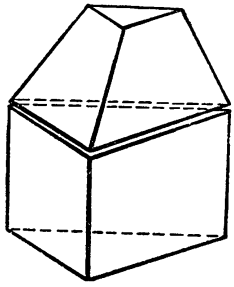


Рис. 7.

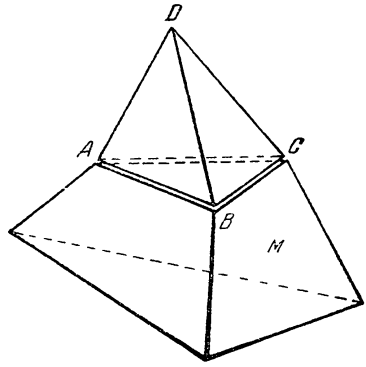


Рис. 8.

увеличится на 1 (добавится вершина D), число граней увеличится на 2 (добавится три новых грани, но пропадет одна грань, совмещенная с гранью ABC), число ребер увеличится на 3 (добавятся ребра AD, BD, CD). Следовательно, величина $Г+В-Р$ не изменится, так что если соотношение (1) выполнялось для исходного многогранника M, то оно будет выполняться и для полученного.

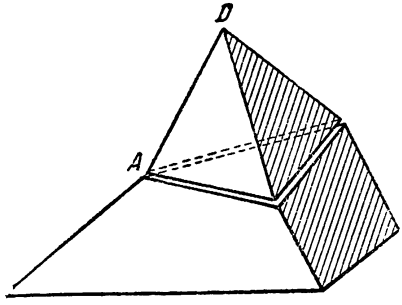


Рис. 9.

Наш результат останется в силе и в том случае, если какая-нибудь грань тетраэдра окажется в одной плоскости со смежной гранью многогранника M и будет составлять вместе с этой гранью одну грань полученного многогранника (рис. 9). Тогда в полученном многограннике будет на одну грань меньше, чем у указанного выше, но зато пропадет и одно ребро, так что на значении величины $Г+В-Р$ это не отразится. То же самое может произойти с двумя или даже с тремя гранями тетраэдра.

Подобным же образом легко проверить, что тот же результат получится, если мы будем тетраэдр прикладывать так, что не одна,

а две (рис. 10, *а*) или три (рис. 10, *б*) его грани совместятся с гранями многогранника *M*.

Наше рассуждение показывает, что соотношение (1) выполняется для достаточно широкого класса многогранников, во всяком случае

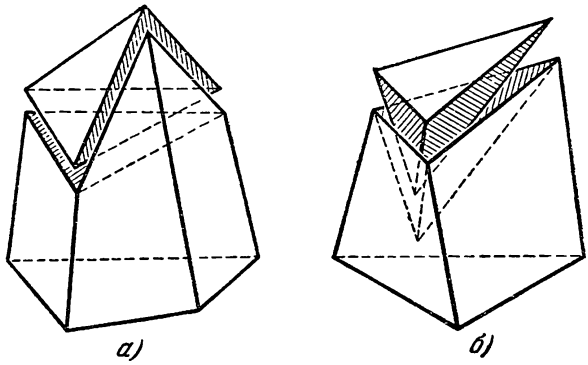


Рис. 10.

для всех выпуклых многогранников. В самом деле, взяв внутри произвольного выпуклого многогранника *M* любую точку *O* и соединив

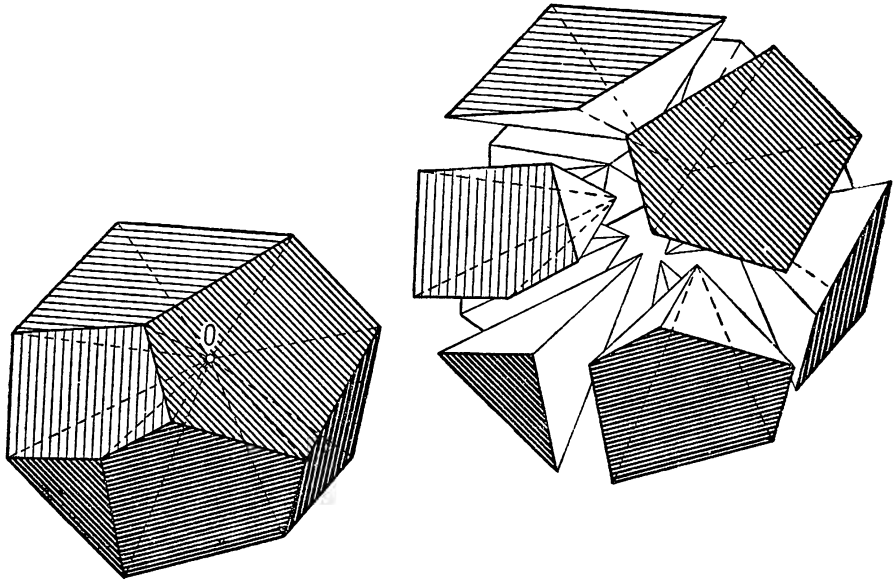


Рис. 11.

ее со всеми вершинами многогранника, мы разобьем этот многогранник на некоторое число пирамид с общей вершиной *O* (рис. 11),

каждую из которых в свою очередь легко разбить на треугольные пирамиды — тетраэдры (с той же вершиной O). Выберем теперь какой-нибудь один из полученных тетраэдров и будем последовательно приставлять к нему остальные [1]), пока не получим исходного многогранника M. Так как при каждом шаге величина $Г+В-Р$ не изменяется и так как для начального тетраэдра она равна 2, то и для многогранника M будет

$$Г+В-Р=2. \qquad (1)$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 1 (теорема Эйлера). *Для всякого выпуклого многогранника*

$$Г+В-Р=2.$$

Однако, как видно из приведенного нами доказательства теоремы Эйлера, она должна оставаться справедливой и для многих невыпуклых многогранников.

Остановимся поэтому подробнее на вопросе о естественных границах справедливости соотношения (1).

Легко понять, что всякий простой многогранник можно разбить на тетраэдры (так же, как всякий простой многоугольник можно разбить на треугольники). Тем не менее соотношение (1) выполняется не для всех многогранников. Дело в том, что при составлении многогранника из тетраэдров для неизменности величины $В+Г-Р$ нужно, чтобы каждый раз, когда тетраэдр приставляется одной гранью, противоположная его вершина не совпадала ни с одной из вершин уже построенной части многогранника. Однако имеются многогранники, для которых такого совпадения вершин избежать нельзя; один из таких многогранников изображен на рис. 12,*а* (см. также рис. 12 *б*, *в*). Для этого многогранника, как нетрудно подсчитать, будет $В+Г-Р=12+12-24=0$.

Теперь кажется наглядно ясным, что (простой) многогранник тогда и только тогда может быть нужным нам образом составлен из тетраэдров, когда он не имеет сквозных «дыр», т. е. не является «кольцеобразным», как многогранник, изображенный на рис. 12,*а*, и не содержит таких «кольцеобразных» частей. Такие многогранники, не имеющие сквозных «дыр», называются многогранниками *нулевого*

---

[1]) Разумеется, при таком последовательном «приставлении» тетраэдров надо проявлять некоторую осторожность: нужно следить, чтобы в случае, когда мы приставляем очередной тетраэдр одной гранью, противоположная вершина тетраэдра не принадлежала уже построенному многограннику. Нетрудно установить, что можно в такой последовательности приставлять тетраэдры, чтобы это условие каждый раз выполнялось; мы предоставляем сделать это читателю.

рода. Итак, теореме Эйлера можно придать следующую более общую форму [1]):

Теорема 2. *Для всякого многогранника нулевого рода*

$$Г+В-Р=2.$$

Число $Г+В-Р$ называется *эйлеровой характеристикой* многогранника. Мы нашли ее для многогранников нулевого рода.

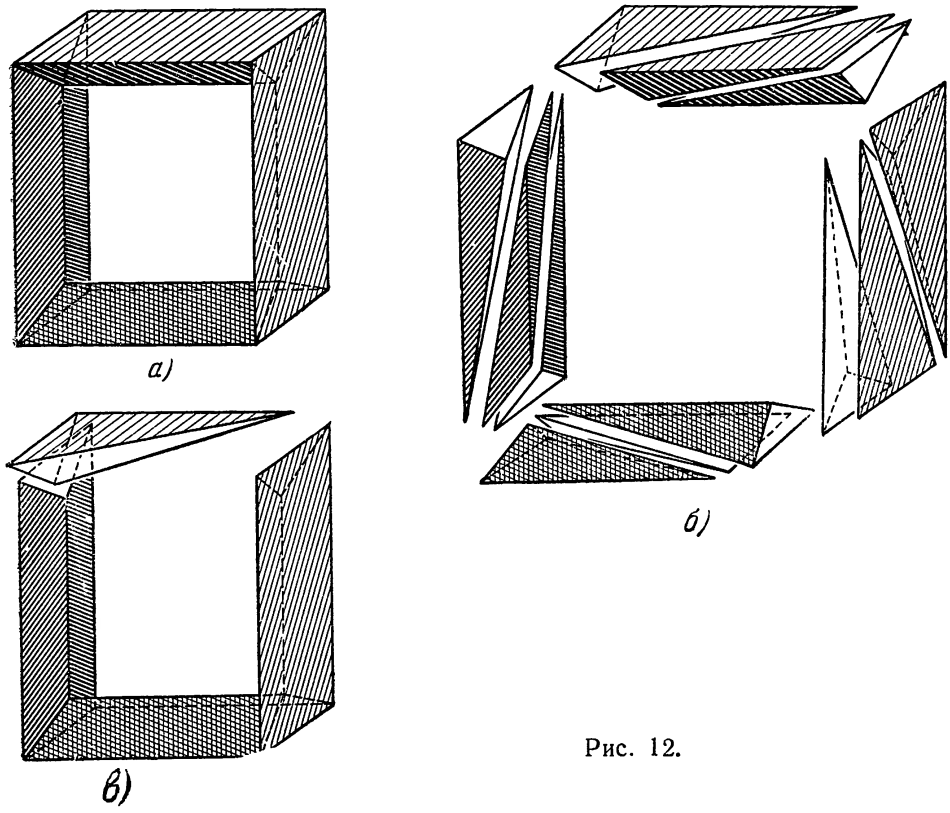


Рис. 12.

1.4. Число вершин, ребер и граней многогранника ненулевого рода. Перейдем теперь к многогранникам ненулевого рода. Всякий простой многогранник, не являющийся многогранником нулевого рода, имеет одну или несколько сквозных «дыр» (замкнутых «колец»). Число таких сквозных «дыр» (или замкнутых колец) называется *родом*

[1]) По сути дела при таком изложении соотношение $Г+В-Р=2$ следовало бы считать определением многогранника нулевого рода (ибо определения сквозных «дыр» и доказательства соотношения $Г+В-Р=2$ для многогранников, не имеющих сквозных дыр, не было дано). Аккуратное определение «числа сквозных дыр» и доказательства теорем 2 и 3 проводятся средствами специальной математической дисциплины, называемой топологией.

многогранника. Многогранники рода 0 уже были рассмотрены выше; пример многогранника рода 1 также уже встречался нам (см. рис. 12, *а*); примеры многогранников рода 2 и 3 изображены на рис. 13, *а*, *б*, *в*.

Многогранник рода 1 можно получить из двух многогранников рода 0, приставив их друг к другу двумя несмежными гранями (рис. 14, *а*); многогранник рода 2 можно получить из многогранника рода 1, приставив к нему таким же образом многогранник рода 0 (рис. 14, *б*);

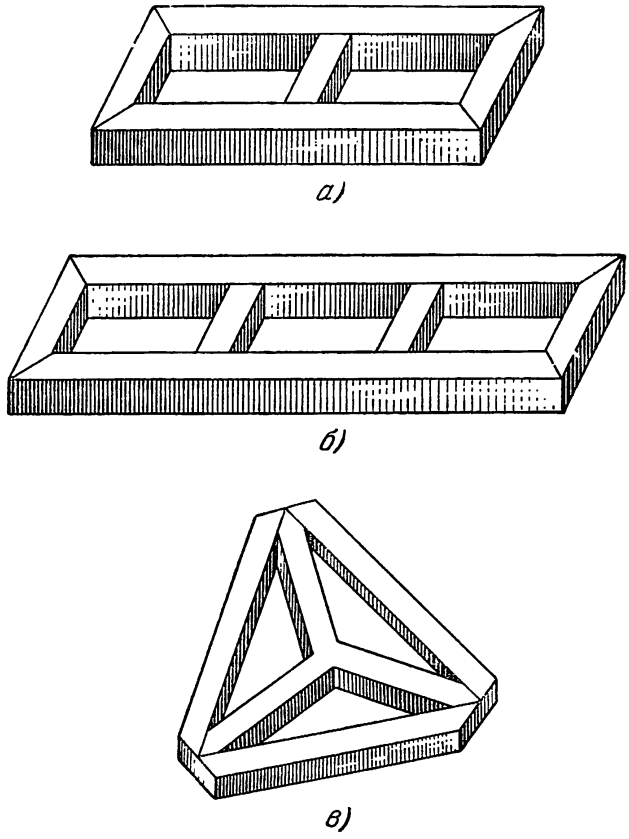


Рис. 13.

многогранник рода 3 можно получить таким же образом из многогранника рода 2 (рис. 14, *в*). Вообще, многогранник рода $p+1$ можно получить из многогранника рода p, приставив к нему двумя несмежными гранями многогранник нулевого рода. Выясним, как изменяется при этой операции эйлерова характеристика многогранника.

Пусть к произвольному многограннику M_1, имеющему Γ_1 граней, B_1 вершин и P_1 ребер, приставляется многогранник нулевого рода M_2, имеющий Γ_2 граней, B_2 вершин и P_2 ребер (см. рис. 14).

Пусть при этом m-угольная грань α_1 многогранника M_1 совмещается с гранью α_2 многогранника M_2 и n-угольная грань β_1 — с гранью β_2. Тогда в полученном многограннике M число граней будет

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 - 4 \tag{2}$$

(гранями многогранника M будут все грани многогранников M_1 и M_2, кроме граней α_1, α_2, β_1, β_2). Число вершин многогранника M будет равно

$$B = B_1 + B_2 - m - n \tag{3}$$

вершинами многогранника M являются все вершины многогранника M_1, а также все вершины многогранника M_2, за исключением

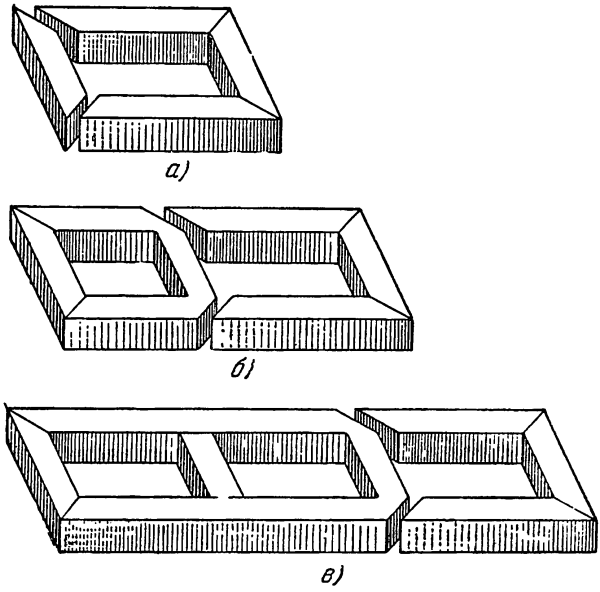


Рис. 14.

m вершин грани α_2 и n вершин грани β_2). Точно так же число ребер многогранника M будет равно

$$P = P_1 + P_2 - m - n. \tag{3'}$$

Из равенств (2), (3), (3') легко найти эйлерову характеристику многогранника M

$$\Gamma + B - P = (\Gamma_1 + B_1 - P_1) + (\Gamma_2 + B_2 - P_2) - 4.$$

Отсюда, так как многогранник M_2 — нулевого рода, в силу теоремы 2 получаем

$$\Gamma + B - P = (\Gamma_1 + B_1 - P_1) - 2.$$

Таким образом, увеличение рода многогранника на 1 влечет уменьшение эйлеровой характеристики на 2. Учитывая, что для многогранников рода 0 эйлерова характеристика равна 2, мы приходим к следующему общему выводу.

Теорема 3. *Для всякого простого многогранника произвольного рода p справедливо соотношение*

$$Г+В-Р=2-2p.$$

В частности, для многогранников рода 1

$$Г+В-Р=0;$$

для многогранников рода 2

$$Г+В-Р=-2$$

и т. д.

Теорему 3 нельзя, конечно, считать полностью доказанной нашими рассуждениями, так как не доказано, что любой многогранник рода p может быть получен указанным выше способом из некоторого многогранника рода $p-1$. Можно показать, что это действительно так, если допустить некоторую деформацию многогранника, не изменяющую числа его граней, вершин и ребер; мы, однако, не будем на этом останавливаться [1]).

I.5. Другое доказательство теоремы Эйлера. В заключение приведем еще одно («топологическое») доказательство теоремы Эйлера. Это доказательство приводит также к одному обобщению теоремы Эйлера (теорема 5 и следствие к ней), которое мы используем ниже, при доказательстве теоремы Коши.

Пусть M — выпуклый многогранник. Выберем внутри него произвольную точку O и проведем сферу S с центром O, целиком заключающую многогранник M внутри себя. Теперь мы спроектируем поверхность многогранника M из точки O на сферу S. При этом проектировании каждая вершина A многогранника M перейдет в некоторую точку A' сферы S; все эти точки на сфере S мы также будем называть «вершинами». Далее, если AB — некоторое ребро многогранника M, то оно при проектировании из точки O перейдет в дугу $A'B'$ большой окружности на сфере S, где A' и B' — «вершины», в которые переходят точки A и B при проектировании. Каждую такую дугу $A'B'$ мы будем называть «ребром» на сфере S.

Итак, при проектировании многогранника M мы получим на сфере S сетку, состоящую из «ребер» и «вершин», причем, очевидно, число «ребер» и число «вершин» этой сетки соответственно равны числу ребер и числу вершин многогранника M. Эта сетка разбивает всю поверхность сферы S на части (сферические многоугольники), кото-

[1]) Другой подход к определению рода многогранника и доказательству теоремы Эйлера см. в книге Ж. Адамара [4], указанной в конце статьи.

рые мы будем называть «гранями». Каждая грань многогранника M проектируется в некоторую «грань» на сфере S, откуда ясно, что число «граней», определяемых на сфере S сеткой «ребер» и «вершин», равно числу граней многогранника M. Итак, на сфере S мы имеем B «вершин», P «ребер» и Γ «граней», и для доказательства теоремы Эйлера было бы достаточно установить, что для любой сетки на сфере справедливо соотношение $B-P+\Gamma=2$.

Однако это соотношение справедливо не для любой сетки «ребер» и «вершин», произвольно начерченной на сфере S. Для сетки же, *получающейся при проектировании выпуклого многогранника*, соотношение $B-P+\Gamma=2$ всегда справедливо, так как такие сетки обладают некоторыми специальными свойствами, обеспечивающими выполнение этого соотношения.

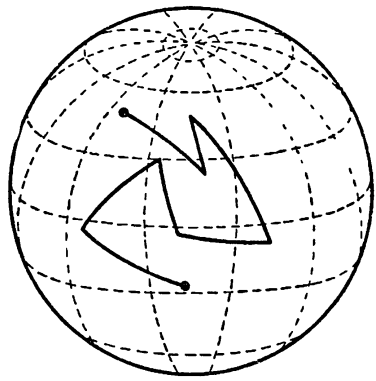


Рис. 15.

Прежде всего дадим точное определение сетки. *Дугой* на сфере мы будем называть незамкнутую ломаную, составленную из дуг больших окружностей и не пересекающую саму себя (рис. 15). *Сеткой* на сфере мы будем называть конечную совокупность точек («вершин») и дуг («ребер»), обладающую следующими свойствами:

а) к каждой «вершине» примыкает хотя бы одно «ребро»;

б) оба конца каждого «ребра» являются «вершинами»;

в) любые два «ребра» либо не имеют общих точек, либо имеют одну или две общие точки, являющиеся их общими концами.

Ясно, что при проектировании вершин и ребер многогранника M из точки O на сферу S мы получаем на сфере S сетку. Эта сетка обладает не только свойствами а), б), в), но и многими другими; например, к каждой «вершине» примыкает не менее трех «ребер». Наиболее важным для нас свойством сетки, получающейся при проектировании многогранника, является то, что эта сетка связна. Это означает, что, двигаясь по «ребрам» сетки, можно пройти от любой «вершины» к любой другой «вершине». Сетка, изображенная на рис. 16, не является связной. Несвязная сетка состоит из нескольких связных кусков (компонент); например, сетка, изображенная на рис. 16, состоит из трех компонент. Итак, при проектировании многогранника M на сферу S мы получаем на этой сфере связную сетку.

Пусть C — произвольная сетка на сфере S. Обозначим через B число ее «вершин», через P — число «ребер», а через Γ — число областей («граней»), на которые сетка C разбивает поверхность сферы. Число $B-P+\Gamma$ называется *эйлеровой характеристикой сетки* C.

Мы докажем, что справедлива следующая теорема, из которой очевидным образом вытекает теорема Эйлера.

Теорема 4. *Любая связная сетка C на сфере имеет эйлерову характеристику, равную двум.*

Доказательство. Обозначим через l_1 произвольное ребро сетки C. Через l_2 обозначим какое-либо ребро, имеющее с l_1 хотя бы один общий конец (такое ребро существует, так как если бы к l_1 не примыкало более ни одно ребро, то сетка C была бы несвязной). Через l_3 обозначим какое-либо ребро, имеющее общий конец хотя бы с одним из ребер l_1, l_2. Затем выберем ребро l_4 (имеющее общий конец хотя бы с одним из ребер l_1, l_2, l_3) и т. д. Таким образом занумеруем все ребра: $l_1, l_2 \ldots, l_q$.

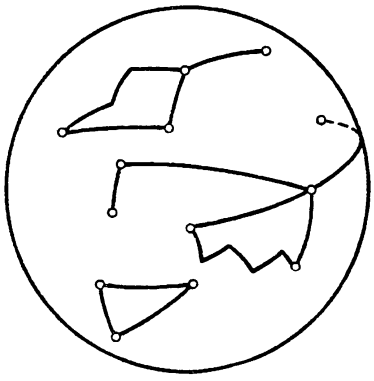


Рис. 16.

Сетку, состоящую из ребер l_1, $l_2, \ldots, l_k$ $(k \leqslant q)$ и всех вершин, являющихся концами этих ребер, мы обозначим через C_k. В результате мы определим на сфере S сетки $C_1, C_2, \ldots \ldots, C_q$ (причем, очевидно, сетка C_q совпадает с C). В силу способа нумерации ребер каждая из этих сеток *связна*.

Теперь мы докажем методом математической индукции, что эйлерова характеристика каждой из сеток $C_1, C_2, \ldots, C_q$ равна двум. Для сетки C_1 это очевидно: она имеет одно ребро l_1, две вершины и одну грань и потому

$$B - P + \Gamma = 2 - 1 + 1 = 2.$$

Пусть уже доказано, что сетка C_k $(k<q)$ имеет эйлерову характеристику, равную двум. Сетка C_{k+1} получается из C_k добавлением одного ребра l_{k+1}. Поэтому, обозначив через P_k число ребер сетки C_k, а через P_{k+1} — число ребер сетки C_{k+1}, мы получим

$$P_{k+1} = P_k + 1.$$

В силу способа нумерации ребер хотя бы один конец ребра l_{k+1} является вершиной сетки C_k. Поэтому могут представиться два следующих случая:

I. Оба конца ребра l_{k+1} являются вершинами сетки C_k.

II. Лишь один конец ребра l_{k+1} является вершиной сетки C_k.

Рассмотрим эти случаи раздельно.

Случай I. Так как оба конца ребра l_{k+1} являются вершинами сетки C_k, то число вершин B_{k+1} сетки C_{k+1} равно числу вершин B_k сетки C_k:

$$B_{k+1} = B_k.$$

Далее, ребро l_{k+1} целиком расположено в одной грани сетки C_k (ибо это ребро не имеет с C_k других общих точек, кроме концов). Обозначим эту грань через G. Ясно, что все грани сетки C_k, кроме G, остаются неизменными при проведении ребра l_{k+1}, т. е. они являются также гранями и для сетки C_{k+1}. Число этих граней равно $\Gamma_k - 1$, где Γ_k — число граней сетки C_k. Мы покажем сейчас, что при проведении ребра l_{k+1} грань G разбивается на две грани, откуда будет следовать, что число Γ_{k+1} граней сетки C_{k+1} равно $(\Gamma_k - 1) + 2$, т. е.

$$\Gamma_{k+1} = \Gamma_k + 1.$$

В самом деле, проведем дугу, пересекающую ребро l_{k+1}, и возьмем на ней две точки P, Q, лежащие по разные стороны этого ребра (рис. 17; на этом рисунке грань G заштрихована). Пусть теперь R — произвольная точка грани G, не лежащая на ребре l_{k+1}. Проведем в грани G дугу от точки R до какой-либо точки N ребра l_{k+1} и на этой дуге, не доходя до точки N, возьмем близкую к ней точку N'. Теперь, идя из точки N' вблизи ребра l_{k+1}, мы можем подойти либо к точке P, либо к точке Q (рис. 17, пунктирная линия). Итак, любая точка R грани G, не лежащая на ребре l_{k+1}, может быть соединена дугой, не пересекающей l_{k+1}, либо с точкой P, либо с Q. Поэтому G разбивается дугой l_{k+1} не более чем на две грани (одна, содержащая точку P, и другая, содержащая Q).

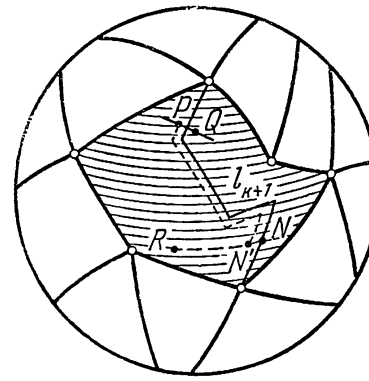


Рис. 17.

Однако не может ли получиться, что точки P и Q также лежат в одной грани (т. е. могут быть соединены дугой, не пересекающейся с сеткой C_{k+1}), так что при проведении ребра l_{k+1} из грани G мы получим только одну грань сетки C_{k+1}? Покажем, что этого не может быть. В самом деле, если бы существовала дуга, соединяющая точки P и Q и не пересекающаяся с сеткой C_{k+1}, то эта дуга вместе с дугой PQ образовала бы замкнутую линию, не пересекающуюся с сеткой C_k (рис. 18). Эта замкнутая линия разбивает сферу S на две области[1]), причем концы ребра l_{k+1} лежат в разных областях, так как ребро l_{k+1} пересекает один раз линию λ. Но так как концы ребра l_{k+1} принадлежат сетке C_k, то

[1]) Здесь мы пользуемся теоремой Жордана: *замкнутая линия, не пересекающая саму себя и расположенная на сфере (или на плоскости), разбивает поверхность сферы (или плоскость) на две области.* Доказательство теоремы Жордана для случая замкнутой ломаной имеется, например, в книге А. Д. Александрова [1].

получается, что сетка C_k не пересекается с замкнутой линией λ, но у сетки C_k есть вершины, лежащие по разные стороны линии λ. Это, однако, противоречит связности сетки C_k. Итак, точки P и Q не могут быть соединены дугой, не пересекающейся с C_{k+1}, и потому ребро l_{k+1} разбивает грань G ровно на две части.

Теперь мы знаем число ребер, вершин и граней сетки C_{k+1} и можем найти ее эйлерову характеристику:

$$B_{k+1}-P_{k+1}+\Gamma_{k+1}=B_k-(P_k+1)+(\Gamma_k+1)=B_k-P_k+\Gamma_k.$$

Итак, эйлерова характеристика сетки C_{k+1} равна эйлеровой характеристике сетки C_k, т. е., по предположению индукции, равна двум.

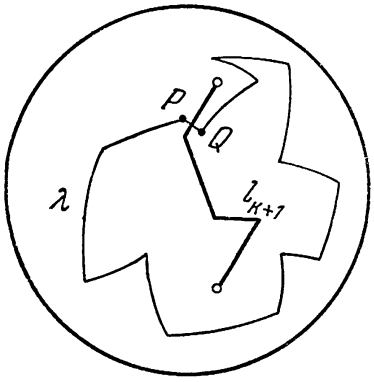


Рис. 18.

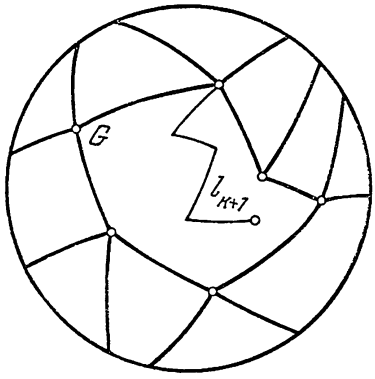


Рис. 19.

Случай II. Так как лишь один конец ребра l_{k+1} принадлежит сетке C_k (рис. 19), то при добавлении этого ребра появляется одна новая вершина, т. е.

$$B_{k+1}=B_k+1.$$

Число же граней не меняется:

$$\Gamma_{k+1}=\Gamma_k,$$

так как ребро l_{k+1} расположено целиком в одной грани G сетки C_k и не разбивает эту грань. Таким образом,

$$B_{k+1}-P_{k+1}+\Gamma_{k+1}=(B_k+1)-(P_k+1)+\Gamma_k=B_k-P_k+\Gamma_k=2.$$

Итак, индукция проведена, и теорема 4 полностью доказана. Вместе с тем мы получили еще одно доказательство теоремы Эйлера.

Как же будет обстоять дело для несвязных сеток? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 5. *Если сетка C на сфере состоит из m компонент ($m\geqslant 1$), то ее эйлерова характеристика равна $m+1$.*

Доказательство. Если $m=1$, т. е. сетка C связна, то утверждение теоремы 5 верно (см. теорему 4). Пусть справедливость теоремы 5 установлена уже при $m<m_0$. Рассмотрим какую-либо сетку C, имеющую m_0 компонент. Одну из компонент сетки C обозначим через C', а всю остальную часть сетки C — через C''. Тогда сетка C'' имеет m_0-1 компонент, и потому, по предположению индукции, ее эйлерова характеристика равна m_0, т. е.

$$B''-P''+\Gamma''=m_0,$$

где B'', P'', Γ'' — числа вершин, ребер и граней сетки C''. Пусть теперь l_1, l_2, ..., l_q — все ребра сетки C', занумерованные таким образом, что при любом $k(=1, \ldots, q)$ ребра $l_1, l_2, \ldots, l_k$ образуют связную сетку (ср. доказательство теоремы 4). Обозначим через C''_k $(k=1, \ldots, q)$ сетку, состоящую из сетки C'' и ребер $l_1, \ldots, l_k$; ясно, что сетка C''_q совпадает с C.

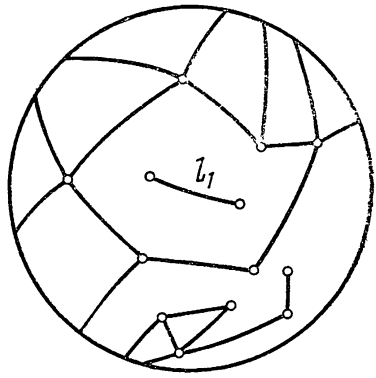


Рис. 20.

Индукция, проведенная при доказательстве теоремы 4, без всяких изменений проходит и здесь, и мы получаем, что все сетки $C''_1, \ldots, C''_k$ имеют одну и ту же эйлерову характеристику. Но сетка C''_1 получается из C'' добавлением одного ребра l_1, не имеющего с C'' общих вершин (рис. 20). Поэтому при переходе от C'' к C''_1 число граней не меняется, число ребер увеличивается на 1, а число вершин — на 2. Следовательно, эйлерова характеристика сетки C''_1, а значит и сетки $C''_q=C$, равна

$$(B''+2)-(P''+1)+\Gamma''=(B''-P''+\Gamma'')+1=m_0+1.$$

Проведенная индукция и доказывает теорему 5.

Следствие. Для любой сетки на сфере справедливо неравенство

$$B-P+\Gamma\geqslant 2,$$

т. е. эйлерова характеристика любой сетки на сфере не меньше двух.

§ 2. Комбинаторный (топологический) тип многогранника. Теорема Штейница

2.1. Комбинаторные свойства многогранников. Изоморфизм. Во многих вопросах теории многогранников бывает важно знать не форму и размеры граней рассматриваемого многогранника, а лишь число сторон каждой грани и общую схему соединения граней

в поверхность многогранника. К числу таких вопросов относится и вопрос о связи между числами граней, вершин и ребер многогранника, рассмотренный в предыдущем параграфе. Свойства многогранника, связанные лишь с общей схемой соединения его граней, называются *комбинаторными* или *топологическими* свойствами многогранника. Остальные свойства многогранника называются его *метрическими* свойствами; такими свойствами являются, например, величина поверхности или объема многогранника, величины его линейных или двугранных углов.

Более точно комбинаторные свойства многогранника могут быть охарактеризованы при помощи понятия изоморфизма. Два многогранника называются *изоморфными*, если между вершинами, ребрами

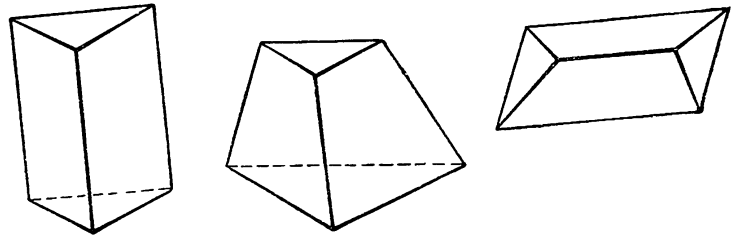


Рис. 21.

и гранями одного многогранника и соответственно вершинами, ребрами и гранями другого можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором инцидентным между собой вершинам, ребрам и граням первого многогранника отвечают инцидентные вершины, ребра и грани второго [1]). Так, например, треугольная призма, треугольная усеченная пирамида и «клин» (рис. 21) изоморфны между собой. О двух изоморфных многогранниках говорят также, что они являются многогранниками *одного комбинаторного* (или *топологического*) *типа*.

Теперь можно сказать, что комбинаторные свойства многогранника — это те его свойства, которые присущи наряду с этим многогранником также любому изоморфному ему, т. е. свойства целого комбинаторного типа многогранников.

При изучении комбинаторных свойств многогранника мы всегда можем заменить его любым изоморфным ему многогранником, т. е. можем задавать многогранники лишь с точностью до изоморфизма. Чтобы задать какой-нибудь многогранник с точностью до изоморфизма, достаточно перечислить все его вершины A, B, C, ..., ребра a, b,

[1]) Вершины, ребра и грани называются *инцидентными*, если они примыкают друг к другу. Например, ребро и грань инцидентны, если это ребро является одной из сторон рассматриваемой грани.

c, ... и грани α, β, γ, ... и указать, какие из них являются попарно инцидентными. При этом, разумеется, должны выполняться следующие условия, непосредственно вытекающие из приведенных в § 1 определений простого многоугольника и простого многогранника, а также из геометрического смысла отношения инцидентности (мы обозначаем далее отношение инцидентности знаком $\sim$; так например, запись $\alpha \sim A$ означает, что грань α инцидентна вершине A):

I. Отношение инцидентности (грани и ребра, грани и вершины, ребра и вершины) симметрично, т. е., например, если $\alpha \sim A$, то и $A \sim \alpha$.

II. Отношение инцидентности транзитивно: если $A \sim a$, $a \sim \alpha$, то $A \sim \alpha$.

III. Если $A \sim \alpha$, то существуют два и только два ребра, инцидентных как вершине A, так и грани α.

IV. Если каждая из двух заданных граней инцидентна каждой из двух вершин, то существует одно и только одно ребро, инцидентное обеим этим граням и обеим вершинам.

Va. Каждое ребро инцидентно двум и только двум вершинам.

Vб. Каждое ребро инцидентно двум и только двум граням.

VIa. Для любых двух вершин A и B можно так выбрать ребра $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, чтобы в цепочке $A, a_1, A_1, a_2, A_2, \ldots, A_{n-1}, a_n, B$ каждые два соседних элемента были взаимно инцидентными; если вершины A и B инцидентны одной и той же грани α, то все вершины A_i и ребра a_i можно выбрать так, чтобы они были инцидентными той же грани α.

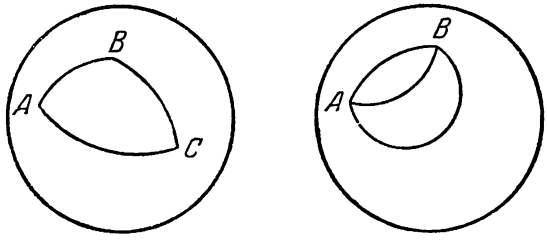
VIб. Для любых двух граней α и β можно так выбрать ребра $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и грани $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, чтобы в цепочке $\alpha, a_1, \alpha_1, a_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, a_n, \beta$ каждые два соседних элемента были взаимно инцидентны; если грани α и β инцидентны одной и той же вершине A, то и все грани α_i и ребра a_i можно выбрать так, чтобы они были инцидентными той же вершине A.

2.2. Абстрактный многогранник. Желая рассматривать лишь комбинаторные свойства многогранников, мы, естественно, приходим к понятию абстрактного многогранника. *Абстрактным многогранником* называется (конечная) совокупность произвольных элементов, называемых вершинами, ребрами и гранями, для которых каким-то образом определено отношение инцидентности (т. е. указано, какие вершины, ребра, грани считаются инцидентными), удовлетворяющее перечисленным выше условиям I—VI. Понятие абстрактного многогранника отражает, таким образом, взятые в чистом виде свойства инцидентности вершин, ребер и граней конкретных пространственных многогранников. Мы будем далее без специальных оговорок пользоваться по отношению к абстрактным многогранникам обычной геометрической терминологией, называя каждую грань, инцидентную n вершинам, n-угольником, инцидентные этой грани ребра — ее сторо-

нами и т. п. В отличие от абстрактных многогранников те многогранники, о которых говорилось в § 1, мы будем называть *пространственными многогранниками*.

Тривиальными примерами абстрактных многогранников являются одна грань (без ребер и вершин) или одна вершина (без ребер и граней), а также многогранник, состоящий из одной грани и одной вершины (не инцидентных между собой).

Столь же тривиальными можно считать абстрактные многогранники, определяемые разбиением поверхности сферы на две области (грани), ограниченные тремя дугами (ребрами), соединяющими попарно три точки (вершины, рис. 22, *а*), или на три области (грани) — тремя дугами (ребрами), соединяющими две точки (вершины, рис. 22, *б*). Мы будем далее исключать эти случаи из рассмотрения, предполагая, что каждый рассматриваемый многогранник имеет не менее трех вершин и не менее трех граней.



а) *б)*

Рис. 22.

Из определения абстрактного многогранника (и принятого только что условия) вытекают следующие его простые свойства.

1°. *Две вершины абстрактного многогранника могут принадлежать не более чем одному ребру.*

В самом деле, предположим, что вершины A и B принадлежат двум ребрам a и b. По условию Vб каждое из этих ребер должно принадлежать двум граням; пусть $a \sim \alpha_1$, $a \sim \alpha_2$ $b \sim \beta_1$, $b \sim \beta_2$. Обе грани α_1 и α_2 не могут совпадать с гранями β_1 и β_2, так как это противоречило бы условию IV. Далее, если, например, α_1 совпадает с β_1, а грани α_2 и β_2 различны, то в силу того же условия IV вершины A и B должны принадлежать еще одному ребру C, общему для граней α_2 и β_2, т. е. мы приходим к абстрактному многограннику, изображенному на рис. 22, *б* и исключенному нами из рассмотрения. Наконец, если грани α_1, α_2, β_1, β_2 все различны, то в силу того же условия IV через вершину A должны проходить три стороны грани α_1 (принадлежащие кроме нее соответственно α_2, β_1, β_2), что противоречит условию III.

2°. *Две грани абстрактного многогранника не могут иметь более одного общего ребра.*

Доказывается аналогично предыдущему [1]).

---

[1]) Свойства 2° и 4° можно также получить из свойств 1° и 3° с помощью *принципа двойственности* (см. ниже, стр. 407).

3°. *Каждая вершина абстрактного многогранника принадлежит не менее чем трем граням* (а следовательно, и ребрам).

В самом деле, в силу условия VIa каждая вершина принадлежит хотя бы одному ребру, а значит (в силу условий Vб и II), по крайней мере двум граням. Но если бы некоторая вершина A принадлежала в точности двум граням, то эти грани имели бы (по условию III) два общих ребра, что противоречило бы свойству 2°.

4°. *Каждая грань абстрактного многогранника имеет не менее трех вершин* (а следовательно, и сторон).

Доказывается аналогично предыдущему.

2.3. Теорема Штейница. Ясно, что всякий пространственный многогранник можно рассматривать как некоторый абстрактный многогранник. Естественно возникает обратный вопрос: всегда ли существует пространственный многогранник, изоморфный заранее данному абстрактному многограннику, т. е. всякий ли абстрактный многогранник может быть реализован в виде некоторого пространственного многогранника. Оказывается, в наиболее важном случае, а именно для абстрактных многогранников с эйлеровой характеристикой, равной 2, на этот вопрос можно ответить положительно, даже ограничиваясь лишь выпуклыми пространственными многогранниками. Этот факт был доказан немецким математиком Э. Штейницем.

Теорема Штейница. *Всякий абстрактный многогранник, эйлерова характеристика которого равна 2, может быть реализован в виде некоторого выпуклого многогранника.*

Доказательство теоремы Штейница не может быть проведено лишь элементарно-геометрическими методами: оно опирается на некоторые вспомогательные предложения (см. ниже, леммы 1 и 2), которые могут быть доказаны лишь с привлечением топологических соображений.

Не останавливаясь на доказательстве этих вспомогательных предложений, мы изложим здесь элементарно-геометрическую часть доказательства теоремы Штейница; она сама по себе достаточно поучительна.

Основную роль в доказательстве теоремы Штейница играет одно преобразование абстрактных многогранников, которое мы сейчас и рассмотрим.

Пусть α_1 и α_2 — две грани абстрактного многогранника M, имеющие общую сторону AB. Произведем над M следующие операции:

1) исключим AB из числа ребер многогранника M;

2) заменим грани α_1 и α_2 одной новой гранью α, считая инцидентными ей все стороны и вершины граней α_1 и α_2 (кроме стороны AB);

3) если после исключения ребра AB к одной из вершин A и B, например к A, примыкают только два ребра AA_1 и AA_2 многогранника M, исключим A из числа вершин и заменим эти ребра одним ребром A_1A_2.

Такое преобразование абстрактного многогранника M назовем *объединением* его граней α_1 и α_2. Например, объединяя две грани куба (рис. 23, *а*), получим абстрактный многогранник, изоморфный треугольной призме (рис. 23, *б*).

Легко видеть, что при объединении двух граней абстрактного многогранника сохраняются все условия, входящие в определение абстрактного многогранника, за исключением условия IV, которое может и нарушиться. Так, например, если в пирамиде $SABCDE$ (рассматриваемой как абстрактный многогранник) объединить основание $ABCDE$ с боковой гранью SAB (рис. 24), то грань SCD и новая (объединенная) грань $SCDE$ будут иметь общие вершины S и D, но не будут, вопреки условию IV, иметь общего ребра, соединяющего эти вершины. Таким образом, совокупность вершин, ребер и граней, получаемая в результате объединения двух каких-нибудь граней абстрактного многогранника, может уже не быть абстрактным многогранником. Однако имеет место следующая

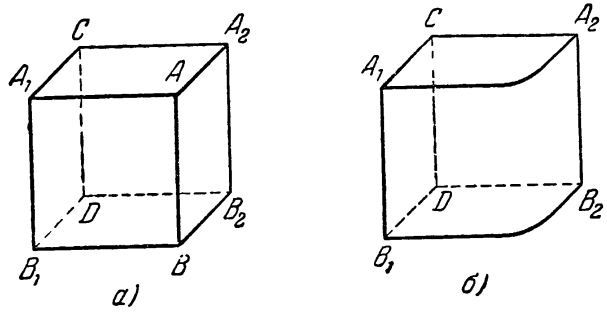


Рис. 23.

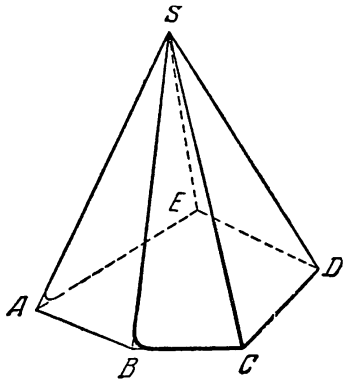


Рис. 24.

Лемма 1. *Во всяком абстрактном многограннике, эйлерова характеристика которого равна 2* (за исключением многогранника, изоморфного тетраэдру), *можно найти такие две смежные грани, при объединении которых получается снова абстрактный многогранник.*

Отметим попутно, что объединение двух граней абстрактного многогранника не меняет его эйлеровой характеристики. В самом деле, эта операция, уменьшая число граней на 1, одновременно исключает одно ребро; если же при этом исключается и какая-нибудь вершина, то число ребер уменьшается еще на 1. Следовательно, величина $B+Г-P$ остается во всех случаях неизменной.

Доказательство теоремы Штейница проводится индукцией по числу n граней многогранника. Рассмотрим сначала абстрактный многогранник с наименьшим возможным числом граней. Если абстрактный многогранник имеет k-угольную грань, то он должен иметь также k смежных с ней граней, т. е. всего не менее $k+1$ граней. Так как во всяком случае $k \geqslant 3$ (свойство 4° абстрактного многогранника), то всякий абстрактный многогранник имеет не менее четырех граней. Из сказанного следует также, что многогранник с четырьмя гранями может иметь только треугольные грани. Но абстрактный многогранник с четырьмя треугольными гранями существует, очевидно, только один: он соответствует известному нам пространственному многограннику — тетраэдру. Таким образом, для $n=4$ теорема Штейница справедлива.

Предположим, что эта теорема доказана для некоторого значения n, т. е. что всякий абстрактный многогранник (с эйлеровой характеристикой, равной 2), имеющий n граней, можно реализовать в виде выпуклого многогранника.

Рассмотрим произвольный абстрактный многогранник M, имеющий $n+1$ граней. В силу леммы 1 можно объединить некоторые две смежные

грани α и β этого многогранника так, чтобы в результате получился снова некоторый абстрактный многогранник M_0. Пусть A и B — общие вершины граней α и β, а γ — новая грань абстрактного многогранника M_0. Этот абстрактный многогранник имеет уже n граней; следовательно, по предположению индукции, существует пространственный выпуклый многогранник $\overline{M}_0$ (рис. 25), изоморфный M_0. Пусть $\overline{\gamma}$ — грань многогранника M_0, отвечающая абстрактной грани γ, а $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — вершины грани $\overline{\gamma}$, отвечающие абстрактным вершинам A и B грани γ (если грань γ не имеет, например, вершины A, т. е. если эта вершина оказалась исключенной при объединении граней α и β, то в качестве $\overline{A}$ можно выбрать произвольную точку соответствующей стороны многоугольника $\overline{\gamma}$). Отрезок $\overline{A}\overline{B}$ делит выпуклый многоугольник $\overline{\gamma}$ на два многоугольника $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$, отвечающих абстрактным граням α и β. Рассматривая эти многоугольники $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ как новые грани (взамен одной грани $\overline{\gamma}$), мы получим из многогранника $\overline{M}_0$

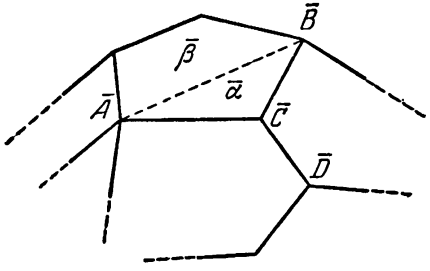


Рис. 25.

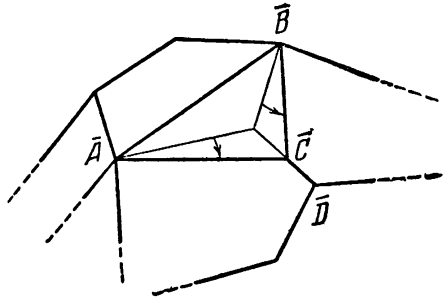


Рис. 26.

новый пространственный многогранник $\overline{M}_1$, который, очевидно, будет изоморфен исходному абстрактному многограннику M. Однако многогранник $\overline{M}_1$ не является выпуклым, так как две его грани $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ лежат в одной плоскости. Деформируем теперь многогранники $\overline{M}_1$ так, чтобы превратить его в выпуклый.

Чтобы уяснить себе, как это делается, рассмотрим сначала простейший случай: предположим, что грань $\overline{\alpha}$ есть треугольник $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ и что к его вершине $\overline{C}$, кроме ребер $\overline{A}\overline{C}$ и $\overline{B}\overline{C}$, примыкает еще только одно ребро $\overline{C}\,\overline{D}$ (именно этот случай изображен на рис. 26). Повернем плоскость грани $\overline{\alpha}$ вокруг прямой $\overline{A}\overline{B}$ так, чтобы ее новое положение пересекало отрезок $\overline{C}\overline{D}$ в его внутренней точке, и примем эту точку пересечения за новое положение вершины $\overline{C}$. В результате мы получим выпуклый многогранник $\overline{M}$ (рис. 26), изоморфный многограннику $\overline{M}_1$, а значит и абстрактному многограннику M. Этот многогранник $\overline{M}$ и представляет собой искомую реализацию абстрактного многогранника M.

Последнее наше рассуждение существенно опирается на то, что вершина $\overline{C}$ принадлежит, кроме грани $\overline{\alpha}$, еще только двум граням. Если бы таких граней было хотя бы три, то их плоскости однозначно определяли бы положение точки $\overline{C}$, и никакое вращение грани $\overline{\alpha}$ вокруг ребра $\overline{A}\overline{B}$ не было бы возможно (при сохранении неподвижными плоскостей всех остальных граней) без нарушения изоморфизма с многогранником $\overline{M}_1$.

Чтобы завершить доказательство теоремы Штейница в общем случае, мы уточним заключительный этап проведенного выше рассуждения: именно, мы покажем, что всегда можно, не нарушая изоморфизма многогранников $\overline{M}$ и $\overline{M}_1$, повернуть интересующую нас грань $\overline{\alpha}$, если при этом смещать одновременно и плоскости остальных граней. Возможность согласовать между собой смещения всех граней (а следовательно, и вершин) многогранника $\overline{M}_1$ основывается на следующем вспомогательном предложении.

Рассмотрим совершенно произвольную совокупность N граней и вершин данного абстрактного многогранника; будем всякую такую совокупность называть для краткости просто *набором*. Назовем теперь *порядком* произвольной грани (или вершины), входящей в набор N, число вершин (соответственно граней), принадлежащих набору N и инцидентных этой грани (вершине). Для многогранников с эйлеровой характеристикой, равной 2, имеет место следующая

Лемма 2. *Во всяком наборе, состоящем более чем из одного элемента, существует по крайней мере два элемента (т. е. две грани, или две вершины, или одна грань и одна вершина), порядки которых не превышают* 3.

Возвращаясь к доказательству теоремы Штейница в общем случае, мы имеем многогранник $\overline{M}_1$, изоморфный данному абстрактному многограннику M, но не являющийся выпуклым из-за того, что две его грани $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ лежат в одной плоскости.

Пусть m есть общее число вершин и граней многогранника $\overline{M}_1$: $m = B + \Gamma$. Рассмотрим набор N, состоящий из всех граней и вершин этого многогранника; в силу доказанной леммы в этом наборе содержится не менее двух элементов порядка $\leqslant 3$. Обозначим один из таких элементов через a_m, причем выберем его отличным от грани $\overline{\alpha}$ (если эта грань имеет порядок 3). Затем рассмотрим новый набор N_1, состоящий из всех граней и вершин многогранника $\overline{M}_1$, за исключением грани или вершины a_m. В силу той же леммы и в этом наборе имеются хотя бы два элемента порядка $\leqslant 3$; обозначим один из них (отличный от грани $\overline{\alpha}$) через a_{m-1}. После этого рассмотрим набор N_2, получаемый из N_1 исключением грани или вершины a_{m-1}, и обозначим один из его элементов порядка $\leqslant 3$ (отличный от грани $\overline{\alpha}$) через a_{m-2}. Продолжая действовать таким же образом, мы придем в конце концов к набору N_{m-1}, состоящему из одной грани $\overline{\alpha}$; обозначим эту грань через a_1. В результате все грани и вершины многогранника M_1 окажутся расположенными в последовательность

$$\overline{\alpha} \equiv a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{m-1},\ a_m \tag{4}$$

так, что каждый элемент этой последовательности будет инцидентен не более чем с тремя из предшествующих элементов.

Повернем теперь плоскость грани $\overline{\alpha} \equiv a_1$ вокруг ребра $\overline{AB}$ (общего ребра граней $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$) в том направлении, в котором расположены от нее смежные с ней грани многогранника $\overline{M}_1$, на достаточно малый угол, после чего перейдем к элементу a_2 последовательности (4). Если этот элемент инцидентен a_1, т. е. есть одна из вершин грани $\overline{\alpha}$, то примем за новое положение этой вершины какую-нибудь точку, принадлежащую новому положению плоскости $\overline{\alpha}$ и достаточно близкую к старому положению вершины a_2 (например, точку, наиболее близкую к старому положению a_2); если же элемент a_2 не инцидентен a_1, будем считать его новое положение совпадающим со старым. Аналогичным образом определим новое положение элемента a_3, затем — элемента a_4 и т. д. Каждый раз, определяя новое

положение элемента a_k, мы будем в случае, когда он не инцидентен ни одному из предшествующих элементов последовательности (4), считать это новое положение совпадающим со старым; если a_k инцидентен одному или двум предшествующим элементам, например a_{k-2} и a_{k-1}, мы выберем новое положение a_k близким к старому и инцидентным уже определенным ранее новым положениям элементов a_{k-1} и a_{k-2}; наконец, если элемент a_k инцидентен трем предшествующим элементам, его новое положение однозначно определится новыми положениями этих трех элементов (плоскость грани определяется положениями трех вершин этой грани, вершина определяется положениями трех примыкающих к ней граней).

В результате указанного смещения граней и вершин многогранника $\overline{M}_1$ мы получим новый многогранник $\overline{M}$, являющийся выпуклым (в силу выбранного направления вращения грани α) и изоморфным многограннику $\overline{M}_1$ (так как взаимно инцидентным вершинам и граням одного из этих многогранников соответствуют взаимно инцидентные вершины и грани второго). Таким образом, многогранник $\overline{M}$ и представляет собой реализацию абстрактного многогранника M, существование которой утверждает теорема Штейница.

Из теоремы Штейница вытекает также

Следствие. *Всякий многогранник нулевого рода изоморфен некоторому выпуклому многограннику.*

2.4. Двойственность. С понятием абстрактного многогранника и теоремой Штейница связан еще один интересный геометрический факт. Возвращаясь к определению абстрактного многогранника, легко заметить, что описываемые этим определением свойства граней в точности таковы же, как и свойства вершин, т. е. это определение не изменится, если всюду в нем слово «грань» заменить словом «вершина» и наоборот; условия I—IV при этом сохранят свое содержание, условие Va превратится в условие Vб и наоборот. Это означает, что, имея какой-нибудь абстрактный многогранник M и называя его грани «вершинами», ребра — по-прежнему «ребрами», а вершины — «гранями», мы получим совокупность «вершин», «ребер» и «граней», снова удовлетворяющую всем требованиям определения абстрактного многогранника, т. е. некоторый новый абстрактный многогранник M_1.

Два абстрактных многогранника M и M_1, между элементами которых можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы вершинам, ребрам и граням одного отвечали соответственно грани, ребра и вершины второго и чтобы при этом инцидентным парам элементов одного многогранника отвечали инцидентные пары элементов второго, называются *двойственными* друг другу. Это определение весьма сходно с определением изоморфизма многогранников; разница состоит лишь в том, что вершинам одного многогранника в случае двойственности должны отвечать не вершины, а грани второго (и наоборот). Как мы видели, *для каждого абстрактного многогранника существует двойственный ему абстрактный многогранник.*

Теорема Штейница позволяет распространить этот результат и на пространственные многогранники нулевого рода: *для каждого пространственного многогранника нулевого рода существует двойственный ему пространственный* (даже выпуклый) *многогранник.*

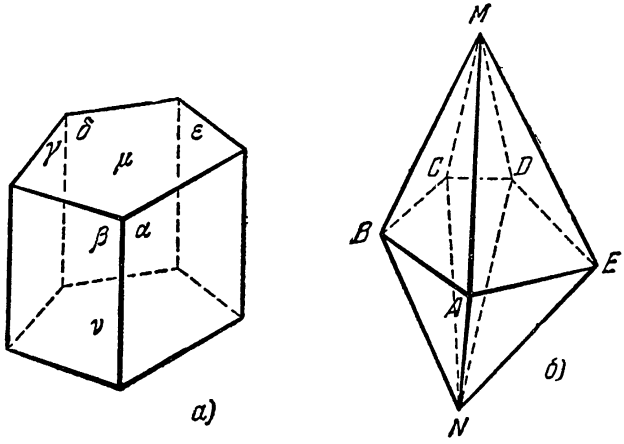


Рис. 27.

Так, например, n-угольной призме (рис. 27, *а*), двойствен многогранник, называемый n-угольной *бипирамидой* (рис. 27, *б*); n-угольной пирамиде двойственна снова n-угольная пирамида (рис. 28);

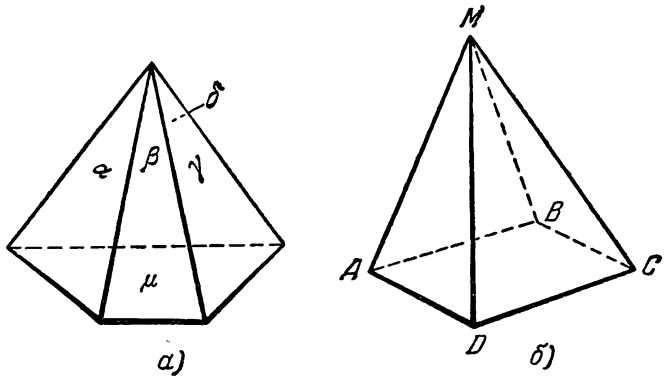


Рис. 28.

многограннику, изображенному на рис. 29,*а*, двойствен многогранник, изображенный на рис. 29,*б*. Следует, однако, иметь в виду, что соотношение двойственности связывает между собой не отдельные конкретные пространственные многогранники, а целые комбинаторные типы многогранников, т. е. в конечном счете снова абстрактные многогранники.

Двойственные друг другу абстрактные многогранники обладают сходными комбинаторными свойствами, но только свойства в е р ш и н одного многогранника будут свойствами г р а н е й другого. Другими словами, из всякой теоремы, выражающей комбинаторное свойство некоторого многогранника M, можно получить другую теорему, относящуюся к многограннику, двойственному M, заменив всюду в формулировке первой теоремы слово «грань» словом «вершина» и наоборот. Эта новая теорема называется *двойственной* первой; она будет верна или неверна одновременно с первой. В частности, если какая-нибудь теорема выражает общие свойства многогранников, т. е. относится к п р о и з в о л ь н о м у многограннику, то и двойственная ей теорема будет относиться к произвольному многограннику.

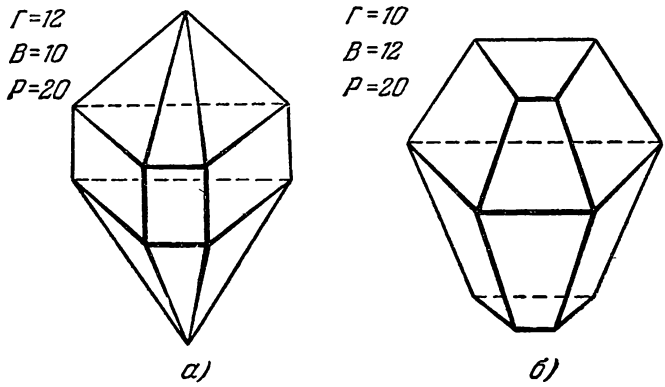


Рис. 29.

Примерами двойственных теорем могут служить установленные выше (см. стр. 402—403) свойства 1°—4° абстрактных многогранников: свойство 2° двойственно свойству 1°, а свойство 4° — свойству 3°. Отсюда ясно, между прочим, каким образом можно получить опущенные доказательства свойств 2° и 4°: чтобы доказать, например, свойство 2°, достаточно провести рассуждение, двойственное доказательству свойства 1°, т. е. заменить всюду в этом доказательстве слово «грань» словом «вершина» и наоборот. Рекомендуем читателю самостоятельно выполнить это полезное упражнение. Заметим еще, что теорема Эйлера, доказанная выше, является примером предложения, которое двойственно самому себе (для двойственного многогранника числа $Г$, $В$, $Р$ заменяются на $В$, $Г$, $Р$, а алгебраическая сумма $Г+В-Р$ не меняется). В частности, двойственным для многогранника нулевого рода будет снова некоторый многогранник нулевого рода.

Отмеченное выше положение, связывающее между собой различные комбинаторные теоремы, может быть названо *принципом двойственности* (для многогранников). Следует отметить, что этот принцип

установлен нами лишь по отношению к комбинаторным (топологическим) свойствам многогранников. Однако, как мы увидим далее, такая же двойственность распространяется и на некоторые метрические свойства многогранников.

§ 3. Развертка многогранника. Теорема Коши

3.1. Развертка многогранника. Существование многогранника с данной разверткой. Практически, когда хотят изготовить модель многогранника, ее часто склеивают из плоских многоугольников — граней многогранника. Для этого нужно не только располагать набором

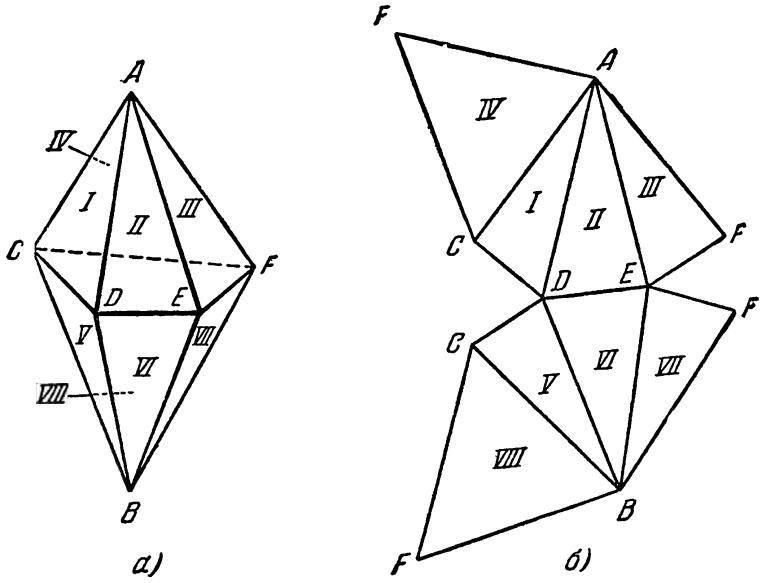


Рис. 30.

многоугольников, которые должны служить гранями многогранника, но также знать, какие их стороны следует склеивать между собой. Совокупность многоугольников, соответственно равных граням некоторого многогранника, вместе с указанием того, какие их стороны и вершины представляют собой одни и те же ребра и вершины многогранника, называется *разверткой* этого многогранника. Так, например, развертка многогранника, изображенного на рис. 30,*а*, показана на рис. 30, *б*; здесь часть сторон, подлежащих склейке, уже совмещены друг с другом, а остальные стороны и вершины, которые должны быть склеены, обозначены одинаковыми буквами.

Ясно, что имея многогранник, мы всегда можем построить его развертку. Гораздо менее ясно, можно ли, наоборот, задав заранее набор многоугольников и схему склеивания их сторон и вершин, быть уверенным в том, что тем самым определен некоторый многогранник — и если это так, то сколько различных многогранников мы можем таким образом получить. Иными словами, возникает вопрос о *существовании* и *единственности* многогранника с заранее заданой разверткой. Мы рассмотрим этот вопрос лишь в отношении выпуклых многогранников.

Заданная совокупность плоских многоугольников (вместе с заданной схемой склеивания их сторон и вершин) определяет комбинаторный тип многогранника, а также форму и размеры его граней. Комбинаторный тип согласно теореме Штейница, всегда может быть реализован некоторым выпуклым многогранником, если только выполняются следующие условия:

1) должны выполняться все три требования, фигурирующие в определении многогранника (см. § 1);

2) число вершин, граней и ребер развертки[1]) должно удовлетворять теореме Эйлера:

$$B+Г-P=2.$$

Кроме того, для существования выпуклого многогранника с данной разверткой необходимо еще выполнение следующих метрических условий:

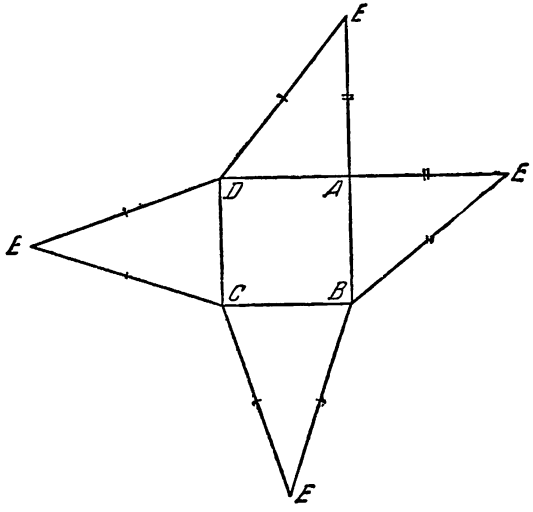


Рис. 31.

3) склеиваемые стороны многоугольников должны иметь одинаковую длину;

4) сумма плоских углов при каждой из вершин развертки должна быть меньше 360°.

Условия 1)—4), необходимость которых очевидна, не являются еще достаточными для существования искомого многогранника. Так, например, совокупность многоугольников, изображенная на рис. 31, хотя удовлетворяет всем этим условиям, все же не

[1]) При этом, разумеется, стороны (и вершины) многоугольников, подлежащие склейке, должны считаться одним ребром (одной вершиной) развертки.

является разверткой никакого многогранника. В самом деле, если бы существовал многогранник с такой разверткой, то его ребро EA было бы перпендикулярно плоскости $ABCD$ (так как $EA \perp AB$ и $EA \perp AD$), откуда в силу известной теоремы о трех перпендикулярах следовало бы, что $BE \perp BC$, вопреки данной на развертке величине угла CBE.

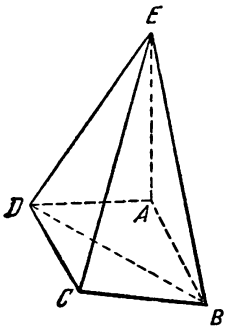


Рис. 32.

Оказывается, однако, что перечисленные выше условия 1)—4) обеспечивают существование многогранника (и притом выпуклого), если не требовать, чтобы этот многогранник имел в точности данную развертку, а допустить объединение некоторых смежных многоугольников данной развертки в одну грань и, наоборот, разбиение некоторых многоугольников на несколько граней (так, например, на. рис. 31 достаточно разбить четырехугольник $ABCD$ диагональю BD на два треугольника, чтобы получить развертку некоторого выпуклого многогранника; см. рис. 32). Этот факт был доказан в 1942 г. ленинградским математиком А. Д. Александровым [1]).

3.2. Теорема Коши. Основные леммы. Перейдем теперь к вопросу о единственности многогранника, имеющего данную развертку. Каждому, кто клеил многогранники из разверток, из опыта известно, что по заданной развертке мы можем получить только один выпуклый многогранник с точностью до положения в пространстве[2]). Этот факт был известен еще Евклиду (жившему в III веке до нашей эры), однако первое более или менее строгое доказательство этого факта было дано лишь в 1813 г. знаменитым французским математиком О. Коши. Хотя доказательство, данное Коши, содержало некоторый пробел (который будет указан ниже), замеченный и восполненный позже Штейницем, теорема о единственности многогранника с данной разверткой по праву носит название теоремы Коши.

---

[1]) Доказательство теоремы А. Д. Александрова совсем не элементарно, и мы не будем его приводить; читатель, желающий ознакомиться с этим доказательством, сможет найти его в указанной в конце статьи книге А. Д. Александрова [1].

[2]) Собственно говоря, из данной развертки можно получить два разных многогранника, симметричных относительно плоскости; чтобы устранить эту неопределенность, можно было бы указывать на какой-нибудь грани развертки, какая сторона ее должна принадлежать внешней, а какая—внутренней стороне поверхности многогранника. Мы далее не будем различать таких многогранников, считая, что симметричность есть частный случай равенства многогранников (хотя два таких многогранника, вообще говоря, не могут быть совмещены друг с другом перемещением в пространстве).

Теорема Коши. *Если все грани одного из двух изоморфных выпуклых многогранников M и M_1 равны соответствующим граням другого, то эти многогранники равны.*

Очевидно, для доказательства равенства многогранников, удовлетворяющих условию теоремы Коши, достаточно доказать равенство двугранных углов при всех их соответственных ребрах. Доказательство основывается на следующих леммах.

Лемма 1. *Если, не изменяя длин сторон (плоской) выпуклой ломаной линии $A_1A_2\ldots A_n$, увеличить некоторые из ее углов так, чтобы полученная ломаная снова была выпуклой, то расстояние между концами этой ломаной увеличится.*

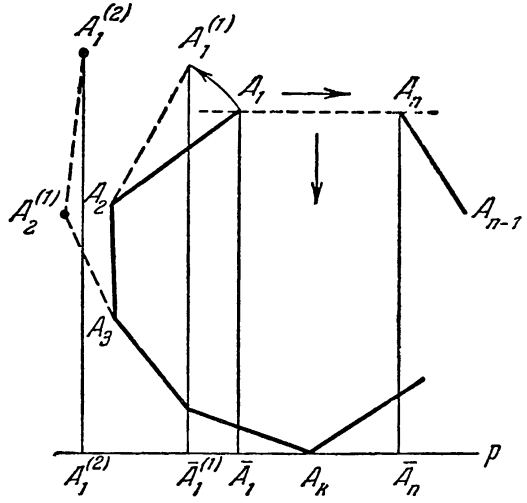


Рис. 33.

Доказательство. Для упрощения рассуждений введем некоторые вспомогательные термины. Будем называть прямую A_1A_n (и любую параллельную ей) горизонтальной; направление от точки A_1 к точке A_n будем характеризовать словами «слева направо»; наконец, направление, перпендикулярное прямой A_1A_n и обращенное в ту сторону от этой прямой, с которой расположена данная ломаная, будем характеризовать словами «сверху вниз» (рис. 33).

Через самую нижнюю вершину A_k данной ломаной проведем горизонтальную прямую p (таких вершин может оказаться две — A_k и A_{k+1}; в этом случае сторона A_kA_{k+1} будет лежать на прямой p). Очевидно, вся ломаная $A_1A_2\ldots A_n$ будет лежать в полосе, заключенной между прямыми A_1A_n и p. Спроектируем вершины A_1 и A_n ортогонально на прямую p и обозначим их проекции соответственно через $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_n$.

Пусть теперь нам нужно увеличить углы ломаной $A_1A_2\ldots A_n$ до некоторых заранее данных величин (меньших 180°, так как полученная ломаная должна остаться выпуклой). Увеличим сначала (если $2<k$) угол A_2 до требуемой величины (если он вообще должен быть увеличен), повернув для этого сторону A_2A_1 вокруг точки A_2 (против часовой стрелки); пусть точка A_1 займет при этом положение $A_1^{(1)}$, а ее проекция — положение $\bar{A}_1^{(1)}$ (см. рис. 33). Очевидно, обе точки, A_1 и $A_1^{(1)}$, лежат выше точки A_2 (ибо отрезок $A_2A_1^{(1)}$ должен лежать внутри угла между лучом A_2A_1 и продолжением отрезка A_3A_2

за точку A_2); поэтому при указанном повороте проекция точки A_1 будет перемещаться справа налево. Следовательно, точка $\overline{A}_1^{(1)}$ будет лежать левее точки $\overline{A}_1$. Увеличим затем до нужной величины угол A_3 (если $3<k$); для этого повернем вокруг точки A_3 как жесткое целое ломаную $A_1^{(1)}A_2A_3$, или же, что равносильно этому, отрезок $A_3A_1^{(1)}$. Так же как и ранее, проекция точки A_1 при этом сместится влево. Поступим таким же образом с углами $A_4, \ldots, A_{k-1}$. Затем таким же путем увеличим углы $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_{k+1}$ правой половины данной ломаной; при этом проекция вершины A_n может сместиться только вправо. Наконец, увеличим угол A_k, поворачивая вокруг точки A_k обе половины ломаной (левую — против часовой стрелки, а правую — по часовой стрелке) так, чтобы обе эти половины оставались выше прямой p.

В результате мы получим новую ломаную $A_1'A_2' \ldots A_n'$, причем отрезок $\overline{A}_1'\overline{A}_n'$, соединяющий проекции ее концов, будет содержать внутри себя отрезок $\overline{A}_1\overline{A}_n$. Таким образом, $\overline{A_1A_n}<\overline{A_1'A_n'}$. Но $\overline{A}_1\overline{A}_n=A_1A_n$ (так как $A_1A_n \| p$), а $\overline{A_1'A_n'} \leqslant A_1'A_n'$. Следовательно, $A_1A_n < A_1'A_n'$, и лемма 1 доказана.

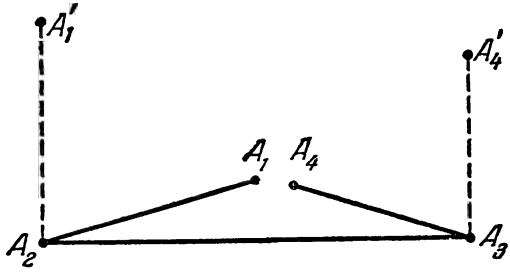


Рис. 34.

Отметим, что именно в доказательстве Коши леммы 1 был допущен пробел, лишивший необходимой полноты все данное им доказательство теоремы. Именно, доказательство Коши существенным образом опиралось на тот факт, что, увеличивая по одному углы данной ломаной, мы после каждого шага получаем снова выпуклую ломаную. При этом упускалось из виду, что некоторые из полученных промежуточных ломаных могут быть и невыпуклыми. О такой возможности свидетельствует пример ломаной $A_1A_2A_3A_4$, изображенной на рис. 34: если каждый из ее углов A_2 и A_3 требуется увеличить до прямого (в результате чего, очевидно, получится снова выпуклая ломаная), то, увеличив до нужной величины лишь один из этих углов, мы придем к невыпуклой ломаной. Приведенное выше доказательство леммы 1 никак не было связано с выпуклостью промежуточных ломаных.

Лемма 2. *Пусть выпуклый многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ деформируется в выпуклый же многоугольник так, что длины его сторон при этом не меняются, а из углов хотя бы один изменяет свою величину. Отметим знаком «плюс» вершины тех углов данного многоугольника, которые при этой деформации*

увеличиваются, а знаком «минус» — вершины тех углов, которые при этой деформации уменьшаются (вершины тех углов, которые не изменяют своей величины, мы оставляем неотмеченными). Тогда при последовательном обходе вершин данного многоугольника мы будем иметь не менее четырех перемен знаков (неотмеченные вершины при подсчете перемен знаков не учитываются).

Доказательство. Начав обход вершин многоугольника с какой-нибудь отмеченной вершины, мы должны, дойдя снова до этой вершины, вернуться к тому же знаку, с которого начали; следовательно, число перемен знаков должно быть четным. Оно не может быть равно нулю, так как в этом случае все отмеченные вершины имели бы один и тот же знак, например «+», и по лемме 1 одна из сторон первого многоугольника должна была бы увеличиться, что противоречит условию теоремы.

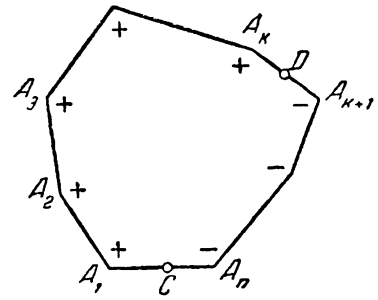


Рис. 35.

Предположим, что мы имеем всего две перемены знаков. Это означает, что при обходе вершин многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ на некотором участке, скажем, от вершины A_1 до вершины A_k, все отмеченные вершины будут иметь знак «+», а далее — от вершины A_{k+1} до вершины A_n — знак «—» (рис. 35). Выберем произвольную точку C на стороне A_nA_1 и произвольную точку D на стороне A_kA_{k+1}. Тогда в силу леммы 1, примененной к ломаной $CA_1 \ldots A_kD$, отрезок CD должен при нашей деформации увеличиться, а в силу той же леммы 1, примененной к ломаной $DA_{k+1} \ldots A_nC$, — уменьшиться.

Полученное противоречие и показывает, что число перемен знаков не может равняться 2. Следовательно, это число не менее 4, что и требовалось доказать.

Замечание. В леммах 1 и 2 мы рассматривали для простоты лишь плоские многоугольники. Однако эти леммы вместе с их доказательствами (из которых первое требует лишь несущественных изменений [1])) остаются справедливыми и для сферических многоугольников (т. е. многоугольников на сфере, образованных дугами больших окружностей). Именно к таким многоугольникам нам придется применять эти леммы.

Лемма 3. *Пусть выпуклый многогранный угол деформируется в выпуклый же многогранный угол так, что его плоские углы при этом не изменяются, а из двугранных углов хотя бы один*

[1]) Именно, большой круг p (вместо прямой p) должен быть выбран так, чтобы он пересекал большой круг A_1A_n в точках O_1 и O_2, лежащих вне дуги A_1A_n. Проектирование на p следует осуществлять с помощью окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных диаметру O_1O_2 сферы.

изменяет свою величину. Отметим ребро этого двугранного угла знаком «плюс» или «минус», смотря по тому, увеличивается или уменьшается в результате нашей деформации двугранный угол при этом ребре. Тогда при последовательном обходе ребер многогранного угла мы будем иметь не менее четырех перемен знаков.

Доказательство. Проведем сферу произвольного радиуса с центром в вершине данного многогранного угла. В пересечении этой сферы с многогранным углом мы получим сферический многоугольник (рис. 36), каждая сторона которого будет измеряться соответствующим плоским углом многогранного угла, а каждый угол — двугранным углом многогранного угла. Деформации многогранного угла будет отвечать деформация сферического многоугольника; теперь лемма 3 непосредственно вытекает из леммы 2.

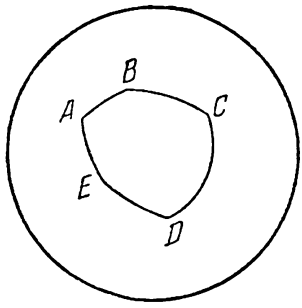


Рис. 36.

3.3. Доказательство теоремы Коши. Пусть нам даны два изоморфных выпуклых многогранника M и M', соответствующие грани которых равны. Мы должны показать, что все двугранные углы одного из этих многогранников также равны соответствующим углам другого.

Предположим, что среди соответствующих двугранных углов данных многогранников имеются неравные. Отметим каждое ребро многогранника M, двугранный угол при котором больше соответствующего двугранного угла многогранника M', знаком «плюс», а каждое ребро, двугранный угол при котором меньше соответствующего двугранного угла, — знаком «минус»; те ребра, двугранные углы при которых равны соответствующим им углам, мы оставляем неотмеченными. По нашему предположению, у многогранника M имеются отмеченные ребра; к каждой вершине, к которой примыкает какое-нибудь отмеченное ребро, в силу леммы 3 должны примыкать еще по меньшей мере три таких ребра. Отмеченные ребра образуют на поверхности многогранника M некоторую сетку C, делящую эту поверхность на несколько областей [1]). Ребрами этой сетки будут отмеченные ребра многогранника M, а вершинами — те из вершин многогранника M, к которым примыкает хотя бы по одному отмеченному ребру.

Обозначим число вершин, граней и ребер, определяемых сеткой C, соответственно через B, Γ и P. Подсчитаем общее число x перемен знаков, которое мы получим, обходя последовательно ребра, примыкающие к одной вершине сетки C, затем к другой, затем к третьей и т. д. В силу леммы 3 при каждой вершине будет не менее

[1]) В § 1 мы рассматривали сетки на сфере; рассмотрение сеток на поверхности выпуклого многогранника ничем не отличается: достаточно спроектировать поверхность многогранника на сферу.

четырех перемен знаков. Следовательно,

$$x \geqslant 4B. \tag{5}$$

Подсчитаем теперь общее число y перемен знаков, которое мы получим, обходя последовательно контур каждой грани сетки C. Число перемен знаков при обходе каждой грани должно быть четным; кроме того, оно не может превышать числа сторон этой грани. Следовательно, для треугольной грани число перемен знаков будет не более 2, для четырехугольной грани — не более 4, для пятиугольной грани — снова не более 4, для шестиугольной грани — не более 6, для семиугольной грани — снова не более 6 и т. д. Таким образом, если обозначить число треугольных, четырехугольных, пятиугольных и т. д. граней сетки C соответственно через Γ_3, Γ_4, Γ_5, ..., то будем иметь

$$y \leqslant 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + 6\Gamma_7 + \ldots \tag{6}$$

Но, очевидно, общее число перемен знаков не зависит от того, будем ли мы его подсчитывать по вершинам или по граням сетки C: два ребра, являющихся соседними при обходе некоторой вершины, будут соседними также и при обходе некоторой грани, а потому будут одновременно давать или не давать нам одну перемену знака при обоих способах подсчета. Таким образом, $x = y$, и, сравнивая неравенства (5) и (6), получаем

$$4B \leqslant 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + 6\Gamma_7 + \ldots \tag{7}$$

Покажем теперь, что это последнее неравенство противоречит теореме Эйлера. Действительно, согласно следствию из теоремы Эйлера (стр. 399) мы имеем для сетки C соотношение

$$B + \Gamma - P \geqslant 2,$$

т. е.

$$4B \geqslant 8 + 4P - 4\Gamma. \tag{8}$$

Но, очевидно,

$$\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6 + \ldots \tag{9}$$

Выразим и число P через числа Γ_k. Для этого пересчитаем ребра сетки C, подсчитывая стороны сначала всех треугольных граней, затем всех четырехугольных граней, затем пятиугольных и т. д. Всего мы насчитаем таким образом $3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \ldots$ ребер, однако при этом каждое ребро будет подсчитано дважды (так как оно принадлежит двум граням). Следовательно,

$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + \ldots \tag{10}$$

Учитывая соотношения (9) и (10), неравенство (8) можно переписать в виде

$$4B \geqslant 8 + 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 6\Gamma_5 + 8\Gamma_6 + \ldots \tag{11}$$

Сравнивая неравенство (11) с полученным ранее неравенством (7), мы видим, что они противоречат друг другу, так как правая часть неравенства (11) заведомо больше правой части неравенства (7).

Таким образом, предположение о существовании неравных соответственных двугранных углов многогранников M и M' привело нас к противоречию, и теорема Коши полностью доказана.

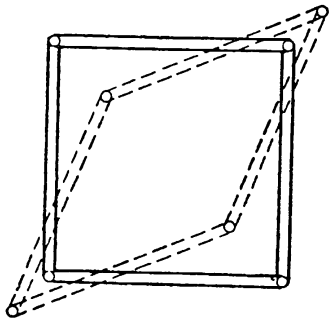


Рис. 37.

Из теоремы Коши следует, что *выпуклый многогранник с жесткими* (неизменяемыми) *гранями является жестким*, т. е. не может быть деформирован, даже если его грани соединены между собой шарнирно. Заметим, что в этом отношении многогранники резко отличаются от плоских многоугольников. Плоский многоугольник, вообще говоря, можно деформировать, не меняя длин его сторон; например, шарнирный квадрат деформируется в ромб (рис. 37); исключение здесь составляют лишь треугольники, которые, как известно, обладают свойством жесткости.

Отметим еще, что в теореме Коши предположение о выпуклости обоих рассматриваемых многогранников весьма существенно: выпуклый многогранник может иметь грани, равные соответствующим граням

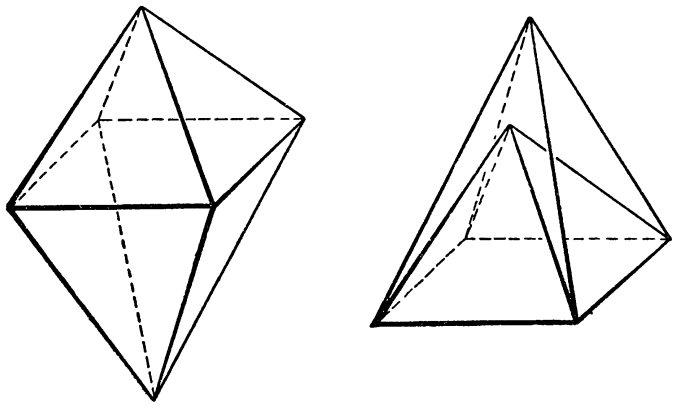


Рис. 38.

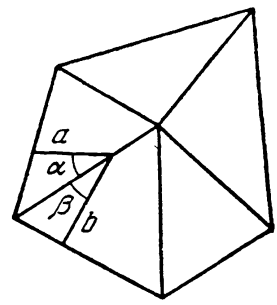
изоморфного ему невыпуклого многогранника. (Два таких многогранника изображены на рис. 38.) Однако такие многогранники не могут быть получены один из другого непрерывной деформацией (при которой не менялись бы форма и размеры граней), так как в процессе такой деформации выпуклый многогранник еще некоторое время должен был бы оставаться выпуклым, что невозможно в силу теоремы Коши.

3.4. Некоторые обобщения на случай кривых поверхностей. Вопрос о существовании и единственности многогранника, имеющего данную развертку, связан с широким кругом математических вопросов, составляющих содержание так называемой *внутренней геометрии поверхностей*. Чтобы разобраться в постановке этих вопросов, потребуются некоторые дополнительные пояснения.

Предположим, что нам дан выпуклый многогранник M и что мы имеем возможность измерять геометрические величины не вообще в пространстве, а только на поверхности этого многогранника; в таком положении оказались бы, например, «двумерные существа», живущие на поверхности данного многогранника и ничего не знающие о трехмерном пространстве, в котором он расположен. Такие существа могли бы измерять длины линий, расположенных на поверхности многогранника, а также углы между ними [1]) (измерение которых может быть сведено, как легко понять, к измерению длин), но такие величины, как, например, углы между гранями, были бы недоступны их измерению (по крайней мере непосредственному). Запас геометрических сведений, которые могли бы получить эти двумерные существа о своем многограннике, и составляет содержание внутренней геометрии этого многогранника. В этот запас сведений входило бы, например, понятие о вершине многогранника: вымышленные существа могли бы заметить, что в вершинах, в отличие от других точек поверхности многогранника, полный угол меньше чем 360°.

Два различных (не равных между собой) многогранника могут иметь одну и ту же внутреннюю геометрию; примерами могут служить хотя бы многогранники, изображенные на рис. 38. Это будет иметь место в том случае, когда многогранники изометричны. Два многогранника называются *изометричными*, если между точками их поверхностей можно установить взаимно однозначное соответствие так, что каждой линии на поверхности одного многогранника отвечает на поверхности другого линия такой же длины; в этом случае говорят также, что два многогранника имеют одну и ту же *внутреннюю метрику*. Упоминавшиеся выше двумерные существа, живущие на поверхностях таких двух многогранников, не могли бы заметить между ними никакой разницы.

Ясно, что задание развертки многогранника однозначно определяет его внутреннюю метрику: на развертке многогранника можно непосредственно выполнять те же измерения, что и на самой его поверхности. Те преобразования развертки, которые были указаны в конце п. **3.1** в связи с теоремой А. Д. Александрова (объединение смежных граней и, наоборот, разбиение одной грани на несколько), очевидно, преобразуют данную развертку в изометрическую, т. е. сохраняют ее внутреннюю метрику. Таким образом, теорема А. Д. Александрова утверждает в действительности существование многогранника не с данной разверткой, а с данной внут-



[1]) Следует иметь в виду, что величина угла между двумя линиями, измеренная на поверхности многогранника, вообще говоря, отлична от величины того же угла, измеренной по обычным правилам измерения углов в пространстве. Так, например, изображенный на рис. 39 угол между прямыми a и b, измеренный на поверхности данного многогранника, следует считать равным сумме углов α и β, изображенных там же; эта сумма больше плоского угла между прямыми a и b.

ренней метрикой. Далее, теорема Коши показывает, что в классе выпуклых многогранников каждый многогранник однозначно определяется своей внутренней метрикой.

Понятие изометричности (а значит, и внутренней метрики) без всяких изменений может быть перенесено на произвольные поверхности (не являющиеся многогранниками), и по отношению к ним возникают те же вопросы существования и единственности. Эти вопросы разрабатывались многими геометрами довольно длительное время и получили окончательное решение (по отношению к выпуклым поверхностям) лишь в сравнительно недавнее время. Вопрос о существовании выпуклой поверхности с заданной внутренней метрикой был решен А. Д. Александровым в 1948 г.: им было доказано, что требуемая выпуклая поверхность существует тогда и только тогда, когда данная метрика удовлетворяет двум условиям, которые аналогичны условиям 2) и 4), сформулированным в п. **3.1** (стр. 411) для многогранников [1]). Интересно отметить, что для доказательства этой своей теоремы А. Д. Александров использует теорему о существовании выпуклого многогранника с данной разверткой: данную метрику он заменяет близкими к ней развертками многогранников и, построив эти многогранники, переходит от них к искомой поверхности.

Вопрос о единственности выпуклой поверхности с данной внутренней метрикой был окончательно решен харьковским геометром А. В. Погореловым в 1949 г. Им была доказана следующая теорема, существенно обобщающая теорему Коши: *всякие две изометричные выпуклые поверхности равны между собой.*

§ 4. Правильные многоугольники и многогранники и их обобщения

4.1. Топологически правильные многогранники. Многогранник называется *топологически правильным,* если все его грани имеют одинаковое число вершин и во всех вершинах сходится одинаковое число граней [2]). Ясно, что свойство многогранника быть топологически правильным есть его топологическое свойство, так что многогранник, изоморфный топологически правильному многограннику, сам является топологически правильным. Найдем все комбинаторные типы топологически правильных многогранников нулевого рода.

Пусть B, Γ и P — числа вершин, граней и ребер многогранника. Пусть каждая грань многогранника имеет n вершин и в каждой вершине сходятся s граней. Так как каждая грань имеет n ребер, то все Γ граней будут иметь $n\Gamma$ ребер; но при этом каждое ребро многогранника учитывается дважды (потому что оно принадлежит двум граням). Следовательно,

$$n\Gamma = 2P. \tag{12}$$

---

[1]) Условие 2), требующее, чтобы развертка имела эйлерову характеристику 2, для поверхностей формулируется как условие гомеоморфности сфере, а условие 4) — как условие положительности кривизны.

[2]) Вводить аналогичное понятие для многоугольников не имеет смысла: так как каждая сторона многоугольника имеет две вершины и к каждой вершине примыкают две стороны, то любой многоугольник следовало бы считать топологически правильным.

Аналогично, подсчитывая ребра, примыкающие к каждой вершине, получаем соотношение

$$sB=2P. \tag{13}$$

Но числа B, Γ и P согласно теореме Эйлера связаны соотношением

$$B+\Gamma-P=2. \tag{14}$$

Выражая с помощью равенств (12) и (13) числа B и Γ через P и подставляя в формулу (14), придем к уравнению

$$\frac{2P}{s}+\frac{2P}{n}-P=2,$$

или, после деления на $2P$:

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{n}=\frac{1}{P}+\frac{1}{2}. \tag{15}$$

Это уравнение и позволяет найти все возможные (для топологически правильного многогранника) значения s, n и P. В самом деле, из (15) вытекает неравенство

$$\frac{1}{s}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2},$$

откуда видно, что хотя бы одно из чисел $\frac{1}{s}$ и $\frac{1}{n}$ должно быть больше $\frac{1}{4}$, т. е. хотя бы одно из чисел s и n должно быть меньше 4. Но так как ни одно из чисел s и n по их геометрическому смыслу не может быть меньше чем 3, то должно быть либо $s=3$, либо $n=3$. Далее, так как $\frac{1}{s}\leqslant\frac{1}{3}$, то $\frac{1}{n}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, т. е. $n<6$; точно так же находим, что и $s<6$. Таким образом, мы имеем лишь пять возможностей: либо $n=3$, $s=3$, 4, 5, либо $s=3$, $n=4$, 5. Проверка показывает, что во всех этих случаях число P, определяемое равенством (15), а также числа Γ и B, определяемые равенствами (12) и (13), являются целыми. Находя эти числа в каждом из указанных случаев, мы определим все возможные характеристики топологически правильных многогранников.

Таблица 2

№ п/п	n	s	P	B	Γ
1	3	3	6	4	4
2	3	4	12	6	8
3	3	5	30	12	20
4	4	3	12	8	6
5	5	3	30	20	12

Из наших рассуждений пока не следует, что каждая строка полученной таблицы определяет в действительности некоторый многогранник. Покажем, что это действительно так, на примере второй строки.

Согласно содержащимся в этой строке значениям n и s искомый многогранник должен иметь треугольные грани, сходящиеся по четыре в каждой вершине. Пусть $A_1A_2A_3$ — одна такая грань. С ней должны

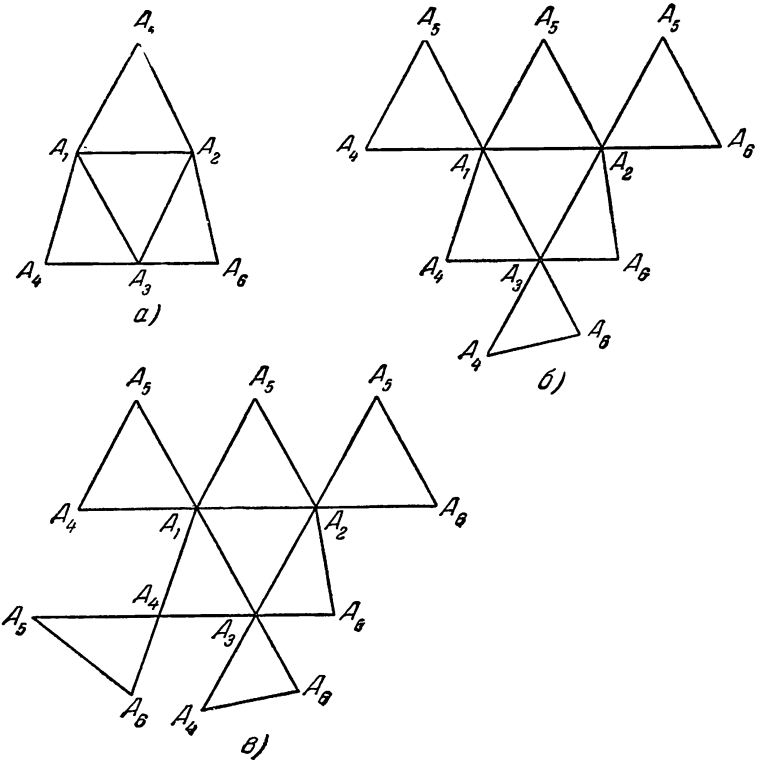


Рис. 40.

быть смежными еще три треугольные грани, указанные схематически на рис. 40, *а*; при этом вершины A_4, A_5, A_6 должны быть все различны, так как в противном случае в одной из вершин сходились бы не четыре, а только три грани. Далее, к вершинам A_1, A_2, A_3 должно примыкать еще по одной грани, как указано на рис. 40, *б*. Теперь в вершине A_4 сходятся три грани, причем имеются «свободные» ребра A_4A_5 и A_4A_6; следовательно, к этой вершине должна примыкать еще одна грань, имеющая ребра A_4A_5 и A_4A_6 (рис. 40, *в*). Теперь в каждой вершине A_1, A_2, ..., A_6 сходятся по четыре треугольных грани, причем «свободных» ребер уже не имеется. Схема, изображенная на

рис. 40, *в*, есть абстрактный многогранник. По теореме Штейница он может быть реализован в виде выпуклого многогранника (рис. 41); это и есть искомый топологически правильный многогранник (он представляет собой четырехугольную бипирамиду, называемую также *октаэдром*); в соответствии с данными второй строки нашей таблицы этот многогранник имеет 12 ребер, 6 вершин и 8 граней.

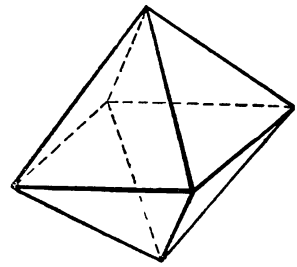


Рис. 41.

Как мы видели, схема, изображенная на рис. 40, *в*, однозначно определяется значениями $n=3$, $s=4$. Следовательно, нами доказано не только существование требуемого многогранника, но и его единственность (с точностью до изоморфизма).

Такое же рассуждение может быть проведено и в отношении любой другой строки таблицы 2. Первая строка этой таблицы определяет уже известный нам *тэтраэдр*, третья — многогранник, называемый *икосаэдром* (рис. 42), четвертая — многогранник, изоморфный четырехугольной призме и называемый также *гексаэдром* (рис. 43), пятая — многогранник, называемый *додекаэдром* (рис. 44).

Таким образом мы приходим к следующему выводу.

Теорема. *Существует пять различных* (не изоморфных между собой) *типов топологически правильных многогранников*: *тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.*

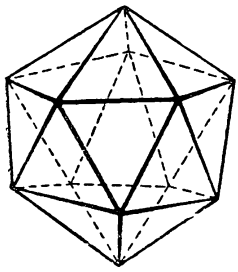


Рис. 42.

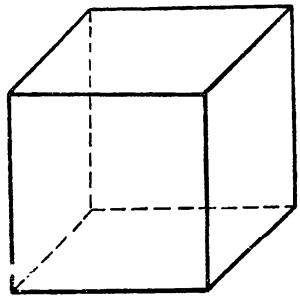


Рис. 43.

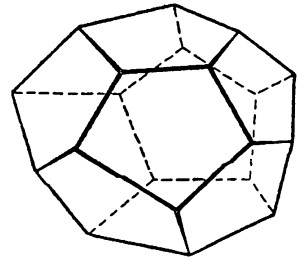


Рис. 44.

Возвращаясь к определению топологически правильного многогранника, отметим, что понятия грани и вершины фигурируют в нем совершенно симметрично; это означает, что многогранник, двойственный (см. выше, п. **2.4**) топологически правильному многограннику, также является топологически правильным. Отсюда следует, что *для каждого топологически правильного многогранника существует двойственный ему топологически правильный многогранник*. Из таблицы 2 видно, что октаэдр двойствен гексаэдру, а додекаэдр — икосаэдру; тетраэдр же двойствен самому себе.

4.2. Правильные многоугольники и многогранники. Простой многоугольник называется *правильным* или *метрически правильным*, если все его стороны равны между собой, и все углы равны между собой (рис. 45). Общеизвестно, что для любого $n \geqslant 3$ существует один и только один (с точностью до подобия) правильный n-угольник. Чтобы построить его, достаточно разделить какую-нибудь окружность на n равных частей и соединить последовательно точки деления.

Многогранный угол называется *правильным*, если все его линейные углы равны между собой и все двугранные углы равны между собой.

Простой многогранник называется *правильным* (точнее — *метрически правильным*), если все его грани являются правильными многоугольниками, а все многогранные углы — равными правильными многогранными углами. Правильные многогранники называют также платоновыми многогранниками. Нетрудно показать, что все такие многогранники являются выпуклыми.

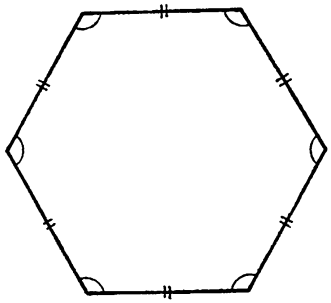


Рис. 45.

Каждый правильный многогранник является, очевидно, и топологически правильным. Поэтому не изоморфных между собой правильных многогранников, в отличие от многоугольников, может существовать не больше пяти. Покажем, что их существует ровно пять (т. е. что в каждом классе топологически правильных многогранников имеются метрически правильные многогранники) и что любой правильный многогранник будет не только изоморфен, но даже подобен одному из этих пяти.

Зная топологический тип правильного многогранника, мы можем построить его схему — так, как сделали это в предыдущем пункте (см. рис. 40, *в*) на примере октаэдра. Если в качестве граней на этой схеме брать равные правильные многоугольники, то эта схема представит собой развертку искомого многогранника. Таким образом, развертка правильного многогранника определяется его топологическим типом однозначно, если не учитывать лишь произвола при выборе длины ребра. Но при данной длине ребра развертка в силу теоремы Коши определяет искомый многогранник однозначно с точностью до положения в пространстве; поэтому, беря ребра разной длины, мы будем получать подобные между собой многогранники. Таким образом, если правильный многогранник данного топологического типа существует, то он с точностью до подобия единствен.

Остается показать, что метрически правильный многогранник действительно существует для каждого из пяти топологических

типов, описанных в п. **4.1.** Проведем это доказательство снова на примере октаэдра.

Возьмем четыре равносторонних треугольника и склеим их в правильный четырехгранный угол $PABCD$ (очевидно, это возможно, и притом лишь единственным образом, с точностью до положения этого четырехгранного угла в пространстве, см. рис. 46). Это будет один из многогранных углов требуемого многогранника. Возьмем теперь другой такой же четырехгранный угол и приложим его к первому так, чтобы вершина его совместилась с точкой A, а две грани совпали с гранями PAB и PAD (рис. 47 и 48); это можно сделать вследствие равенства граней и двугранных углов. В результате мы получим две новые грани ABQ и ADQ нашего многогранника. Рассмотрим теперь четырехгранный угол с вершиной B, имеющей «свободную» грань CBQ. Три его плоских угла (лежащих в уже построенных гранях многогранника) и два двугранных угла (BP и BA) равны соответственно трем плоским и двум двугранным углам исходного четырехгранного угла $PABCD$; следовательно, весь четырехгранный

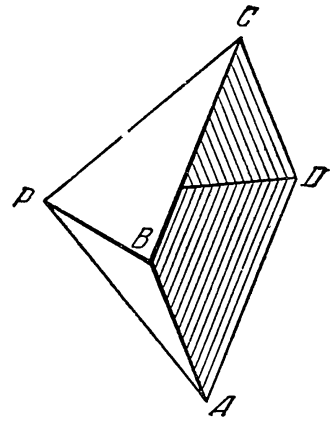


Рис. 46.

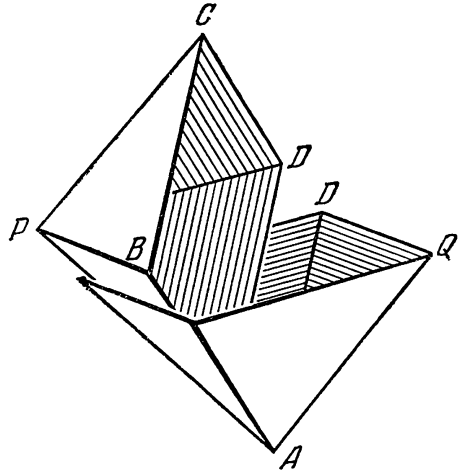


Рис. 47.

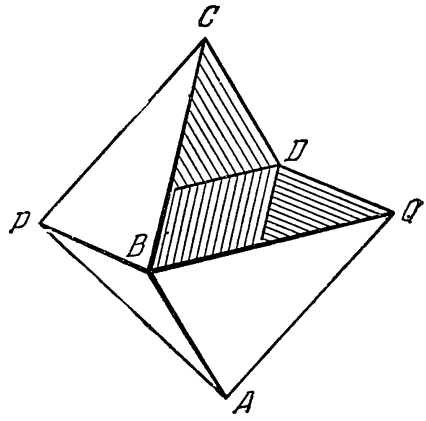


Рис. 48.

угол B равен четырехгранному углу $PABCD$, и мы можем еще один экземпляр такого же четырехгранного угла приложить к построенной уже части многогранника так, чтобы его вершина совпала с B, а три грани — соответственно с треугольниками BCP, BPA и BAQ.

После этого мы тем же путем убедимся, что такой же четырехгранный угол можно приложить вершиной к каждой из точек C, D и Q. Отсюда непосредственно вытекает, что построенный нами многогранник $PABCDQ$ метрически правильный. Он называется *правильным октаэдром* (рис. 49, *в*).

Совершенно аналогично может быть доказано существование метрически правильных многогранников в каждом из остальных четырех классов топологически правильных многогранников. Эти

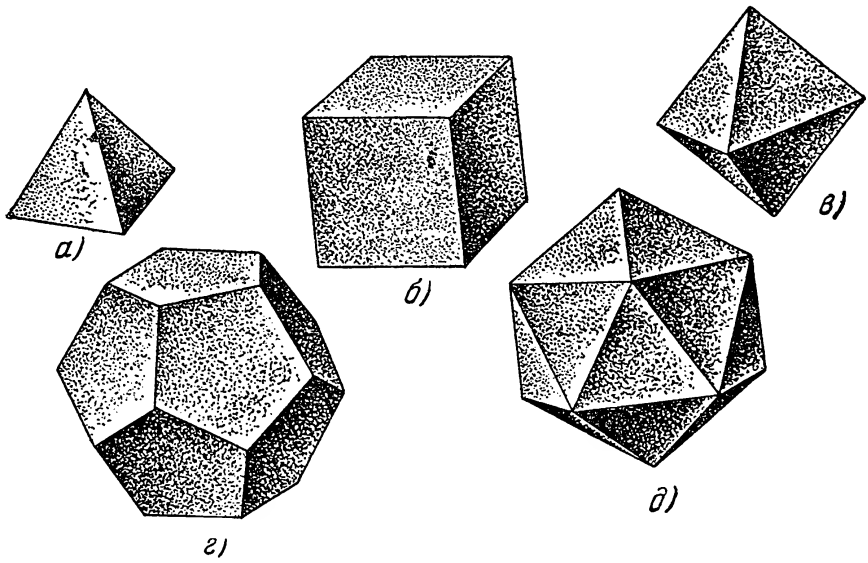


Рис. 49.

метрически правильные многогранники называются соответственно *правильным тетраэдром* (рис. 49, *а*), *правильным гексаэдром* или *кубом* (рис. 49, *б*), *правильным додекаэдром* (рис. 45, *г*), *правильным икосаэдром* (рис. 49, *д*).

Таким образом, мы получили следующую теорему.

Теорема. *Существуют пять различных* (*с точностью до подобия*) *метрически правильных многогранников: правильный тетраэдр, правильный гексаэдр (куб), правильный октаэдр, правильный додекаэдр и правильный икосаэдр.*

Вместе с тем мы видим также, что для каждого метрически правильного многогранника существует двойственный ему метрически правильный многогранник.

Двойственные друг другу правильные многогранники могут быть получены один из другого следующим простым способом. Пусть дан правильный многогранник M; рассмотрим центры всех его граней и примем их за вершины нового многогранника M'. Смежными

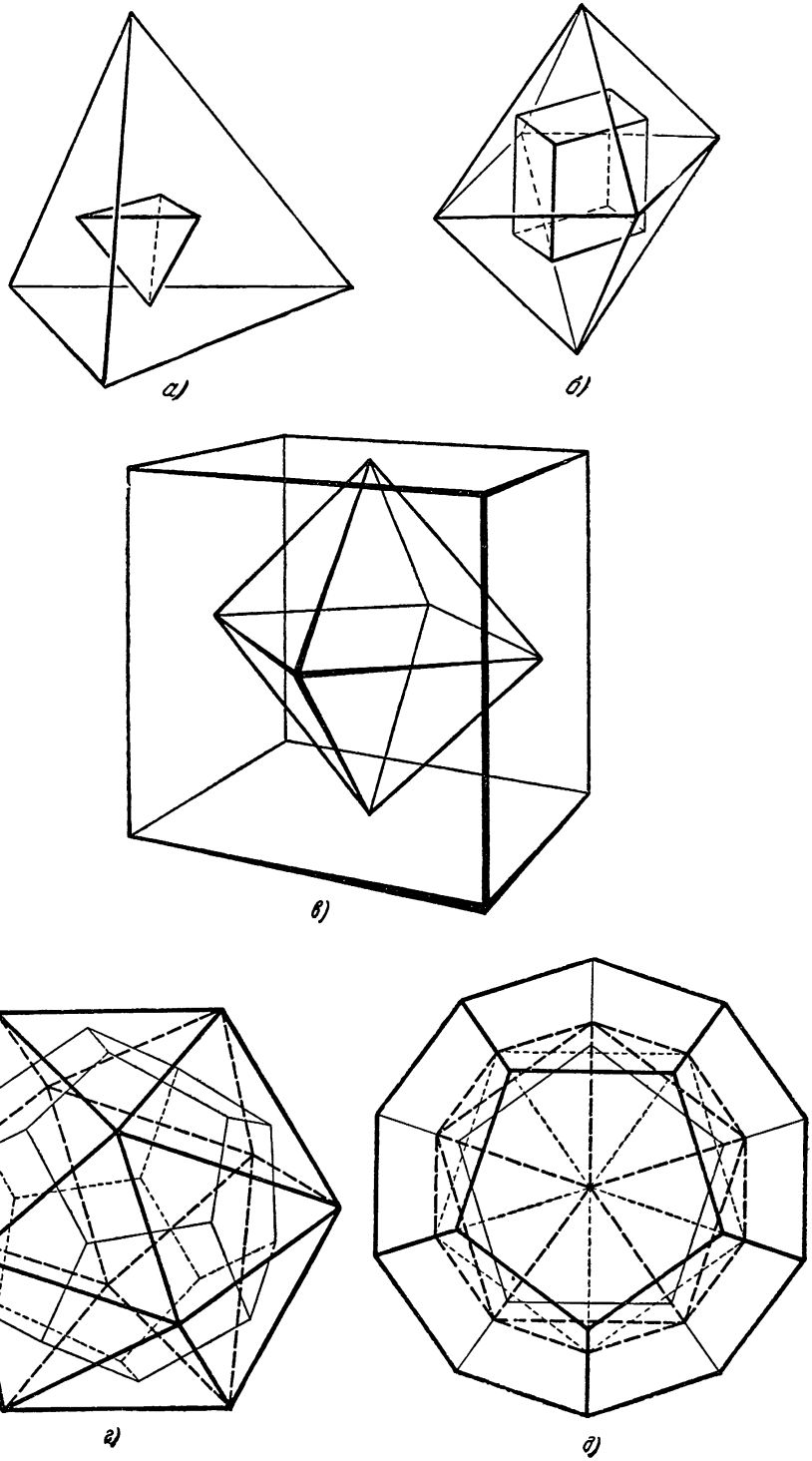


Рис. 50.

вершинами многогранника M' будем считать центры смежных граней многогранника M, а вершинами одной грани M' будем считать центры граней M, сходящиеся в одной вершине (легко видеть, что эти центры будут лежать в одной плоскости). Полученный многогранник M' также будет правильным; кроме того, граням многогранника M соответствуют вершины многогранника M', ребрам M — ребра M', вершинам M — грани M' (причем инцидентным элементам многогранника M отвечают инцидентные элементы многогранника M'), т. е. многогранник M' двойствен многограннику M. Описанное построение изображено на рис. 50, *а* — *д* для каждого из пяти правильных многогранников.

В указанной выше конструкции многогранники M и M' играют не равноправную роль (один из них вписан в другой). Иногда удобнее пользоваться следующей более симметричной конструкцией. Построим сферу, касающуюся всех ребер данного правильного многогранника M (такая сфера обязательно существует и касается каждого ребра в его середине), проведем в середину каждого из ребер радиус этой сферы и повернем каждое ребро (точнее — прямую, на которой лежит ребро) вокруг этого радиуса на 90° (рис. 51). Тогда,

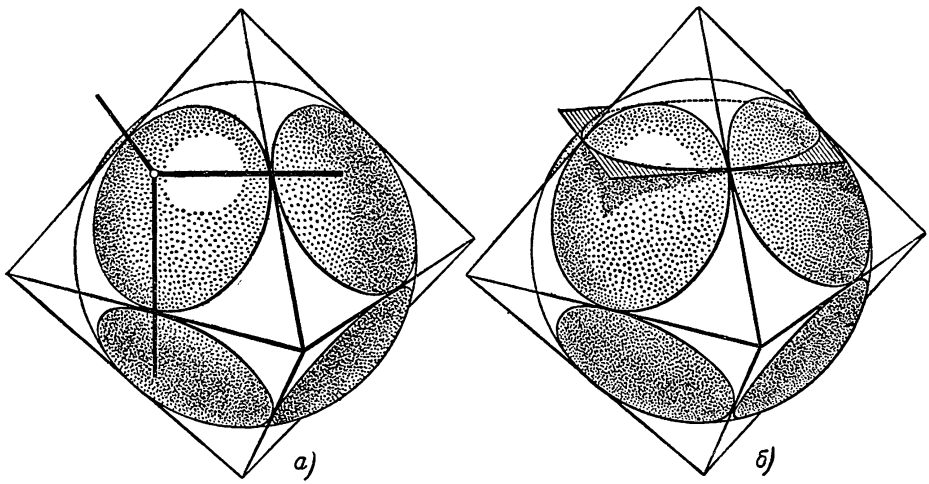


Рис. 51.

как нетрудно показать, ребра, принадлежавшие одной грани, после поворота будут проходить через одну точку (рис. 51, *а*), а ребра, проходившие через одну вершину, расположатся в одной плоскости (рис. 51, *б*). Следовательно, ребра многогранника M после поворота будут определять новый многогранник M' (тоже правильный!), двойственный M (рис. 52).

Два двойственных друг другу правильных многогранника, имеющих общие середины соответствующих ребер, взаимно перпендикулярных друг другу, называются *взаимными* друг другу. Понятие

взаимности, в отличие от понятия двойственности, учитывает не только топологическую структуру двух многогранников, но также и соотношение их размеров и их взаимное расположение.

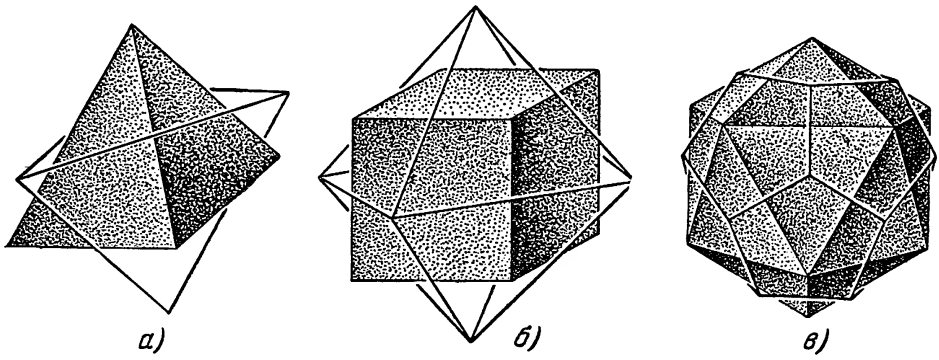


Рис. 52.

4.3. Равноугольно полуправильные многогранники. Для дальнейшего нам удобно ввести следующие вспомогательные понятия. Назовем *звездой вершины* A данного многогранника совокупность всех инцидентных ей граней, а также всех вершин и сторон этих граней. Двойственно этому назовем *звездой грани* α данного многогранника совокупность всех вершин грани α, а также всех граней и ребер, инцидентных этим вершинам. По отношению к двум звездам (двух вершин или двух граней) мы будем говорить об их изоморфизме в том же смысле, в каком это было определено выше (см. п. **2.1**) для двух многогранников. Чтобы задать звезду, например, некоторой вершины с точностью до изоморфизма, достаточно указать число s граней этой звезды, а также число n_1 вершин одной из этих граней α_1, число n_2 вершин смежной с ней грани α_2, число n_3 вершин смежной с α_2 грани α_3 и т. д.

Топологически правильные многогранники можно охарактеризовать как такие многогранники у которых звезды всех вершин изоморфны между собой, а звезды всех граней — между собой. Ограничившись только первым из этих двух требований, мы придем к более широкому классу многогранников — к так называемым топологически равноугольно полуправильным многогранникам. Итак, многогранник называется *топологически равноугольно полуправильным,* если звезды всех его вершин изоморфны между собой.

Поставим своей целью перечислить все такие многогранники, ограничиваясь снова лишь многогранниками нулевого рода. При этом мы будем интересоваться лишь многогранниками, не являющимися топологически правильными, т. е. такими многогранниками, к каждой вершине которых примыкает хотя бы две грани, имеющие различное число вершин.

Для перечисления всех типов топологически равноугольных полуправильных многогранников мы будем искать все возможные типы звезд их вершин. Для каждого найденного типа звезды можно (и притом однозначно, за исключением одного-единственного случая) составить схему соответствующего многогранника — так же, как это было сделано в п. **4.1** на примере октаэдра. Отсюда в силу теоремы Штейница будет вытекать существование требуемого многогранника и его единственность с точностью до изоморфизма. Лишь одному типу звезды, который будет указан ниже, отвечают две различные схемы, а поэтому и два неизоморфных между собой многогранника [1]) Мы не будем в каждом случае приводить рассуждений, связанных с построением схемы многогранника, имеющего известный тип звезды любой его вершины; читатель при желании сможет выполнить это самостоятельно, руководствуясь в качестве образца построением схемы октаэдра, приведенным в п. **4.1.**

Введем нужные обозначения Пусть снова B, Γ и P — число вершин, граней и ребер многогранника, Γ_1 — число n_1-угольных граней, Γ_2 — число n_2-угольных граней и т. д. Пусть, далее, в каждой вершине многогранника сходятся s граней, в том числе s_1 n_1-угольных граней, s_2 n_2-угольных и т. д.

Покажем прежде всего, что в каждой вершине многогранника не может сходиться слишком много граней, т. е. оценим число s сверху. Так как в каждой вершине сходятся s ребер, то общее число ребер, подсчитанное по всем вершинам многогранника, будет sB; так как при этом каждое ребро считается дважды (ибо оно соединяет две вершины), то

$$sB = 2P. \tag{16}$$

Каждая грань многогранника имеет не менее трех ребер; так как каждое ребро принадлежит двум граням, то $3\Gamma \leqslant 2P$, или в силу (16),

$$3\Gamma \leqslant sB. \tag{17}$$

Из теоремы Эйлера вытекает (так как мы рассматриваем лишь многогранники нулевого рода), что

$$B + \Gamma > P.$$

Пользуясь соотношениями (16) и (17), получим

$$B + \frac{s}{3} B \geqslant B + \Gamma > P = \frac{s}{2} B,$$

---

[1]) Интересно отметить, что хотя теория полуправильных многогранников насчитывает более двух тысяч лет, это нарушение единственности было замечено лишь недавно.

откуда после простых преобразований находим

$$s<6.$$

Таким образом, s может принимать лишь значения 3, 4, 5.

Постараемся теперь определить все возможные типы звезд вершин данного многогранника, т. е. найти все возможные значения чисел n_k и s_k.

Все n_1-угольные грани содержат с одной стороны $n_1\Gamma_1$ плоских углов, а с другой стороны s_1B плоских углов. Следовательно, $n_1\Gamma_1=s_1B$, или $\Gamma_1=\frac{s_1}{n_1}B$. Точно так же $\Gamma_2=\frac{s_2}{n_2}B$ и вообще

$$\Gamma_k=\frac{s_k}{n_k}B. \tag{18}$$

Поэтому общее число граней многогранника будет

$$\Gamma=\frac{s_1}{n_1}B+\frac{s_2}{n_2}B+\ldots \tag{19}$$

Возьмем теперь равенство Эйлера

$$\Gamma=P-B+2$$

и заменим Γ и P их выражениями из равенств (16) и (19):

$$\frac{s_1}{n_1}B+\frac{s_2}{n_2}B+\ldots=\frac{sB}{2}-B+2,$$

или

$$\frac{s_1}{n_1}+\frac{s_2}{n_2}+\ldots=\frac{s-2}{2}+\frac{2}{B}. \tag{20}$$

Для решения поставленной задачи нам предстоит решить уравнение (20) относительно неизвестных B; s_1, s_2, ...; n_1, n_2,... в целых положительных числах.

Рассмотрим раздельно различные возможные значения s.

I. $s=3$, т. е. в каждой вершине многогранника сходится по три грани. Эти грани могут быть либо двух, либо трех различных типов. В первом случае мы можем положить $s_1=2$, $s_2=1$, а во втором будет $s_1=s_2=s_3=1$. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1) $s_1=2$, $s_2=1$.

Уравнение (20) принимает в этом случае вид

$$\frac{2}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{B}. \tag{21}$$

Из уравнения (21) вытекает, что

$$\frac{2}{n_1}+\frac{1}{n_2}>\frac{1}{2}.$$

Так как $n_2 \geqslant 3$, то $\frac{1}{n_2} \leqslant \frac{1}{3}$, а потому $\frac{2}{n_1} > \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, т. е. $n_1 < 12$.

Далее, из геометрических соображений легко усмотреть, что число n_1 должно быть четным. В самом деле, пусть $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ — какая-нибудь n_1-угольная грань (рис. 53). К вершине A_1 должна примыкать еще одна n_1-угольная грань. Пусть, например, к ребру A_1A_2 примыкает n_1-угольная грань. Тогда в вершине A_2 к ребру A_2A_3 должна примыкать n_2-угольная грань и т. д. Продолжая таким же образом, мы должны, дойдя до вершины A_n, получить n_2-угольную грань при ребре A_nA_1; но это возможно, очевидно, только если число сторон грани $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ четное.

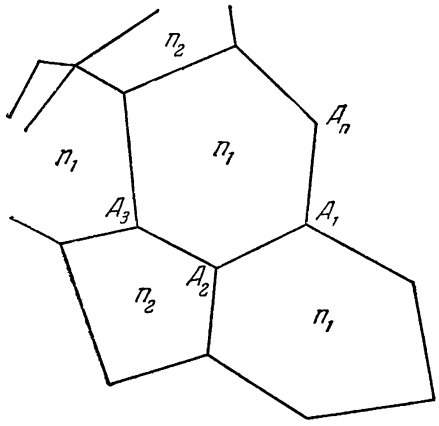


Рис. 53.

Итак, n_1 может иметь лишь значения 4, 6, 8, 10. Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) $n_1 = 4$. Уравнение (21) принимает в этом случае вид $B = 2n_2$ и определяет целое положительное значение B при любом целом положительном $n_2 = n$. Из равенства (18) находим: $\Gamma_1 = n$, $\Gamma_2 = 2$. Таким образом, мы пришли к многограннику с n четырехугольными и двумя n-угольными гранями и с $2n$ вершинами, в каждой из которых сходятся две четырехугольные и одна n-угольная грань. Этот многогранник изоморфен *n-угольной призме* (рис. 54, *а*). Итак, мы нашли целую бесконечную серию топологически полуправильных многогранников; из этой серии следует только исключить многогранник, отвечающий значению $n = 4$, так как он будет топологически правильным.

б) $n_1 = 6$. Уравнение (21) принимает вид $\frac{1}{3}+\frac{1}{n_2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{B}$, откуда $B=\frac{12n_2}{6-n_2}$. Следовательно, в этом случае обязательно $n_2 < 6$.

При $n_2 = 3$ имеем $B = 12$. Мы приходим к многограннику с 12 вершинами, в каждой из которых сходятся две шестиугольные и одна треугольная грань (рис. 54, *б*).

Значению $n_2 = 4$ отвечает многогранник, изображенный на рис. 54, *в*, а значению $n_2 = 5$ — многогранник, изображенный на рис. 54, *г*.

в) $n_1 = 8$. Уравнение (21) дает $\frac{1}{4} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{B}$, откуда $B = \frac{8n_2}{4 - n_2}$, а потому $n_2 < 4$, т. е. $n_2 = 3$, $B = 24$. Соответствующий многогранник изображен на рис. 54, *д*.

г) $n_1 = 10$. Имеем: $\frac{1}{5} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{B}$, откуда $B = \frac{20n_2}{10 - 3n_2}$, т. е. снова $n_2 = 3$. Соответствующий многогранник изображен на рис. 54, *е*.

2) $s_1 = s_2 = s_3 = 1$. Из таких же геометрических соображений, какие были приведены в случае 1), вытекает, что теперь в с е числа n_1, n_2, n_3 должны быть четными.

Уравнение (20) принимает в нашем случае вид

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{B}. \tag{22}$$

Так как в силу этого соотношения $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > \frac{1}{2}$, то хотя бы одно из слагаемых в левой части, пусть, например, первое, должно быть больше $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$. Следовательно, $n_1 < 6$, т. е. $n_1 = 4$. Теперь уравнение (22) можно переписать в виде

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{B}. \tag{23}$$

Как и выше, отсюда вытекает, что, например, $\frac{1}{n_2} < \frac{1}{8}$, т. е. $n_2 < 8$. Следовательно, $n_2 = 6$ (потому что должно быть $n_2 \neq n_1$). Теперь уравнение (23) сводится к уравнению

$$\frac{1}{n_3} = \frac{1}{12} + \frac{2}{B},$$

из которого следует, что $n_3 < 12$. Следовательно, имеются только две возможности: $n_3 = 8$ (рис. 54, *ж*) и $n_3 = 10$ (рис. 54, *з*).

Случай $s = 3$ полностью исчерпан.

II. $s = 4$. Этот случай также распадается на несколько.

1) В каждой вершине сходятся три грани одного типа и одна грань другого: $s_1 = 3$, $s_2 = 1$.

Уравнение (20) принимает в этом случае вид

$$\frac{3}{n_1} + \frac{1}{n_2} = 1 + \frac{2}{B}, \tag{24}$$

и из него, так как $n_2 \geqslant 3$, вытекает, что $n_1 \leqslant 4$.

При $n_1 = 3$ уравнение сводится к уравнению $\frac{1}{n_2} = \frac{2}{B}$, которое имеет бесконечно много целых решений: $n_2 = n$, $B = 2n$. Мы получаем еще одну бесконечную серию топологически полуправильных многогранников, называемых *антипризмами* (рис. 54, *и*). При $n = 3$ антипризма превращается в топологически правильный многогранник — октаэдр.

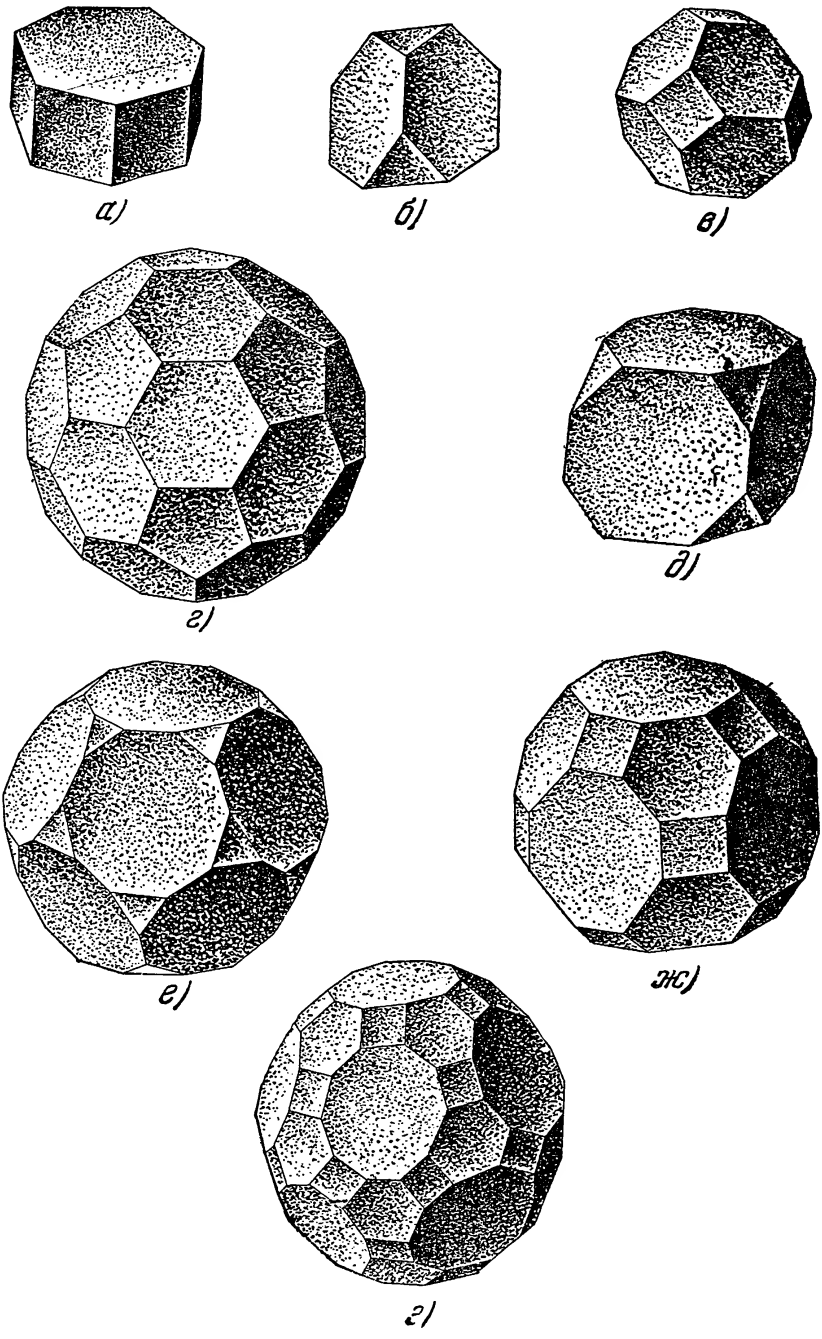


Рис. 54.

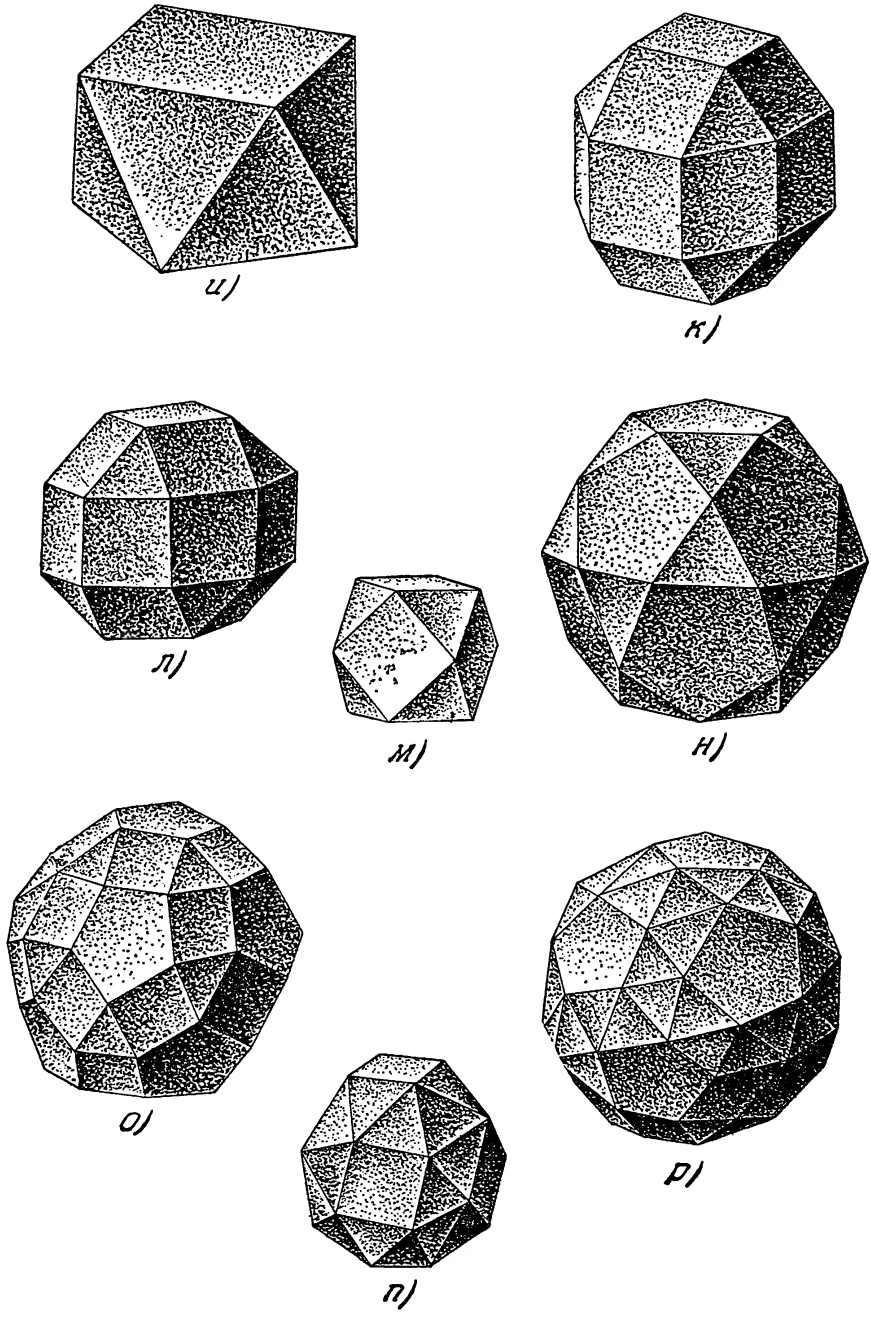


Рис. 54 (продолжение).

Значение же $n_1=4$ определяет единственное значение $n_2=3$; этому решению уравнения (24) отвечают д в а неизоморфных топологически полуправильных многогранника (рис. 54, *к*, *л*) с изоморфными звездами вершин.

2) $s_1=s_2=2$. В этом случае имеем уравнение

$$\frac{2}{n_1}+\frac{2}{n_2}=1+\frac{2}{B},$$

из которого, как и выше, находим, что $n_1=3$, $n_2=4$ (рис. 54, *м*) или $n_1=3$, $n_2=5$ (рис. 54, *н*).

3) $s_1=2$, $s_2=s_3=1$. В этом случае из геометрических соображений заключаем, что число n_1 должно быть четным, после чего из уравнения (20):

$$\frac{2}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}=1+\frac{2}{B}$$

находим, что $n_1=4$, $n_2=3$, $n_3=5$ (рис. 54, *о*).

4) $s_1=s_2=s_3=s_4=1$. В этом случае уравнение (20) принимает вид

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=1+\frac{2}{B}. \tag{25}$$

Если положить $n_1<n_2<n_3<n_4$, то $n_1\geqslant 3$, $n_2\geqslant 4$, $n_3\geqslant 5$, $n_4\geqslant 6$ и $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}\leqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{19}{20}<1$, что противоречит уравнению (25). Таким образом, этот случай оказывается в действительности невозможным.

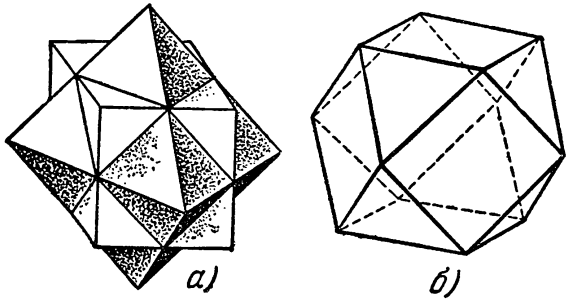


Рис. 55.

III. $s=5$. Здесь, как нетрудно убедиться, единственный возможный случай будет $s_1=4$, $s_2=1$. В этом случае уравнение (20) принимает вид

$$\frac{4}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{3}{2}+\frac{2}{B}.$$

Из этого уравнения находим, что $n_1=3$, а $n_2=4$ (рис. 54, *п*) или $n_2=5$ (рис. 54, *р*).

Итак, мы нашли все топологические типы топологически равноугольно полуправильных многогранников. Их оказалось всего 14, не считая двух бесконечных серий (а также пяти типов топологически правильных многогранников).

Многогранник называется (*метрически*) *равноугольно полуправильным* или *архимедовым*, если все его грани — правильные много-

угольники, а все многогранные углы равны между собой. Таким же образом, как и в п. 4.2, можно показать, что каждый из найденных нами типов топологически равноугольно полуправильных многогранников может быть реализован в виде архимедова многогранника, и притом единственного с точностью до подобия.

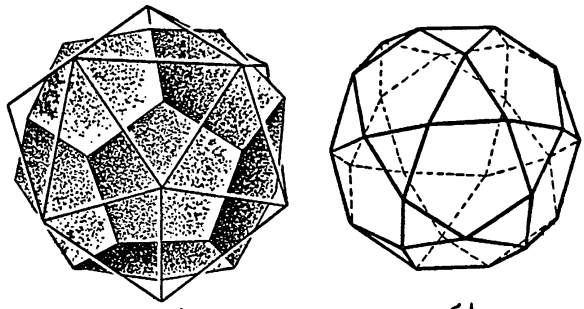


Рис. 56.

Все эти архимедовы многогранники были изображены на рис. 54 в качестве представителей соответствующих топологических типов.

Отметим, что два архимедовых многогранника (рис. 54, *м* и *н*) могут быть получены как пересечения взаимных правильных многогранников (см. также рис. 55 и 56); эти архимедовы многогранники имеют грани двух типов — тех же, что и исходные правильные многогранники.

Основные характеристики архимедовых многогранников (за исключением правильных) с указанием их названий приведены в таблице.

Таблиц 3

№ п/п	s	s_1	s_2	s_3	n_1	n_2	n_3	Γ_1	Γ_2	Γ_3	B	Γ	P	№ рис.	
1	3	2	1	—	4	n	—	n	2	—	$2n$	$n+2$	$3n$	54,*а*	Правильная n-угольная призма с квадратными боковыми гранями (n=3,5,6,7,...)
2	3	2	1	—	6	3	—	4	4	—	12	8	18	54,*б*	Усеченный тетраэдр
3	3	2	1	—	6	4	—	8	6	—	24	14	36	54,*в*	Усеченный октаэдр
4	3	2	1	—	6	5	—	20	12	—	60	32	90	54,*г*	Усеченный икосаэдр
5	3	2	1	—	8	3	—	6	8	—	24	14	36	54,*д*	Усеченный куб
6	3	2	1	—	10	3	—	12	20	—	60	32	90	54,*е*	Усеченный додекаэдр
7	3	1	1	1	4	6	8	12	8	6	48	26	72	54,*ж*	Усеченный кубоктаэдр
8	3	1	1	1	4	6	10	30	20	12	120	62	180	54,*з*	Усеченный икосододекаэдр
9	4	3	1	—	3	n	—	$2n$	2	—	$2n$	$2n+2$	$4n$	54,*и*	n-угольная антипризма (n=4,5,6,...)
10	4	3	1	—	4	3	—	18	8	—	24	26	48	54,*к*	Ромбокубоктаэдр
11	4	3	1	—	4	3	—	18	8	—	24	26	48	54,*л*	
12	4	2	2	—	3	4	—	8	6	—	12	14	24	54,*м*	Кубоктаэдр
13	4	2	2	—	3	5	—	20	12	—	30	32	60	54,*н*	Икосододекаэдр
14	4	2	1	1	4	3	5	30	20	12	60	62	120	54,*о*	Ромбоикосододекаэдр
15	5	4	1	—	3	4	—	32	6	—	24	38	60	54,*п*	Плосконосый куб
16	5	4	1	—	3	5	—	80	12	—	60	92	150	54,*р*	Плосконосый додекаэдр

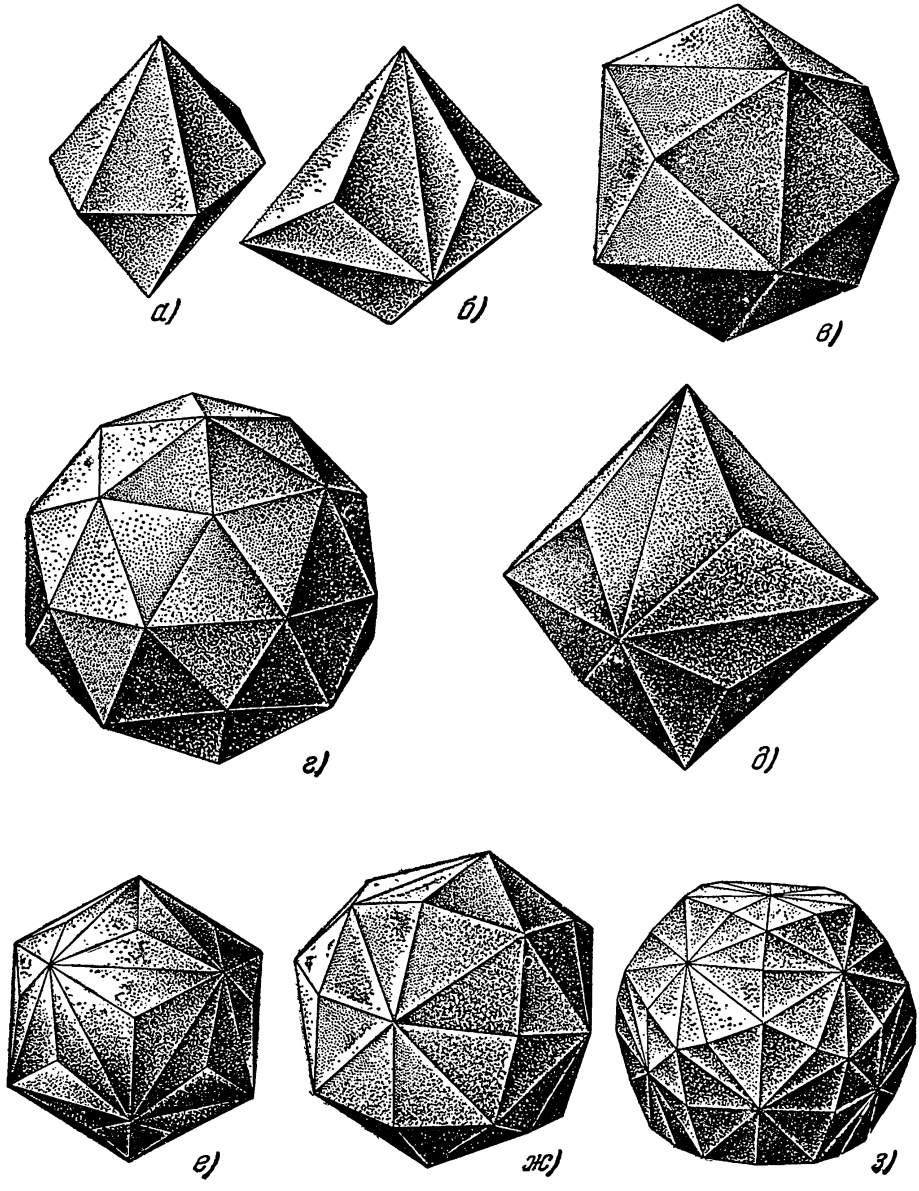


Рис. 57.

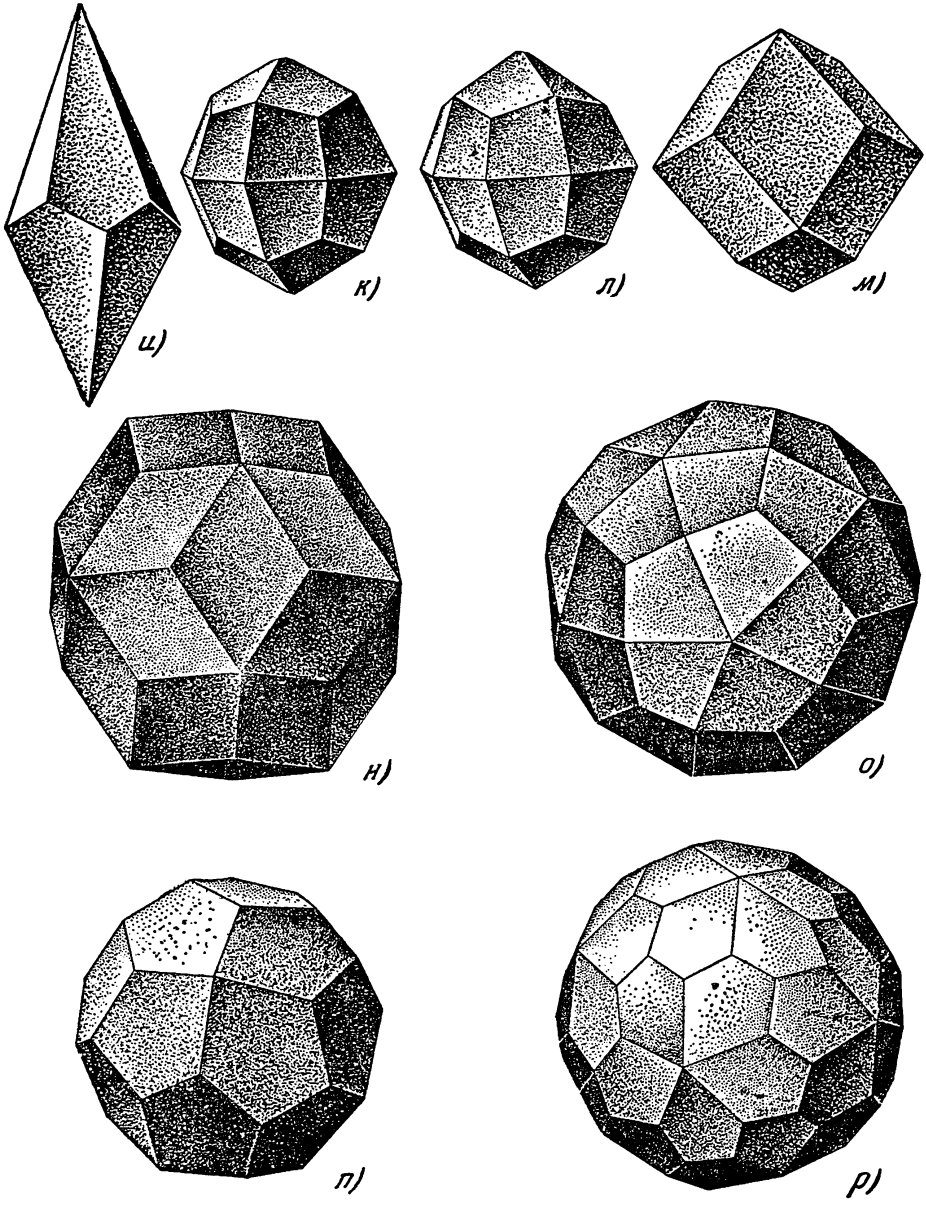


Рис. 57 (продолжение).

4.4. Равногранно полуправильные многогранники. Двойственным понятию топологически равноугольно полуправильного многогранника является понятие топологически равногранно полуправильного многогранника: многогранник называется *топологически равногранно полуправильным*, если звезды всех его граней изоморфны между собой.

Пересчитать все топологически равногранно полуправильные многогранники можно тем же путем, каким были пересчитаны в п. **4.3** все топологически равноугольно полуправильные многогранники. Однако принцип двойственности (см. п. **2.4**) позволяет, не повторяя всех рассуждений предыдущего пункта, сразу воспользоваться их результатами. Каждому топологически равноугольно полуправильному многограннику соответствует двойственный ему топологически равногранно полуправильный многогранник и наоборот. Следовательно, существует четырнадцать различных (не изоморфных между собой) топологически равногранно полуправильных многогранников и еще две бесконечные серии таких многогранников (не считая топологически правильных). Основные характеристики этих типов многогранников легко получить на основе соображений двойственности из данных, приведенных в таблице 3 для архимедовых многогранников.

Многогранник называется (*метрически*) *равногранно полуправильным*, если все его грани равны между собой, а все его многогранные углы правильные. Как и ранее, в каждом из классов топологически равногранно полуправильных многогранников существуют метрически равногранно полуправильные многогранники, но в отличие от предыдущих случаев они, вообще говоря, не подобны между собой, так как форма их граней не определяется топологическим типом и требованием метрической полуправильности.

Все равногранно полуправильные многогранники изображены на рис. 57, *а*—*р* в том же порядке, в котором на рис. 54, *а*—*р* были изображены двойственные им архимедовы многогранники.

4.5. Правильные самопересекающиеся многогранники. Если, говоря о правильных многоугольниках, отказываться от требования, чтобы они были простыми, то мы получим, кроме уже рассматривавшихся ранее, также *самопересекающиеся*, или *звездчатые правильные многоугольники*. Пример такого многоугольника — правильный звездчатый пятиугольник — изображен на рис. 58.

Нетрудно показать (мы не будем на этом останавливаться), что стороны звездчатого правильного многоугольника M всегда являются диагоналями некоторого простого правильного многоугольника M_1, стягивающими одно и то же число его сторон. Поэтому для построения правильного n-угольника обыкновенно строят простой правильный n-угольник и проводят все его диагонали, стягивающие по k сторон, где $1 < k < \frac{n}{2}$. Если число k взаимно просто с n, то при

этом получается некоторый правильный звездчатый n-угольник; если же k не взаимно просто с n, то получается несколько отдельных ломаных — так называемый *распадающийся многоугольник* (см. рис. 59, где изображен случай $n=6$, $k=2$, в котором получаются два треугольника). Таким образом, для каждого n существует столько различных (не подобных между собой) правильных звездчатых n-угольников, сколько имеется целых чисел, заключенных между 1 и $\frac{n}{2}$, взаимно простых с n[1]): правильный звездчатый пятиугольник существует только один (рис. 58), правильных звездчатых семиугольников — два (рис. 60 *а*, *б*), правильных звездчатых треугольников, четырехугольников и шестиугольников не существует вовсе.

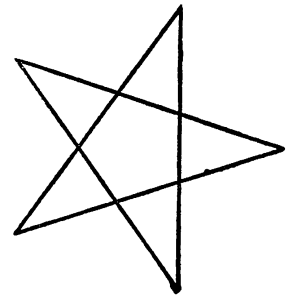


Рис. 58.

Правильные звездчатые многоугольники можно получить и иначе. Прямые, на которых лежат стороны любого такого n-угольника M, делят всю плоскость на некоторое число частей, одна из которых, называемая *ядром* данного n-угольника M, представляет собой простой правильный n-угольник M_0. Поэтому любой звездчатый правильный n-угольник M может быть получен из простого правильного n-угольника M_0 продолжением каждой его стороны до пересечения со сторонами, отделяемыми от нее одним и тем же числом $k-1$ сторон $\left(1<k<\frac{n}{2}\right)$; при этом, как и выше, если k не взаимно просто с n, мы получаем распадающийся многоугольник.

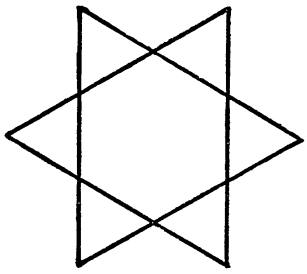


Рис. 59.

Перейдем теперь к многогранникам. Если в определении правильного многогранника не требовать, чтобы он был простым, мы получим, кроме уже рассмотренных в п. 4.2 платоновых многогранников, также *самопересекающиеся*, или *звездчатые правильные многогранники*, называемые еще *многогранниками Пуансо*. Укажем в общих чертах, как можно найти все такие многогранники[2]).

---

[1]) Таким образом, число различных правильных звездчатых n-угольников может быть записано в виде $\frac{1}{2}\varphi(n)$, где $\varphi(n)$ есть употребляемая в теории чисел функция Эйлера (см. в кн. I ЭЭМ статью «Элементы теории чисел», стр. 280—282).

[2]) С более подробным изложением этого вопроса читатель может ознакомиться по книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова, И. М. Яглома [5], указанной в конце статьи.

Плоскости граней произвольного звездчатого правильного многогранника M делят все пространство на некоторое число частей, из которых одна, называемая *ядром* многогранника M, является простым правильным многогранником M_0. Многогранник M_0 имеет столько же граней, сколько M; поэтому правильный звездчатый многогранник называют так же, как его ядро (тетраэдр, додекаэдр и т. п.).

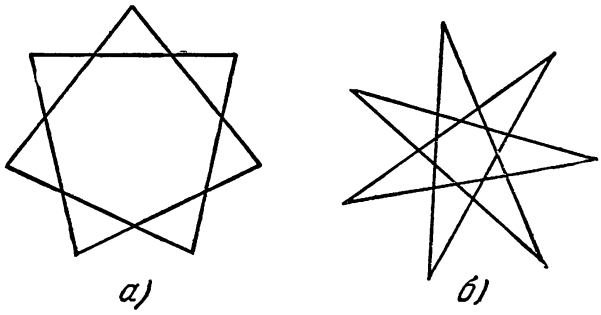


Рис. 60.

Возможны два случая: 1) смежными в многограннике M_0 являются те же грани, которые смежны в M; в этом случае каждой грани α многогранника M (которая обязательно должна быть звездчатой) отвечает грань α_0 многогранника M_0, являющаяся ядром грани α; многогранник M получается в этом случае из своего ядра M_0 путем продолжения его ребер; 2) смежные грани многогранника M не являются смежными в M_0; в этом случае многогранник M получается из M_0 путем продолжения его граней.

Выясним теперь, какие звездчатые многогранники могут быть получены указанными способами из известных нам простых правильных многогранников.

1°. Тетраэдр. Все грани тетраэдра смежны между собой, поэтому продолжение граней тетраэдра не может вести к цели. Звездчатых треугольников не существует, поэтому то же самое можно сказать о продолжении ребер тетраэдра. Поэтому звездчатых тетраэдров не существует.

2°. Октаэдр. Так как грани правильного октаэдра — треугольники, то продолжение ребер октаэдра не ведет к цели. Продолжение же граней правильного октаэдра (каждая грань продолжается до пересечения с тремя не смежными и не параллельными ей гранями, см. рис. 61) дает распадающийся многогранник — два правильных тетраэдра. Следовательно, звездчатых октаэдров также не существует.

3°. Гексаэдр. Все несмежные ребра и грани правильного гексаэдра (куба) параллельны между собой. Поэтому и звездчатых гексаэдров не существует.

4° . Додекаэдр. Продолжение ребер правильного додекаэдра, т. е. замена каждой его грани α звездчатым пятиугольником с ядром α (рис. 62, *а*), приводит к многограннику, называемому *малым звездчатым додекаэдром* (рис. 63, *а*); он имеет 12 звездчатых пятиугольных граней, 30 ребер и 12 вершин (выпуклых пятигранных углов).

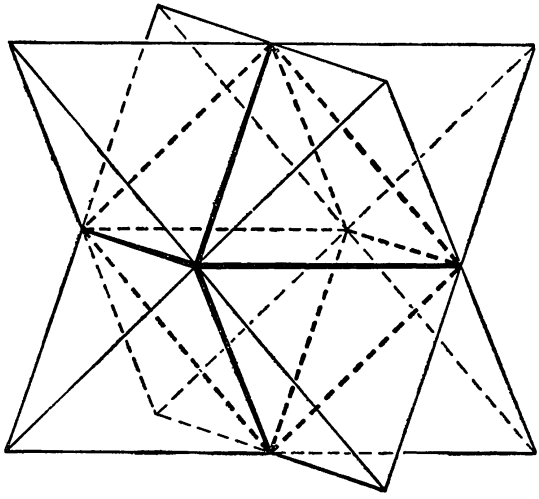


Рис. 61.

При продолжении граней правильного додекаэдра (каждая грань продолжается до пересечения с пятью не смежными и не параллельными ей гранями) возникают две возможности. Рассматривая в качестве граней нового многогранника получающиеся при этом простые пятиугольники (рис. 62,*б*), мы приходим к *большому додекаэдру* (рис. 63, *б*); он имеет 12 выпуклых пятиугольных граней, 30 ребер и 12 вершин (звездчатых пятигранных углов). Рассматривая же в качестве граней соответствующие звездчатые пятиугольники (рис. 62, *в*), мы получим *большой звездчатый додекаэдр* (рис. 63,*в*); он имеет 12 звездчатых пятиугольных граней, 30 ребер и 20 вершин (трехгранных углов).

Таким образом мы нашли три типа правильных звездчатых додекаэдров.

5°. Икосаэдр. Так как гранями правильного икосаэдра являются треугольники, то продолжение ребер икосаэдра не дает нового многогранника. При продолжении же граней правильного икосаэдра имеется лишь один случай, приводящий к нераспадающемуся многограннику — случай, когда каждая грань продолжается до пересечения с тремя гранями, смежными параллельной ей грани (рис. 62, *г*).

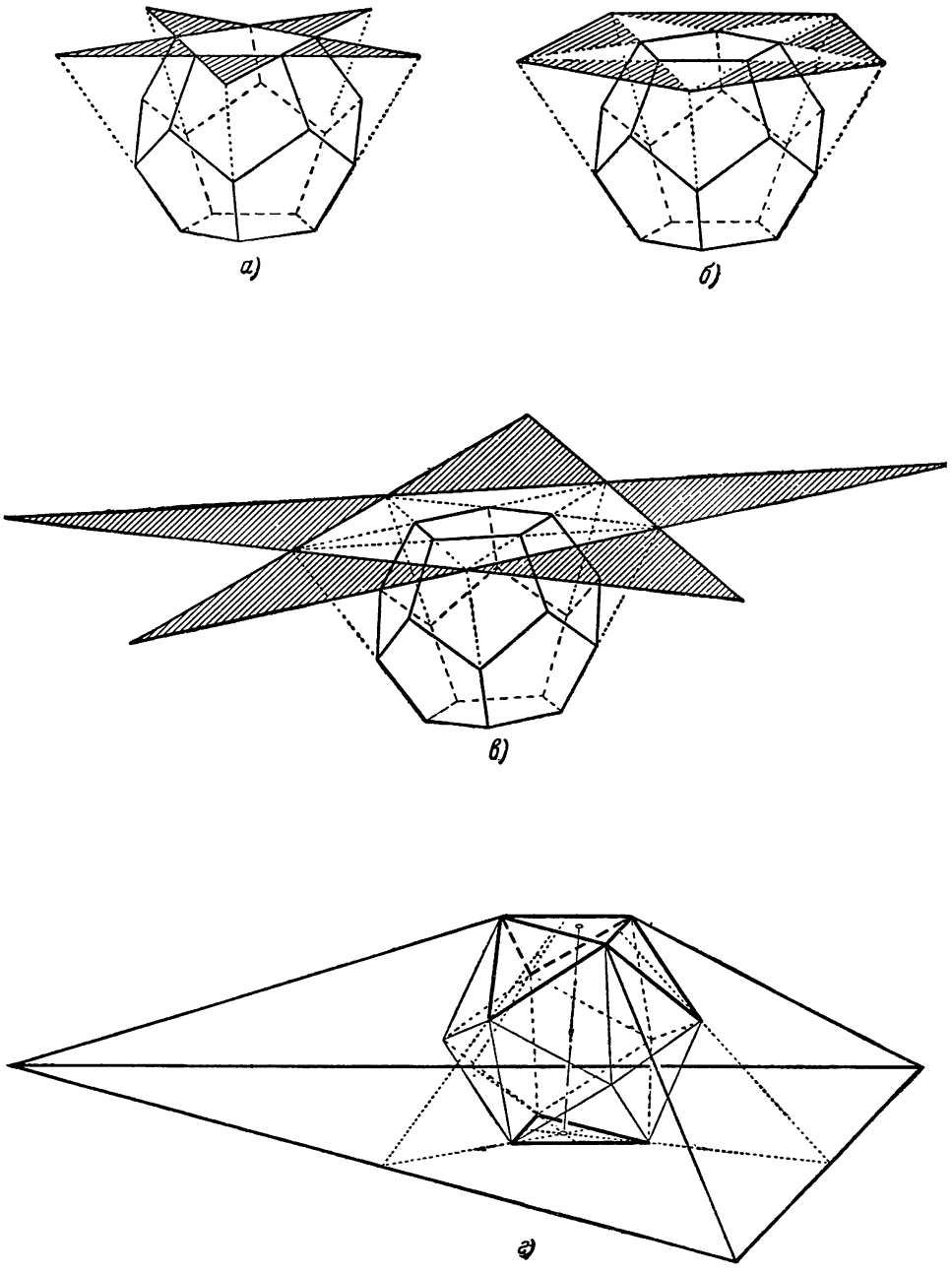


Рис. 62.

Получаемый при этом многогранник называется *большим икосаэдром* (рис. 63, *г*); он имеет 20 треугольных граней, 30 ребер и 12 вершин (звездчатых пятигранных углов).

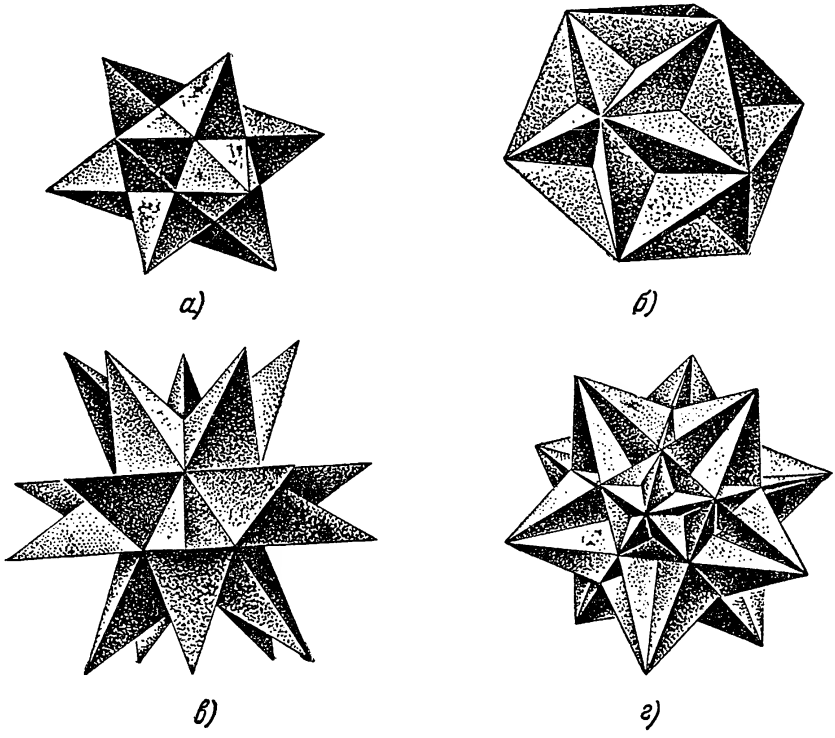


Рис. 63.

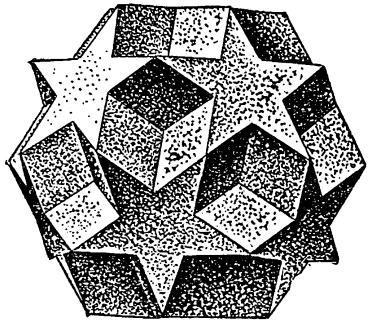


Рис. 64.

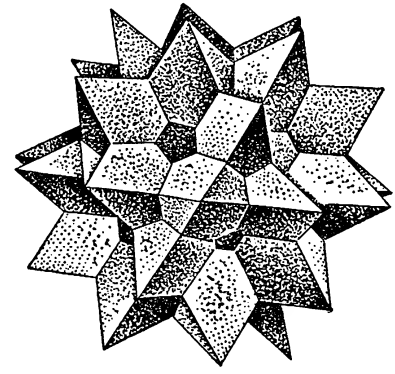


Рис. 65.

Итак, существует всего четыре различных (с точностью до подобия) звездчатых правильных многогранников. Нетрудно убедиться в том, что эти многогранники попарно двойственны друг другу:

малый звездчатый додекаэдр двойствен большому додекаэдру, а большой звездчатый додекаэдр — большому икосаэдру.

Можно рассматривать также аналогично архимедовым многогранникам (см. п. **4.3**) равноугольно полуправильные самопересекающиеся многогранники. Простейшими примерами таких многогранников являются многогранники, изображенные на рис. 64 и 65 и получающиеся в результате пересечения взаимных правильных звездчатых многогранников. Первый из них — *додекаэдрододекаэдр* — имеет 24 пятиугольных грани: 12 простых (как у большого додекаэдра) и 12 звездчатых (как у малого звездного додекаэдра). Второй — *додекаэдроикосаэдр* — имеет 32 грани: 20 треугольников (как у большого додекаэдра) и 12 звездчатых пятиугольников (как у большого звездного додекаэдра). Всего в настоящее время известен 51 звездчатый равноугольно полуправильный многогранник, но неизвестно, исчерпываются ли ими все такие многогранники.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, Выпуклые многогранники, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
Серьезная, но доступная монография, в значительной степени основанная на исследованиях автора. Весьма широко освещает круг вопросов, связанный с темой настоящей статьи.

[2] Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, М., Гостехиздат, 1956.
Научно-популярная книга, имеющая много точек соприкосновения с темой настоящей статьи.

[3] Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, ч. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
Обстоятельный учебник стереометрии. К теме настоящей статьи примыкает гл. XIX «Теорема Эйлера. Правильные многогранники и их обобщения».

[4] Ж. Адамар, Элементарная геометрия, ч. 2, перев. с франц., М., Учпедгиз, 1958.
Весьма подробный учебник стереометрии. К теме настоящей статьи примыкает гл. III Дополнений ко второй части «Теорема Эйлера. Правильные многогранники», Прибавление *E* к книге «О правильных многогранниках и группах движений» и Прибавление *F* «Теорема Коши о правильных многогранниках».

[5] Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, ч. 3, М., Гостехиздат, 1954.
Сборник задач повышенной трудности по стереометрии, сопровождаемых подробными решениями. Второй из четырех циклов задач носит название «Теория многогранников» и содержит довольно обширный материал (включая сюда оригинальное доказательство теоремы Коши). Третий цикл задач называется «Правильные многогранники»; здесь содержится, в частности, полная теория звездчатых правильных многогранников.

[6] Цикл статей по геометрии в вып. II журнала Успехи математических наук, 1936.

К теме настоящей статьи относятся работы: Г. Минковский, Общие теоремы о выпуклых многогранниках, стр. 55—71 и М. Денн, О жесткости выпуклых многогранников, стр. 72—79.

[7] Цикл статей по наглядной геометрии в вып. X журнала Успехи математических наук, 1944.

К теме настоящей статьи относятся работы: О. Коши, Исследование о многогранниках, стр. 5—17 и А. Кэли, О четырех новых правильных телах Пуансо, стр. 18—21.

[8] В. Г. Ашкинузе, О числе полуправильных многогранников, сб. «Математическое просвещение», вып. 1, 1957, стр. 107—118; А. Г. Дорфман, Ромбокубооктаэдры и взаимные им многогранники, там же, вып. 6, 1961, стр. 207—208.

Эти статьи посвящены вопросу о числе типов полуправильных многогранников.

[9] H. S. M. Coxeter, Regular polytops, London, 1948.

Обстоятельная монография видного канадского геометра, содержащая исключительно большой материал по теории правильных многогранников и их обобщений.

ОКРУЖНОСТИ

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 449

А. Окружность как совокупность точек

§ 1. Обобщение понятия окружности 450
1.1. Направленные отрезки и углы 450
1.2. Разные определения окружности; касание окружностей . . 451
§ 2. Радикальная ось и радикальный центр 454
2.1. Степень точки относительно окружности 454
2.2. Радикальная ось двух окружностей 455
2.3. Радикальный центр трех окружностей 459
§ 3. Пучки и связки окружностей 461
3.1. Пучок окружностей 461
3.2. Связка окружностей 466
§ 4. Инверсия 468
4.1. Определение инверсии 468
4.2. Свойства инверсии 471
4.3. Теорема Паскаля 475
§ 5. Точечная геометрия окружностей 476
5.1. Круговая плоскость 476
5.2. Круговые преобразования 478
5.3. Понятие о круговой геометрии 478

Б. Окружность как совокупность прямых

§ 6. Направленные окружности 479
6.1. Аналогия между свойствами точек и прямых 479
6.2. Дальнейшее расширение понятия окружности 480
6.3. Касательное расстояние двух окружностей 482
§ 7. Центр подобия и ось подобия 485
7.1. Степень прямой относительно окружности 485
7.2. Центр подобия двух окружностей 487
7.3. Ось подобия трех окружностей 489
§ 8. Ряды и сети окружностей 490
8.1. Ряд окружностей 490
8.2. Сеть окружностей 492
§ 9. Осевая инверсия 495
9.1. Определение осевой инверсии 495
9.2. Вырожденная инверсия и особая инверсия 496
9.3. Свойства осевой инверсии 498
9.4. Теорема Брианшона 502

§ 10. Осевая геометрия окружностей 504
10.1. Осевые круговые преобразования 504
10.2. Понятие об осевой круговой геометрии 507

В. Окружность как совокупность линейных элементов

§ 11. Новый взгляд на окружность 508
11.1. Плоскость как множество линейных элементов 508
11.2. Новое определение окружности 509
§ 12. Касательная геометрия окружностей 510
12.1. Касательные круговые преобразования 510
12.2. Задача Аполлония 513
12.3. Понятие о касательной геометрии окружностей 515
Литература 516

ВВЕДЕНИЕ

Учение об окружности занимает в элементарной геометрии весьма значительное место. Еще со времен Евклида элементарная планиметрия рассматривалась как наука, изучающая прямые линии, окружности и некоторые простейшие фигуры (вроде треугольника или сектора круга), ограниченные частями прямых и окружностей. Таким образом, окружность является единственной кривой, рассматриваемой в курсе элементарной геометрии, что оправдывает большое внимание, уделяемое изучению свойств этой линии. Значительное число разнообразных свойств окружности было известно еще древнегреческим математикам; но особенно велики заслуги ученых XIX века в изучении этих свойств. В XIX веке был собран богатейший фактический материал, состоящий из многочисленных теорем частного характера, иногда исключительно красивых и совершенно неожиданных, и, что значительно важнее, в этом же веке были указаны некоторые основные общие принципы так называемой «геометрии окружностей». Цель настоящей статьи и состоит в том, чтобы осветить эти принципиальные основы теории окружностей, заложенные в первую очередь немецким математиком Августом Фердинандом Мебиусом (1790—1868) (материал раздела А настоящей статьи), французским математиком Эдмондом Лагерром (1834—1886) (материал раздела Б) и норвежским математиком Софусом Ли (1842—1898) (материал раздела В). Что же касается разнообразных специальных свойств окружностей, то на них мы почти не остановимся в нашем, по необходимости довольно сжатом, изложении.

Заметим еще, что все содержание настоящей статьи может быть без труда перенесено и на геометрию в пространстве; лишь ограниченность объема заставляет нас отказаться от изложения геометрии сфер, не содержащей, впрочем, почти никаких принципиально новых моментов по сравнению с геометрией окружностей.

А. ОКРУЖНОСТЬ КАК СОВОКУПНОСТЬ ТОЧЕК

§ 1. Обобщение понятия окружности

1.1. Направленные отрезки и углы. В этой статье значительную роль будут играть *направленные отрезки и углы*. Если на прямой задать какое-либо направление (оно указывается обычно стрелкой), то каждому отрезку этой прямой, кроме абсолютной величины (длины), можно будет приписать также определенный знак: так на рис. 1, *а* отрезок AB положителен, а отрезок CD отрицателен. В дальнейшем направленные отрезки мы будем обозначать черточкой, поставленной над обозначением отрезка; так AB будет обозначать обыкновенный (ненаправленный) отрезок, а $\overline{AB}$ — направленный отрезок, т. е. отрезок, взятый с определенным знаком; таким образом, отрезки AB и BA не отличаются, но $\overline{AB} = -\overline{BA}$. При этом следует иметь в виду, что, говоря о произведении (или отношении) двух отрезков одной прямой, мы можем считать эти отрезки направленными, не выбирая заранее никакого направления на самой прямой: если AB и CD — два отрезка одной прямой, то *независимо от выбора направления на прямой* произведение $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ (и отношение $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$) будет положительным, если направления отрезков AB и CD (от A к B и от C к D) совпадают, и отрицательным, если эти направления различны (как на рис. 1, *а*) [1].

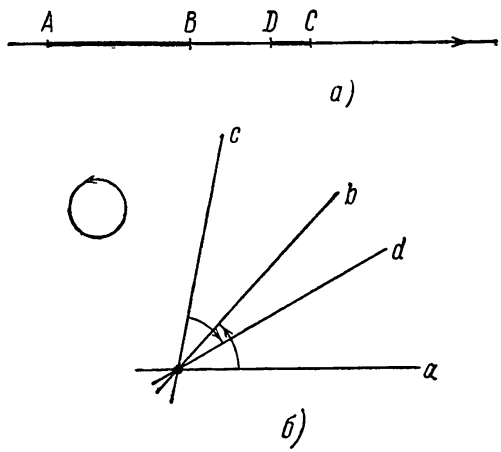


Рис. 1.

Аналогично этому, если выбрать какое-либо направление вращения (определяемое стрелкой, поставленной на некоторой окружности), то углу между прямыми (ненаправленными!), кроме абсолютной величины, можно будет приписать также и знак: угол между a и b считается положительным, если направление вращения от прямой a к прямой b совпадает с выбранным направлением, и отрицательным в противном случае (так на рис. 1, *б* угол между прямыми a и b положителен, а угол между c и d отрицателен). В дальнейшем обыкновенный угол мы будем обозначать знаком $\angle$, а направленный угол — знаком $\measuredangle$; таким образом углы $\angle(a, b)$ и $\angle(b, a)$ не отли-

[1]) Ср. стр. 55, 56 и 59.

чаются, но $\measuredangle(a, b) = -\measuredangle(b, a)$. При этом направленный угол между двумя прямыми, так же как и обыкновенный угол, не определяется однозначно; так на рис. 2 можно считать, что $\measuredangle(a, b) = \angle AOB$ или что $\measuredangle(a, b) = -\angle AOC$. Нетрудно видеть, что направленный угол между двумя прямыми определяется *с точностью до произвольного кратного угла* π; так в обозначениях рис. 2 $-\angle AOC = \angle AOB - \pi$, а указанный стрелкой больший π угол AOC равен $\angle AOB + \pi$. Обычно под направленным углом между прямыми a и b понимают наименьший по абсолютной величине угол между этими прямыми; в случае, если прямые a и b перпендикулярны, считают, что $\measuredangle(a, b) = +\frac{\pi}{2}$. В дальнейшем у нас символ $\measuredangle(a, b)$ будет всюду иметь именно это значение; в частности, равенство $\measuredangle(a, b) = \measuredangle(c, d)$ будет означать, что наименьшие по абсолютной величине из направленных углов между a и b и между c и d совпадают по абсолютной величине и по знаку.

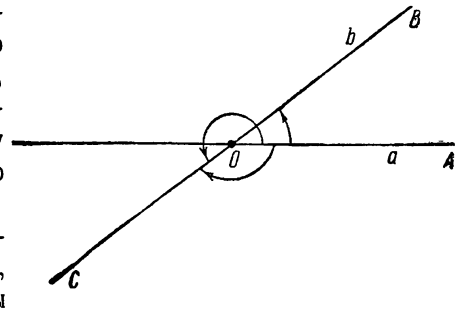


Рис. 2.

Заметим, что, говоря об отношении или произведении двух углов, мы также можем считать эти углы направленными, не задавая заранее никакого направления вращения: например, отношение $\measuredangle(a, b) : \measuredangle(c, d)$ будет положительно, если направления вращений на наименьший по абсолютной величине угол, переводящих a в b и c в d, совпадают, и отрицательно в противном случае. В частности, так как утверждение о *равенстве* двух углов означает, что отношение этих углов равно единице, то, говоря о равенстве или неравенстве двух направленных углов, мы не обязаны задавать заранее какое-то определенное направление вращения.

1.2. Разные определения окружности; касание окружностей. Основным предметом изучения в этой статье будут являться окружности. *Окружность*—это множество всех точек плоскости, удаленных на одно и то же расстояние r от фиксированной точки O; точка O называется *центром* окружности, а отрезок r — ее *радиусом*. В предельном случае можно также считать, что расстояние r — радиус окружности — равно нулю; в этом случае «окружность» будет представлять собой одну точку O. В дальнейшем нам часто будет удобно рассматривать также и точки как окружности, принимая их за «окружности нулевого радиуса»; в таком случае обыкновенные окружности мы будем называть «собственными окружностями». Точки («окружности нулевого радиуса») и «собственные окружности» вместе мы будем называть «окружностями конечного радиуса».

Данное выше определение окружности не является единственно возможным. Весьма часто оказывается полезным определение *окружности* как множества всех таких точек M, из которых данный отрезок AB виден под постоянным (направленным!) углом α, или,

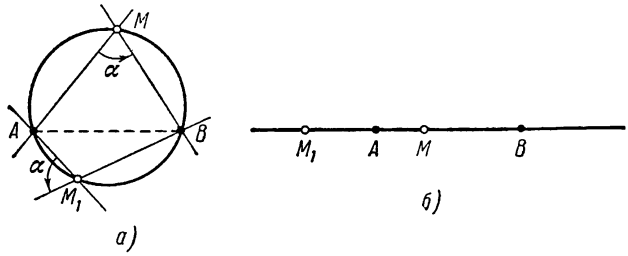


Рис. 3.

короче, таких точек M, что $\measuredangle(MA, MB) = \alpha$ (рис. 3, *а*). При заданном отрезке AB радиус рассматриваемой окружности, естественно, зависит от величины угла α (из тригонометрии известно, что он равен абсолютной величине отношения $\frac{AB}{2\sin\alpha}$); этот радиус будет тем больше, чем меньше (по абсолютной величине) угол α. Если принять $\alpha = 0$, то мы придем к прямой линии (рис. 3, *б*), которая, таким образом, тоже подходит под наше определение и которую

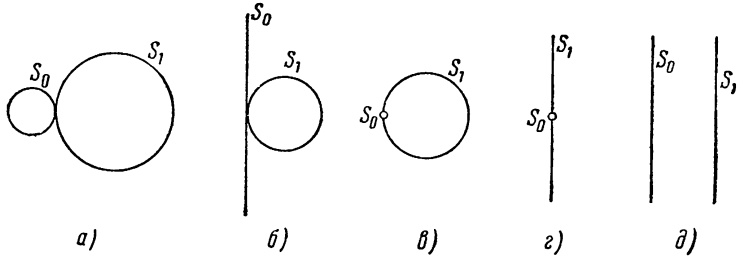


Рис. 4.

поэтому можно считать предельным случаем окружности. В дальнейшем нам часто будет удобно причислять прямые линии к числу окружностей. Ясно, что для таких «окружностей» понятие центра и радиуса теряет смысл. Мы будем называть прямые «окружностями бесконечного радиуса»; совокупность обыкновенных окружностей и прямых — «окружностями ненулевого радиуса»; наконец, под словом просто «окружности» мы будем часто понимать как обыкновенные окружности, так и точки («окружности нулевого радиуса») и прямые («окружности бесконечного радиуса»). Целесообразность этих довольно громоздких соглашений выяснится в ходе дальнейшего изложения.

Понятие *касания* двух собственных окружностей или собственной окружности и прямой имеет совершенно ясный смысл (рис. 4, *а*, *б*). В дальнейшем нам будет удобно называть «окружность нулевого радиуса» S_0 и «окружность ненулевого радиуса» S_1 касающимися, если точка S_0 лежит на окружности или прямой S_1 (рис. 4, *в*, *г*); наконец, две «окружности бесконечного радиуса» S_0 и S_1 мы будем называть касающимися, если прямые S_0 и S_1 параллельны (рис. 4, *д*). Далее под углом между двумя окружностями ненулевого радиуса S_0 и S_1, пересекающимися в точке M, мы будем называть угол между касательными к S_0 и S_1 в этой точке (рис. 5, *а*, *б*; под «касательной к прямой» здесь понимается сама эта прямая). При этом рассматриваемый угол можно считать ненаправленным или направленным; заметим только, что направленные углы между S_0 и S_1 в двух точках пересечения M и N имеют разные знаки (см. тот же рис. 5, *а*, *б*). Особую роль у нас будут играть *перпендикулярные* (или *ортогональные*) окружности, т. е. окружности, образующие в точке пересечения прямой угол; очевидно, что радиус каждой из двух таких

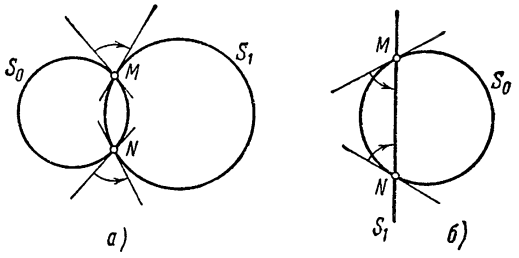


Рис. 5.

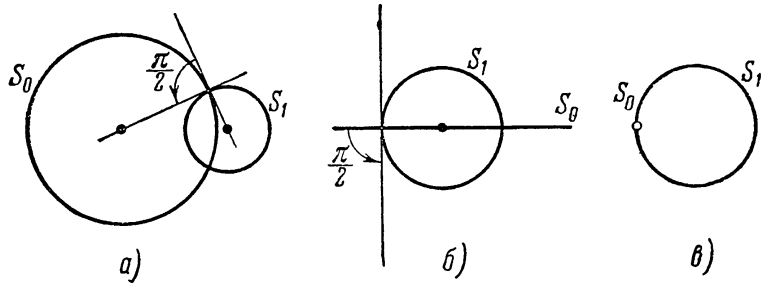


Рис. 6.

собственных окружностей, проведенный в точку пересечения, касается второй окружности (рис. 6, *а*) и что прямая S_0, перпендикулярная собственной окружности S_1, совпадает с ее диаметром (рис. 6, *б*). Нам будет удобно еще считать, что «окружность нулевого радиуса» S_0 перпендикулярна «окружности ненулевого радиуса» S_1, если точка S_0 лежит на окружности или прямой S_1 (рис. 6, *в*). Таким образом, утверждения «окружность нулевого радиуса S_0 касается окружности ненулевого радиуса S_1» и «S_0 перпендикулярна S_1» имеют одинаковый смысл. Это обстоятельство не должно нас удивлять: ведь за «касательную к окружности нулевого радиуса S_0» можно

принять любую прямую, проходящую через точку S_0; поэтому если точка S_0 лежит на окружности или прямой S_1, то углу между S_0 и S_1 можно приписать любое значение, в частности можно считать, что этот угол равен 0 (т. е. что S_0 и S_1 касаются) или что он равен $\frac{\pi}{2}$ (т. е. что S_0 и S_1 перпендикулярны).

§ 2. Радикальная ось и радикальный центр

2.1. Степень точки относительно окружности. Вспомним следующую теорему, хорошо известную из школьного курса геометрии:

Если через точку M провести несколько прямых, пересекающих (собственную) *окружность S, то произведение расстояний от точки M до точек пересечения каждой из этих прямых с окружностью* (произведение $MA \cdot MB$ на рис. 7, *а*, *б*) *будет одним и тем же для всех этих прямых.*

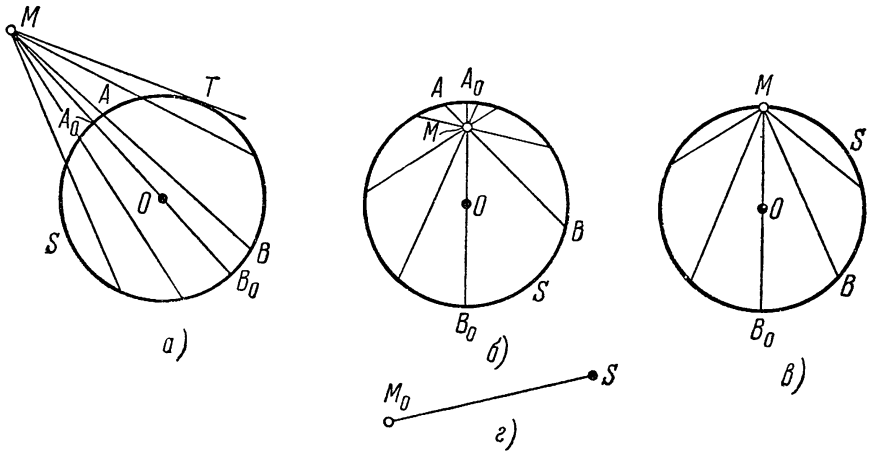


Рис. 7.

Эта теорема справедлива как для того случая, когда точка M лежит вне окружности S (рис. 7, *а*; в этом случае произведение $MA \cdot MB$ равно квадрату длины касательной, проведенной к окружности S из точки M), так и для того случая, когда M лежит внутри S (рис. 7,*б*; в этом случае $MA \cdot MB$ равно квадрату половины хорды, проведенной через точку M перпендикулярно диаметру OM окружности). Если точка M лежит на окружности S (рис. 7, *в*), то один из двух отрезков MA, MB равен нулю; таким образом, и в этом случае произведение $MA \cdot MB$ не зависит от выбора прямой — оно равно нулю для всякой прямой. Наконец, если под S понимать «окружность нулевого радиуса», т. е. точку (рис. 7, *г*), то «пересекающая S»

прямая, проходящая через не совпадающую с S точку M, будет только одна (и для этой прямой обе точки A и B придется отождествить с точкой S), так что можно считать, что и в этом предельном случае наша теорема сохраняет силу.

Заметим еще, что теорема сохраняет силу и в том случае, если говорить о произведении направленных отрезков $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ (см. § 1): если точка M лежит вне S, то произведение $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ всегда будет положительным, а в противном случае — всегда отрицательным. Таким образом, и абсолютная величина, и знак произведения $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ зависят лишь от положения точки M и окружности (конечного радиуса) S, но не от выбора проходящей через M прямой. Это произведение называется *степенью точки M относительно окружности S*. Из рис. 7, *а—г* нетрудно вывести, что *степень точки M относительно окружности S конечного радиуса r во всех случаях равна $d^2 - r^2$, где d — расстояние OM от точки M до центра O окружности*. Для того чтобы это доказать, достаточно принять за прямую MAB проходящую через центр окружности S прямую MA_0B_0.

2.2. Радикальная ось двух окружностей. С введением понятия степени точки относительно окружности возникает вопрос об отыскании целого ряда множеств точек, например множества всех точек, имеющих относительно данной окружности постоянную степень (это будет окружность, концентрическая с данной). Из таких множеств точек особую роль в геометрии играет *множество всех точек, имеющих равные степени относительно двух окружностей S_1 и S_2*. Это множество точек называется *радикальной осью* окружностей S_1 и S_2.

Докажем, что *радикальной осью двух неконцентрических окружностей S_1 и S_2 конечного радиуса является прямая линия o, перпендикулярная линии центров этих окружностей; радикальной оси двух концентрических (не совпадающих) окружностей вовсе не существует*.

Действительно, если точка M принадлежит радикальной оси двух окружностей S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 и радиусами r_1 и r_2 (рис. 8), то в силу сказанного выше должно быть

$$O_1M^2 - r_1^2 = O_2M^2 - r_2^2. \qquad (*)$$

Прежде всего, ясно, что это равенство невозможно, если $r_1 \neq r_2$ и точки O_1 и O_2 совпадают, — отсюда вытекает наше утверждение касающееся концентрических окружностей.

Предположим теперь, что точки O_1 и O_2 не совпадают; пусть, например, $O_1O_2 = l \neq 0$. Покажем, что на прямой O_1O_2 имеется ровно одна точка P, принадлежащая радикальной оси. В самом деле, пусть P — произвольная точка прямой O_1O_2 и x — ее расстояние от O_1, которое мы будем считать положительным, если P и O

расположены по одну сторону от точки O_1, и отрицательным в противном случае. Тогда $O_1P=|x|$, $O_2P=|x-l|$, и потому соотношение (*) принимает вид

$$x^2-r_1^2=(x-l)^2-r_2^2.$$

Это соотношение представляет собой линейное уравнение относительно неизвестного x_1, имеющее единственный корень:

$$x=\frac{l^2+r_1^2-r_2^2}{2l}.$$

Заметим теперь, что точка M в том и только в том случае принадлежит радикальной оси, если ее проекция P на прямую O_1O_2

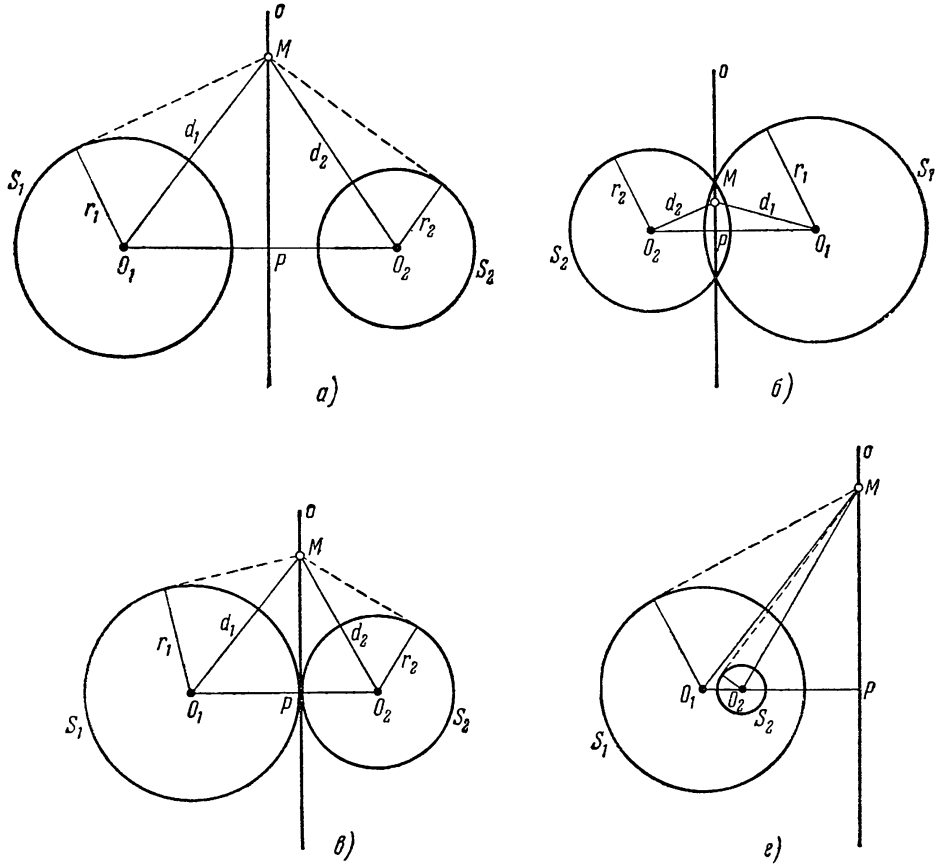


Рис. 8.

также принадлежит радикальной оси. Это вытекает из очевидного соотношения

$$O_1M^2-O_2M^2=O_1P^2-O_2P^2$$

(см. рис. 8) и соотношения (*). Из этого и следует, что радикальная ось (двух неконцентрических окружностей) представляет собой прямую, перпендикулярную к линии центров O_1O_2.

Можно предложить также следующий «векторный» вывод теоремы о радикальной оси. Соотношение (*) можно переписать в виде

$$x^2-r_1^2=(x-l)^2-r_2^2,$$

где $x=\overline{O_1M}$; $l=\overline{O_1O_2}$. Раскрывая скобки в этом соотношении, получаем

$$2xl=l^2+r_1^2-r_2^2.$$

В силу определения скалярного произведения[1]) это соотношение означает что

$$\text{пр}_l\, x=\frac{l^2+r_1^2-r_2^2}{2l},$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Различные случаи расположения радикальной оси двух окружностей изображены на рис. 8, *а* — *г*; анализ этих случаев легко провести, основываясь на формуле (*). Здесь мы отметим только, что если окружности S_1 и S_2 пересекаются, то точки их пересечения, очевидно, принадлежат радикальной оси (ибо эти точки имеют относительно обеих окружностей одинаковую степень, равную нулю) и, следовательно, радикальная ось пересекающихся окружностей совпадает с прямой, на которой расположена их общая хорда (рис. 8, *б*); если окружности S_1 и S_2 касаются, то по аналогичной причине радикальная ось проходит через точку касания и, следовательно, совпадает с общей касательной (рис. 8, *в*).

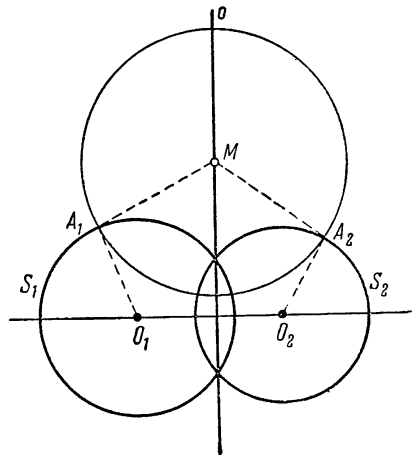


Рис. 9.

Мы знаем, что если точка M лежит вне окружности S, то ее степень относительно S равна квадрату касательной, проведенной из M к S. Отсюда вытекает, что *радикальная ось двух непересекающихся окружностей и часть радикальной оси пересекающихся окружностей, внешняя по отношению к этим окружностям, совпадает с множеством всех таких точек M, что касательные, проведенные из M к обеим окружностям, равны* (рис. 9). Это утверждение можно сформулировать еще и по-другому. Пусть окружность Σ имеет центр в точке M радикальной оси двух окружностей

[1]) См. стр. 328.

S_1 и S_2 и радиус ее равен общей длине касательных MA_1 и MA_2, проведенных из M к S_1 и к S_2 (рис. 9). Так как радиус этой окружности, проведенный в точку A_1 (соответственно A_2) пересечения ее с S_1 (с S_2), является касательной к S_1 (к S_2) и, следовательно, перпендикулярен радиусу окружности S_1 (окружности S_2), проведенному в ту же точку, то окружность Σ будет перпендикулярна окружностям S_1 и S_2. Обратно, если M есть центр окружности Σ, перпендикулярной к S_1 и S_2, то касательные, проведенные из M к S_1 и к S_2, будут равны. Таким образом, *радикальная ось непересекающихся окружностей и часть радикальной оси пересекающихся окружностей, внешняя по отношению к этим окружностям, совпадают с множеством центров окружностей, перпендикулярных к двум данным.*

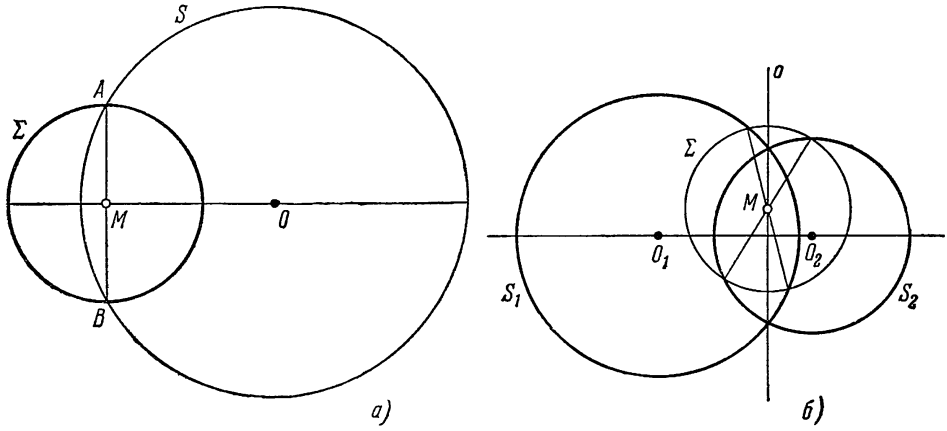


Рис. 10.

Заметим еще, что часть радикальной оси двух пересекающихся окружностей, внутреннюю по отношению к этим окружностям, также можно определить геометрически независимо от понятия степени точки относительно окружности. Условимся говорить, что *окружность S делит окружность Σ пополам* (или что Σ *делится окружностью S пополам*), если S пересекает окружность Σ в ее диаметрально противоположных точках (рис. 10,*а*). Из рис. 10,*а* видно, что центр M окружности Σ, делящейся окружностью S пополам, расположен внутри S, а ее радиус равен половине хорды окружности S, проведенной через точку M перпендикулярно диаметру OM этой окружности, т. е. что квадрат радиуса окружности Σ по абсолютной величине равен степени точки M относительно окружности S (см. стр. 454). Отсюда вытекает, что *часть радикальной оси двух пересекающихся окружностей S_1 и S_2, внутренняя по отношению к этим окружностям, совпадает с множеством центров окруж-*

ностей, делящихся пополам и окружностью S_1, *и окружностью* S_2 (рис. 10, *б*).

2.3. Радикальный центр трех окружностей. Рассмотрим теперь три окружности S_1, S_2 и S_3, никакие две из которых не концентричны.

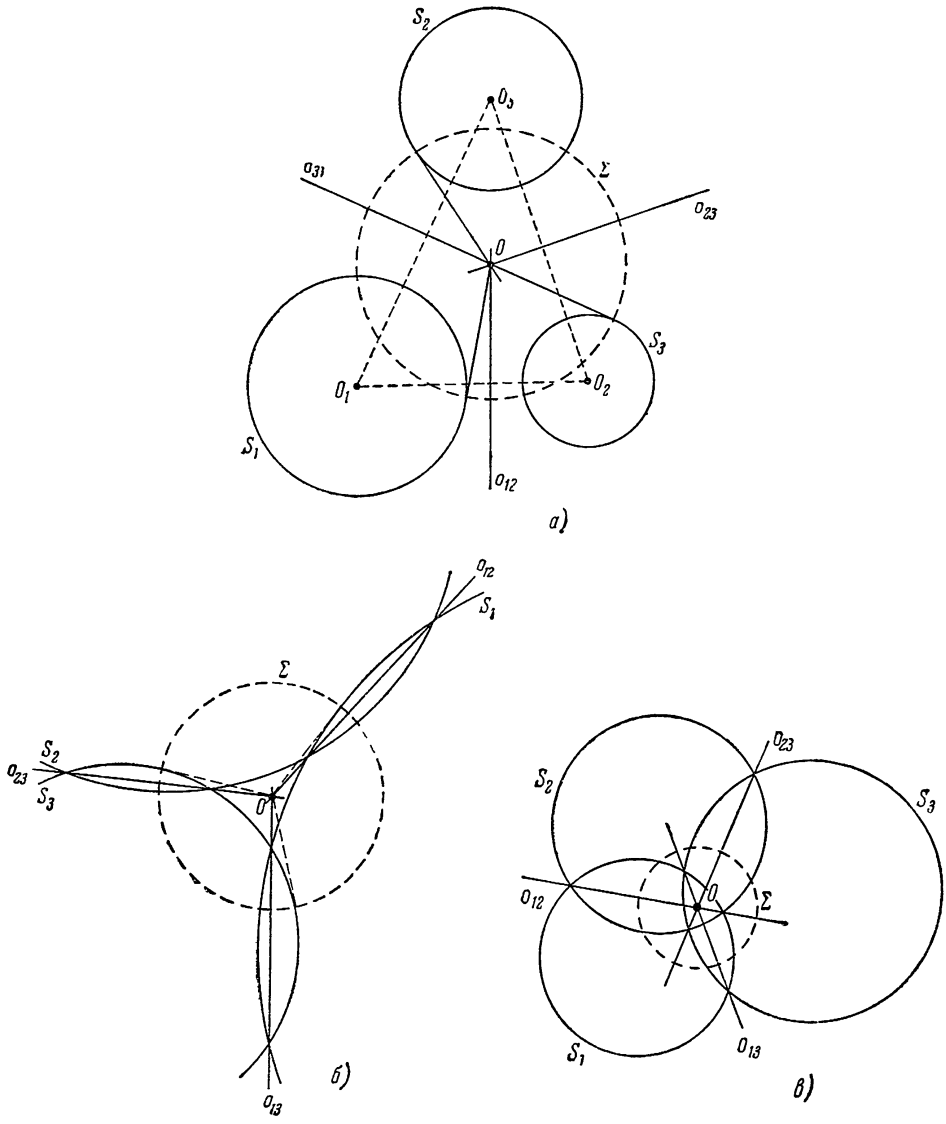


Рис. 11.

Если центры O_1, O_2 и O_3 этих окружностей не лежат на одной прямой (рис. 11), то радикальные оси o_{12} и o_{31} окружностей S_1 и S_2, S_1 и S_3 не параллельны (ибо эти прямые перпендикулярны соответственно прямым O_1O_2 и O_1O_3); пусть O — точка пересечения этих радикальных осей.

Так как точка O принадлежит радикальной оси o_{12}, то она имеет одинаковые степени относительно S_1 и S_2; так как точка O принадлежит также оси o_{13}, то она имеет одинаковые степени относительно S_1 и S_3. Но отсюда вытекает, что O имеет одинаковые степени относительно S_2 и S_3, т. е. что O принадлежит также радикальной оси o_{23} окружностей S_2 и S_3. Итак, мы видим, что *попарные радикальные оси трех окружностей конечного радиуса S_1, S_2 и S_3, центры которых не лежат на одной прямой, пересекаются в одной точке O.* Эта точка называется *радикальным центром* трех окружностей. Поскольку радикальный центр имеет одну и ту же степень относительно каждой из окружностей S_1, S_2, S_3, то либо он лежит внутри всех трех окружностей, либо принадлежит каждой из них, либо, наконец, расположен вне всех трех окружностей.

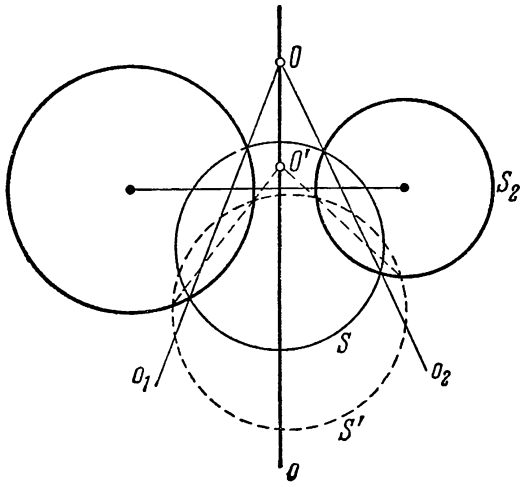


Рис. 12.

Из теоремы о радикальном центре вытекает, в частности, простое построение радикальной оси o двух непересекающихся окружностях S_1 и S_2 (радикальная ось пересекающихся окружностей совпадает с прямой, на которой лежит их общая хорда). Проведем произвольную окружность S, центр которой не лежит на линии центров окружностей S_1 и S_2 и которая пересекает как S_1, так и S_2 (рис. 12). Радикальная ось o_1 окружностей S и S_1 совпадает с их общей хордой; радикальная ось o_2 окружностей S и S_2 также совпадает с общей хордой этих окружностей. Точка O пересечения прямых o_1 и o_2 является радикальным центром окружностей S_1, S_2 и S и, следовательно, принадлежит также искомой радикальной оси окружностей S_1 и S_2. Таким образом, ось o совпадает с перпендикуляром, опущенным из точки O на линию центров (можно также с помощью иной окружности S' найти еще одну точку O' искомой радикальной оси).

Очевидно, что *если радикальный центр трех окружностей S_1, S_2 и S_3 лежит вне этих окружностей, то он является центром единственной окружности Σ, перпендикулярной ко всем трем данным* (рис. 11,*а*,*б*). *Если радикальный центр O лежит внутри данных окружностей, то он является центром единственной окружности Σ, делящейся пополам всеми данными окруж-*

ностями (рис. 11,*в*). Если центры трех данных окружностей все лежат на одной прямой, то единственной «окружностью», перпендикулярной трем данным, является их общая линия центров — «окружность бесконечного радиуса»; «окружности», делящейся пополам всеми тремя данными окружностями, в этом случае не существует.

Если центры трех окружностей S_1, S_2 и S_3 лежат на одной прямой, то их попарные радикальные оси o_{12}, o_{13} и o_{23} все перпендикулярны общей линии центров и, следовательно, параллельны между собой; таким образом, *три окружности, центры которых лежат на одной прямой, не имеют радикального центра.* В частном случае может оказаться, что прямые o_{12} и o_{13} совпадут между собой; тогда каждая точка этой прямой o будет иметь одинаковые степени относительно S_1 и S_2 и относительно S_1 и S_3. Отсюда вытекает, что каждая точка прямой o будет иметь одинаковые степени и относительно окружностей S_2 и S_3, т. е. она совпадает также с радикальной осью o_{23} окружностей S_2 и S_3. Этот случай, когда *попарные радикальные оси нескольких окружностей все совпадают между собой*, представляет по ряду причин особый интерес; мы его рассмотрим подробнее в следующем параграфе.

§ 3. Пучки и связки окружностей

3.1. Пучок окружностей. В аналитической геометрии *пучком прямых* называют совокупность всех прямых плоскости, проходящих через фиксированную точку (рис. 13,*а*), или совокупность всех параллельных между собой прямых (рис. 13,*б*) [1]). Так как мы условились рассматривать прямые как «окружности», то мы будем считать,

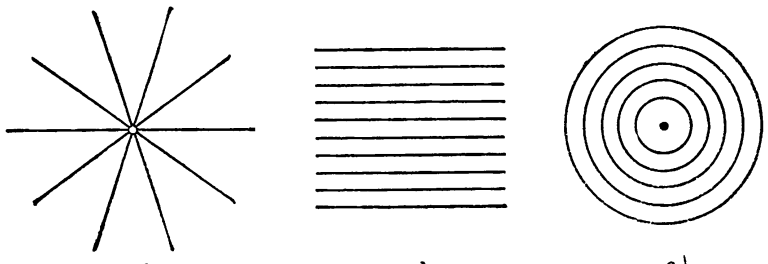


Рис. 13.

что рис. 13,*а*,*б* определяют *пучки окружностей бесконечного радиуса.* Однако больший интерес будут представлять для нас *пучки окружностей конечного радиуса.* Под таким пучком мы будем понимать совокупность всех концентрических окружностей («несобственный»

[1]) Ср. стр. 113.

пучок; рис. 13,*в*) или *совокупность всех окружностей, каждые две из которых имеют одну и ту же радикальную ось о* («собственный» пучок). Прямую *о*, называемую *радикальной осью* (собственного) *пучка*, мы условимся также включать в состав пучка; таким образом, каждый пучок, отличный от пучка концентрических окружностей, содержит хотя бы одну «окружность бесконечного радиуса» (т. е. прямую). Очевидно, что каждый собственный пучок образуется прямой *о*, какой-либо окружностью S_0 и всеми такими окружностями S, что *о* есть радикальная ось окружностей S_0 и S (из сказанного на стр. 461 вытекает, что прямая *о* явится также радикальной осью к а ж д ы х д в у х из наших окружностей).

Если какая-либо окружность S_0 собственного пучка пересекает радикальную ось *о* в точках A и B (рис. 14,*а*), то любая другая окружность S пучка должна проходить через те же точки A и B (ибо *о* есть радикальная ось окружностей S_0 и S); обратно, если S проходит через точки A и B, то *о* есть радикальная ось окружностей S_0 и S, и следовательно, S принадлежит пучку. Таким образом, в рассматриваемом случае пучок состоит из всех окружностей, проходящих через две фиксированные точки A и B. Такой пучок называется *пучком пересекающихся окружностей*. Заметим еще, что пучок пересекающихся окружностей вовсе не содержит окружностей нулевого радиуса, т. е. точек.

Предположим теперь, что окружность S_0 пучка касается радикальной оси *о* в точке A (рис. 14,*б*). В этом случае любая другая окружность S пучка должна также касаться *о* в той же точке A, ибо *о* есть радикальная ось окружностей S_0 и S. Обратно, если S касается прямой *о* в точке A, то радикальная ось окружностей S_0 и S совпадает с *о*. Таким образом, в этом случае пучок состоит из всех окружностей, касающихся прямой *о* в данной точке A; такой пучок называется *пучком касающихся окружностей*. Пучок касающихся окружностей включает одну окружность нулевого радиуса, а именно точку A: действительно, радикальная ось этой точки и любой из окружностей пучка совпадает с *о*. [Заметим, что пучок концентрических окружностей также содержит одну окружность нулевого радиуса—общий центр всех окружностей пучка.]

Наконец, если окружность S_0 пучка не пересекает радикальной оси *о* (рис. 14,*в*), то никакая окружность S пучка не может пересекать *о*, так как иначе радикальная ось окружностей S_0 и S не совпадала бы с *о*. Далее, никакие две окружности пучка не могут пересечься, ибо в противном случае радикальная ось этих окружностей — их общая хорда—отличалась бы от *о*. Такой пучок называется *пучком непересекающихся окружностей* [1]).

[1]) В литературе перечисленные три типа пучков (изображенные на рис. 14, *а*—*в*) обыкновенно называются *эллиптическим пучком*, *параболическим пучком* и *гиперболическим пучком*.

Очевидно, что во всех случаях центры всех окружностей собственного пучка лежат на одной прямой — на перпендикуляре z, опущенном из центра какой-либо окружности S_0 пучка на радикальную

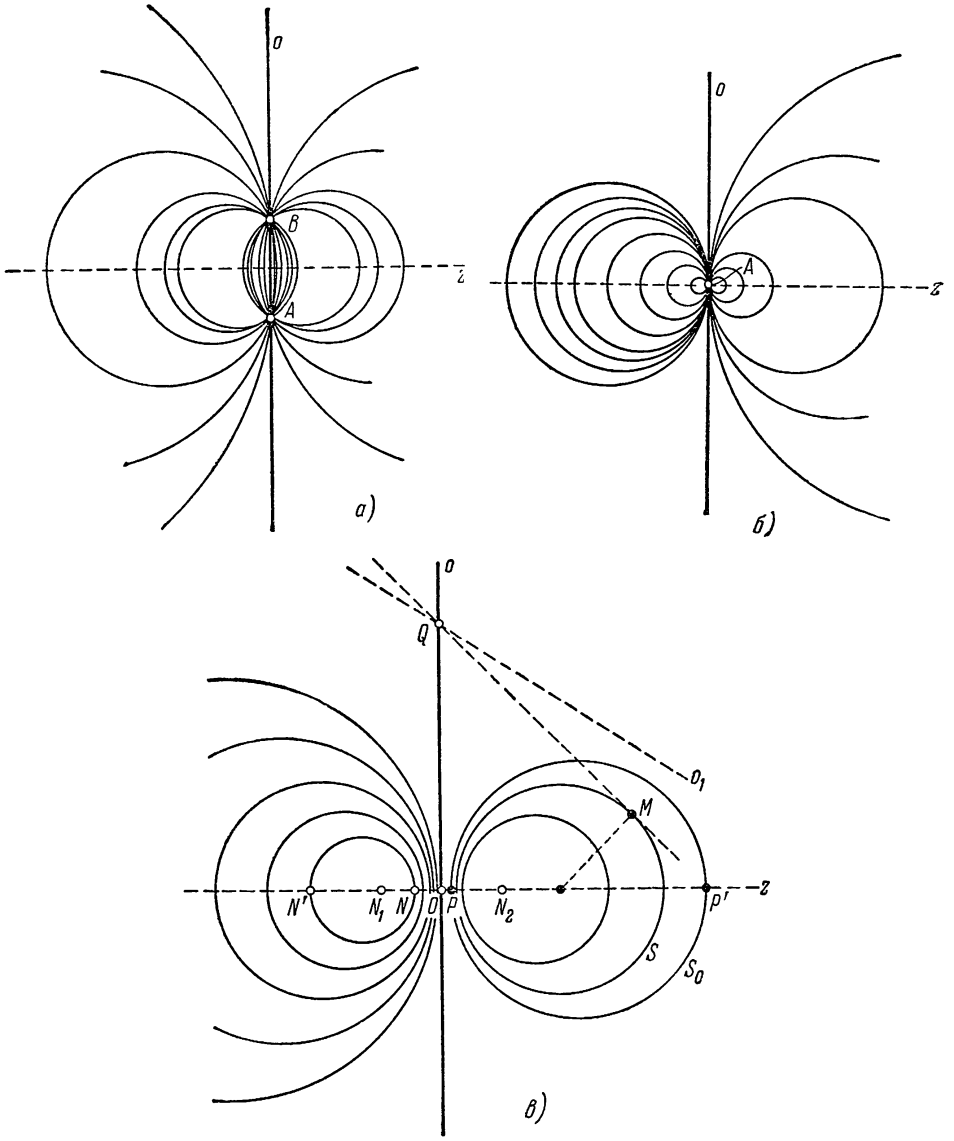


Рис. 14.

ось o; эта прямая z называется *линией центров* пучка. Заметим еще, что во всех случаях *через каждую точку M плоскости проходит хотя бы одна окружность пучка*. Это совершенно очевидно для обоих типов «пучков окружностей бесконечного радиуса»,

т. е. для пучков прямых, и для пучков концентрических, пересекающихся или касающихся окружностей. Покажем, что так же будет обстоять дело и в случае пучка непересекающихся окружностей. Прежде всего, ясно, что через каждую точку N линии центров z проходит окружность пучка: диаметр NN' этой окружности определяется равенством $\overline{ON}\cdot\overline{ON'}=\overline{OP}\cdot\overline{OP'}$, где O и P, P' — точки пересечения линии центров z с радикальной осью и с какой-либо окружностью S_0 пучка (рис. 14,*в*). В частности, если точка N такова, что $ON^2=\overline{OP}\cdot\overline{OP'}$, то N' совпадает с N, и потому S явится окружностью нулевого радиуса, т. е. точкой; таким образом, каждый пучок непересекающихся окружностей содержит две точки N_1 и N_2 (называемые *предельными точками* пучка), расположенные на прямой z на одинаковом расстоянии $\sqrt{\overline{OP}\cdot\overline{OP'}}$ от точки O по разные стороны от нее. Далее, если точка M не принадлежит линии центров z, то радикальная ось o_1 точки M и какой-то окружности S_0 пучка не параллельна o и, значит, пересекает o в некоторой точке Q, имеющей равные степени относительно окружности нулевого радиуса M и окружности S_0. Построим теперь окружность S с центром на линии центров z, касающуюся прямой QM в точке M (центром такой окружности служит точка пересечения прямой z с перпендикуляром, восставленным к QM в точке M). Очевидно, что точка Q будет иметь равные степени относительно S и S_0, т. е. будет принадлежать радикальной оси этих двух окружностей. Отсюда вытекает, что o — радикальная ось окружностей S и S_0; следовательно, S и есть окружность пучка, проходящая через точку M.

Заметим еще, что, поскольку каждая точка Q радикальной оси o собственного пучка окружностей, лежащая вне окружностей пучка (т. е. отличная от точки A в случае пучка касающихся окружностей и не принадлежащая отрезку AB в случае пучка пересекающихся окружностей; см. рис. 14, *а*,*б*), имеет одинаковую положительную степень a^2 относительно всех окружностей пучка, то Q является центром окружности Σ, перпендикулярной всем окружностям пучка (радиус этой окружности равен a). Таким образом, *существует бесчисленное множество окружностей, одновременно перпендикулярных всем окружностям пучка*. Нетрудно видеть, что все эти окружности в свою очередь будут образовывать *пучок*: действительно, радикальная ось двух таких окружностей совпадает с линией центров z исходного пучка, поскольку z есть множество центров окружностей, перпендикулярных этим двум (ср. выше, стр. 458). Сама прямая z тоже входит в этот новый пучок, поскольку это есть окружность бесконечного радиуса, перпендикулярная всем окружностям нашего пучка. Два пучка окружностей, обладающих тем свойством, что каждая из окружностей первого пучка перпендикулярна всем окружностям второго пучка и, наобо-

рот, называются *перпендикулярными* или *сопряженными пучками*. Нетрудно видеть, что пучку непересекающихся окружностей будет перпендикулярен пучок пересекающихся окружностей (ибо все окружности

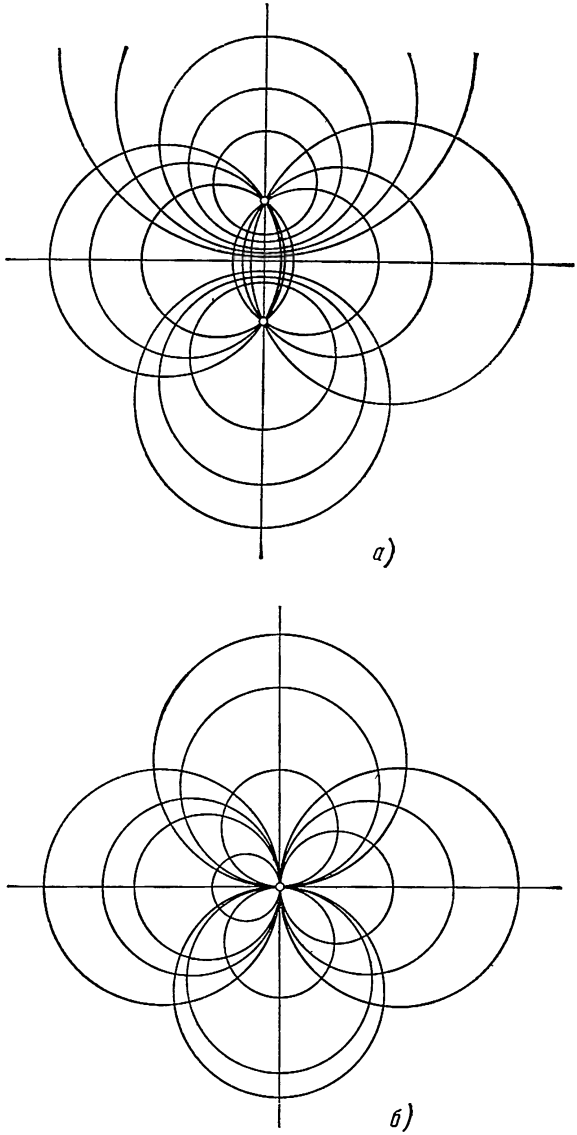


Рис. 15.

второго пучка должны проходить через предельные точки первого пучка) и наоборот (рис. 15,*а*); пучку касающихся окружностей будет перпендикулярен другой пучок касающихся окружностей (рис. 15,*б*).

Понятие перпендикулярных пучков можно перенести также и на пучки прямых или концентрических окружностей: очевидно, что все окружности, перпендикулярные «окружностям бесконечного радиуса», составляющим пучок пересекающихся прямых, образуют пучок концентрических окружностей и, наоборот (рис. 16,*а*), все окружности, перпендикулярные «окружностям бесконечного радиуса», составляющим пучок параллельных прямых, образуют второй пучок параллельных прямых (рис. 16,*б*). Это обстоятельство позволяет дать следующее общее определение всем пучкам окружностей (конечного

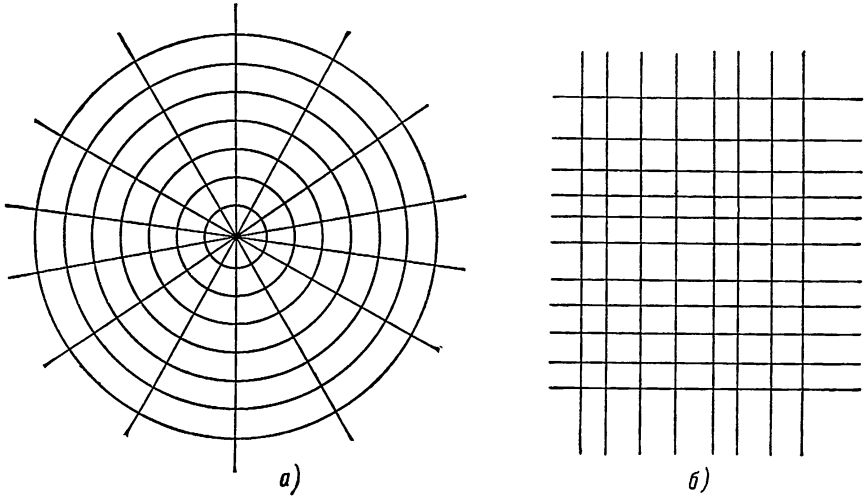


Рис. 16.

или бесконечного радиуса): *пучок окружностей — это совокупность всех окружностей плоскости, перпендикулярных двум данным различным окружностям* S_1 *и* S_2 [1]).

3.2. Связка окружностей. Определим теперь (собственную) *связку окружностей как совокупность всех окружностей конечного радиуса, каждые три из которых имеют один и тот же* ***радикальный*** *центр* O (называемый *радикальным центром связки*), *и всех окружностей бесконечного радиуса* (прямых), *проходящих через точку* O. Из этого определения следует, что степень точки O относительно любых трех окружностей конечного радиуса связки

[1]) Если S_1 и S_2 суть две прямые, то мы приходим к пучку концентрических окружностей или параллельных прямых; если S_1 и S_2 суть концентрические окружности — к пучку пересекающихся прямых; во всех остальных случаях — к собственному пучку окружностей.

Заметим еще, что пучок пересекающихся окружностей можно также определить как *совокупность всех окружностей, делящих пополам две данные различные окружности* S_1 *и* S_2.

будет одной и той же; отсюда вытекает, что радикальный центр O собственной связки окружностей имеет одну и ту же степень относительно в с е х окружностей связки. Таким образом, собственную связку окружностей можно определить также как *совокупность всех окружностей плоскости, относительно которых данная точка O имеет одну и ту же степень k, и всех прямых, проходящих через O;* точку O иногда называют просто *центром связки,* а степень k — *степенью связки.*

Если при этом $k=a^2>0$, то длина касательной, проведенной из точки O к любой из окружностей конечного радиуса связки, равна a; отсюда вытекает, что *связка состоит из всех окружностей, перпендикулярных фиксированной окружности* Σ с центром O и радиусом a (включая сюда и точки окружности Σ — окружности нулевого радиуса связки, и проходящие через O прямые — окружности бесконечного радиуса связки). Если $k=0$, то *связка,* очевидно, *состоит из всех окружностей* (конечного или бесконечного радиуса), *проходящих через точку O*; такая связка содержит единственную окружность нулевого радиуса — саму точку O. Наконец, если $k=-a^2<0$, то *связка состоит из всех окружностей, делящих пополам окружность* Σ с центром O и радиусом a (ср. стр. 458—459), включая сюда и проходящие через O прямые; такая связка вовсе не содержит окружностей нулевого радиуса, т. е. точек [1]).

Кроме собственных связок, к числу связок окружностей причисляют еще *связки всех окружностей, центры которых лежат на фиксированной прямой s,* а также *прямых, перпендикулярных s (связки окружностей, перпендикулярных «окружности бесконечного радиуса»,* т. е. прямой s) и *связку всех «окружностей бесконечного радиуса»* (прямых) *плоскости.*

В заключение заметим, что *пересечение двух любых различных связок* (т. е. совокупность окружностей, принадлежащих одновременно двум связкам) *всегда образует пучок.* Действительно, пересечение двух связок, одна из которых есть связка прямых, образует пучок пересекающихся или параллельных прямых; пересечение двух связок окружностей, перпендикулярных соответственно прямым s_1 и s_2, образует пучок концентрических окружностей, если $s_1 \nparallel s_2$, и пучок параллельных прямых, если $s_1 \parallel s_2$; пересечение двух собственных связок окружностей с общим центром и разными степенями образует пучок пересекающихся прямых. Наконец, во всех остальных случаях пересечение двух связок окружностей образует собственный пучок: если одна из двух связок состоит из окружностей, перпендикулярных прямой s, а вторая есть собственная связка с центром O, то пересечение их образует собственный пучок, радикальной

---

[1]) Собственная связка первого типа называется *гиперболической,* второго — *параболической* и третьего — *эллиптической.*

осью которого служит перпендикуляр, опущенный из O на s (это вытекает из того, что центры всех окружностей конечного радиуса, принадлежащих пересечению связок, лежат на s, и что точка O имеет равные степени относительно каждых двух из этих окружностей); пересечение же двух собственных связок с разными центрами O_1 и O_2 образует пучок с радикальной осью O_1O_2 (для доказательства достаточно заметить, что, поскольку обе точки O_1 и O_2 имеют одинаковые степени относительно любых двух окружностей конечного радиуса, одновременно принадлежащих обеим связкам, то радикальной осью этих двух окружностей является прямая O_1O_2).

§ 4. Инверсия

4.1. Определение инверсии. Рассмотрим некоторую фиксированную связку окружностей и выберем все те окружности этой связки, которые проходят через определенную точку A плоскости. Эти окружности принадлежат пересечению двух связок — выбранной связки и связки окружностей, проходящих через точку A; согласно сказанному выше (стр. 467) они образуют пучок окружностей (мы здесь исключаем из рассмотрения тот случай, когда первая связка имеет центр A и степень 0, и потому *все* ее окружности проходят через A). Очевидно, что если первая связка есть связка всех прямых плоскости или если точка A совпадает с центром выбранной связки, то полученный пучок есть пучок пересекающихся прямых; во всех остальных случаях это есть пучок окружностей, пересекающихся в двух точках A и A', или пучок касающихся окружностей (так как все окружности пучка проходят через одну точку A, то мы не можем прийти к пучку непересекающихся или концентрических окружностей). Таким образом, выбор на плоскости определенной связки окружностей (отличной от связки всех прямых) позволяет определить некоторое *отображение* плоскости, *сопоставляющее* с *каждой* отличной от центра O связки *точкой* A *плоскости вторую точку* A' *пересечения окружностей связки, проходящих через точку* A (если все эти окружности к а с а ю т с я в точке A, то мы будем считать, что наше отображение переводит точку A саму в себя)[1]. Это отображение мы будем называть *точечной инверсией* или просто *инверсией,* отвечающей нашей связке. При этом инверсия, отвечающая связке окружностей с центрами на прямой s и перпендикулярных s прямых, называется *особой;* инверсия, отвечающая связке пересекающихся в одной точке окружностей, — *вырожденной;* во всех же остальных случаях мы имеем *обыкновенную*

[1]) Относительно геометрических отображений см. статью «Геометрические преобразования» (впоследствии эту статью мы будем цитировать как «Г. П.»), стр. 51.

или *общую инверсию*, причем центр O связки называется *центром* этой *инверсии*, а степень k связки — *степенью инверсии.*

Очевидно, что *вырожденная инверсия переводит любую* (отличную от центра O связки) *точку плоскости в одну и ту же точку* O (ибо в этом случае совокупность окружностей связки, проходящих через фиксированную точку A, образует пучок окружностей, пересекающихся в точках A и O) — это преобразование, разумеется, не представляет интереса. Далее, *особая инверсия представляет собой симметрию относительно прямой* s — в самом деле, все окружности с центром на прямой s, проходящие через определенную точку A (а также и перпендикуляр к s, проходящий через A),

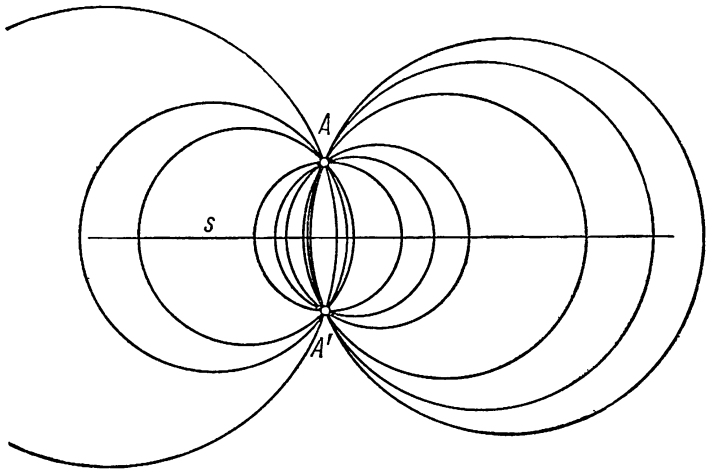
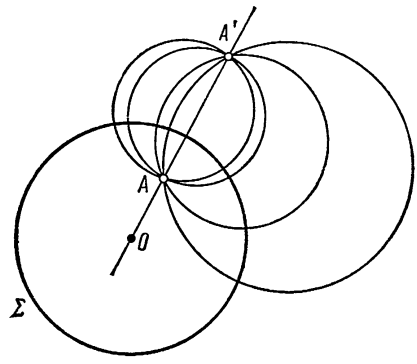


Рис. 17.

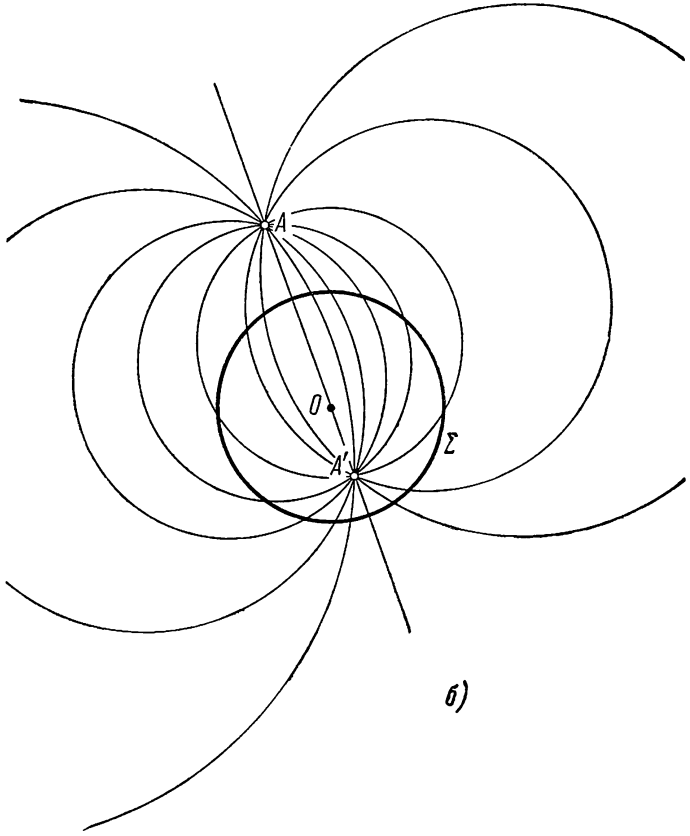
проходят также и через точку A', симметричную A относительно s (рис. 17)[1]). Таким образом, главный интерес представляет обыкновенная или общая инверсия, которую мы в дальнейшем для краткости часто будем называть просто «инверсией»; в тех случаях, когда речь будет идти сразу об обыкновенной и об особой инверсии, мы будем говорить про *невырожденную инверсию.*

Из данного выше описания собственных связок окружностей вытекает, что *обыкновенную инверсию с положительной степенью* a^2 *можно определить как отображение, сопоставляющее с каждой точкой* A *плоскости, отличной от определенной точки* O, *вторую точку* A' *пересечения всех окружностей, проходящих через точку* A *и перпендикулярных окружности* Σ *с центром* O *и радиусом* a (рис. 18, *а*); окружность Σ, задание которой полностью определяет инверсию, называется *окружностью инверсии.* Если считать, что

[1]) См. «Г. П.», стр. 55.



а)



б)

Рис. 18.

окружность Σ может вырождаться в прямую («окружность бесконечного радиуса»), то последнее определение охватывает также и особую инверсию — симметрию относительно прямой (рис. 17). Эта близость между инверсией с положительной степенью и симметрией относительно прямой находит отражение в том, что инверсию с положительной степенью часто называют «*симметрией относительно окружности* Σ». [Если принять, что окружность инверсии может также вырождаться в точку (окружность нулевого радиуса), то наше определение охватит также и вырожденную инверсию.] Аналогично этому *инверсию с отрицательной степенью* $-a^2$ *можно определить как преобразование, сопоставляющее с каждой точкой* A, *отличной от точки* O, *вторую точку пересечения всех окружностей, проходящих через* A *и делящих пополам окружность* Σ *с центром* O *и радиусом* a (рис. 18, *б*).

Можно также определить инверсию чисто аналитически. Из того, что центр O собственной связки имеет относительно всех окружностей связки степень k, следует, что каждая окружность связки, проходящая через определенную (отличную от O) точку A, пересекает прямую OA второй раз в такой точке A', что $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=k$. Отсюда видно, что *инверсию с центром* O *и степенью* k *можно определить как геометрическое преобразование, переводящее каждую отличную от* O *точку* A *плоскости в такую точку* A' *прямой* OA, *что*

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=k.$$

Это последнее определение инверсии в силу своей простоты является наиболее распространенным [1]); мы в дальнейшем также чаще всего будем пользоваться именно им. В частности, из этого определения вытекает, что две инверсии с одним центром O и равными по абсолютной величине степенями k и $-k$ переводят одну и ту же точку A в две точки A' и A'' прямой OA, удаленные на одно расстояние $\frac{|k|}{OA}$ от центра инверсии O, но расположенные по разные стороны от него; другими словами можно сказать, что *инверсия с отрицательной степенью* $-k$ *равносильна инверсии с тем же центром* O *и положительной степенью* k, *сопровождаемой еще симметрией относительно точки* O [2]).

4.2. Свойства инверсии. Заметим прежде всего, что *центр* O *не переходит при инверсии ни в какую точку плоскости.* Так как, очевидно, чем ближе расположена точка A к точке O, тем дальше удален от O образ A' этой точки (причем если только A достаточно

---

[1]) См «Г. П.», стр. 56.

[2]) Можно также сказать, что инверсия с центром O и степенью $-k$ совпадает с произведением инверсии с центром O и степенью k и симметрии относительно O, взятых в любом порядке (см. «Г. П.», стр. 80).

близка к O, то расстояние OA' превзойдет любое наперед заданное число), то говорят также, что *образ центра O инверсии удаляется в бесконечность* или что *инверсия переводит точку O в бесконечность;* разумеется, эти выражения следует понимать лишь в том смысле, что сама точка O при инверсии не переходит никуда, а близкие к O точки переходят в далекие точки [1]).

Заметим, что невырожденная инверсия «переставляет» между собой точки плоскости (т. е. если точка A переходит в точку A', то точка A' переходит обратно в точку A) [2]). Далее, инверсия с центром O и степенью k переводит внутренность окружности Σ с центром O и радиусом $\sqrt{|k|}$ во внешнюю область этой окружности и наоборот (аналогично тому, как симметрия относительно прямой s меняет местами две полуплоскости, на которые s делит плоскость). Что же касается самой окружности Σ, то инверсия переводит ее в себя; при этом в случае положительного k все точки окружности Σ переходят в себя (аналогично тому, как при симметрии относительно прямой s переходят в себя все точки этой прямой), в то время как в случае отрицательного k каждая точка окружности Σ переходит в диаметрально противоположную точку.

Отметим теперь два менее очевидных свойства инверсии.

А. *Всякая невырожденная инверсия переводит каждую окружность ненулевого радиуса снова в окружность ненулевого радиуса* (т. е. каждую окружность или прямую снова в окружность или прямую).

Так как совершенно очевидно, что симметрия относительно прямой обладает этим свойством, то надо только доказать, что им обладает также и обыкновенная инверсия. Прежде всего совершенно ясно, что инверсия переводит каждую прямую, проходящую через центр инверсии, саму в себя. Далее, если M и M' суть точки пересечения проходящей через точку O прямой с окружностью S, имеющей диаметр OP, и прямой s, перпендикулярной OP и пересекающей OP в некоторой точке P' (рис. 19, *а*), то из подобия прямоугольных треугольников OPM и $OM'P'$ с общим острым углом O имеем

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OM'}{OP'},$$

откуда следует, что

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{OP} \cdot \overline{OP'}.$$

Последнее равенство показывает, что *инверсия с центром O и степенью k переводит проходящую через O окружность S в прямую s,*

[1]) Относительно другого понимания этого утверждения (связанного с присоединением к плоскости одной «несобственной» точки) см. стр. 58—59.

[2]) Другими словами, инверсия есть *инволютивное* преобразование (см. «Г. П.», стр. 97).

перпендикулярную диаметру OP окружности и пересекающую этот диаметр в такой точке P', что $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=k$; обратно, *не проходящую через O прямую s инверсия переводит в проходящую через O окружность S, диаметром которой служит такой отрезок OP перпендикуляра OP', опущенного из O на s, что* $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=k$.

Наконец, пусть S — произвольная окружность, не проходящая через центр O инверсии, и p — степень точки O относительно окружности S, так что каждая проходящая через O прямая пересекает S в таких двух точках M и M_1, что $\overline{OM}\cdot\overline{OM_1}=p$. Пусть,

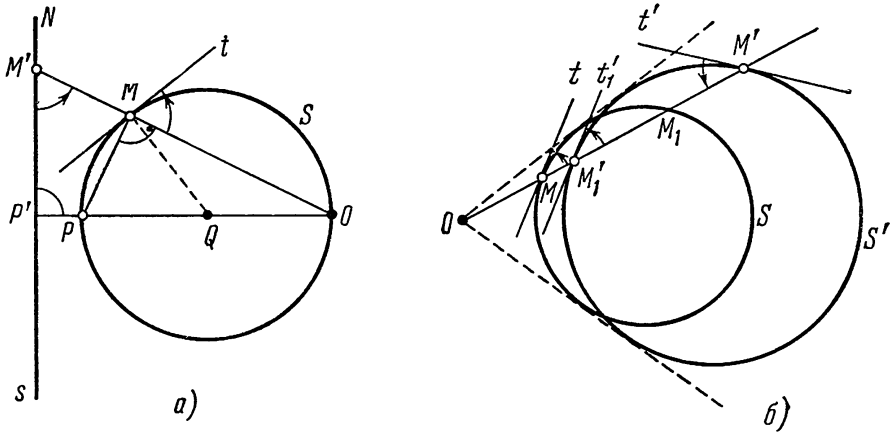


Рис. 19.

далее, S' — окружность, центрально-подобная (гомотетичная) S с центром подобия O и коэффициентом подобия [1]) $\frac{k}{p}$, а M_1' и M' — точки окружности S', отвечающие в рассматриваемом центрально-подобном преобразовании точкам M и M_1 окружности S (рис. 19, *б*). В таком случае имеем

$$\overline{OM}\cdot\overline{OM_1}=p,\quad \frac{\overline{OM'}}{\overline{OM_1}}=\frac{k}{p}.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{OM}\cdot\overline{OM'}=k,$$

т. е. что *инверсия с центром O и степенью k переводит не проходящую через O окружность S в окружность S', центрально-подобную (гомотетичную) S с центром подобия O и коэффициентом подобия* $\frac{k}{p}$, *где p есть степень точки O относительно окружности S*

[1]) См. «Г. П.», стр. 55.

(причем в центрально-подобном преобразовании точка M окружности S отвечает точке M_1' окружности S', а в инверсии точка M отвечает точке M').

Этим и завершается доказательство свойства А инверсии [1]).

Б. *Невырожденная инверсия сохраняет угол между окружностями.* Точнее, если t_1, t_2 — касательные к двум окружностям ненулевого радиуса S_1 и S_2, пересекающимся в точке A, и t_1', t_2' — касательные к окружностям ненулевого радиуса S_1' и S_2', в которые переводит S_1 и S_2 невырожденная инверсия, проведенные в точке A', отвечающей при инверсии точке A, то

$$\measuredangle(t_1, t_2) = \measuredangle(t_2', t_1')$$

(обратите внимание на порядок касательных!).

Нам опять достаточно показать, что свойством Б обладает обыкновенная инверсия. Из подобия треугольников OPM и $OM'P'$ (рис. 19, *а*) следует, что $\measuredangle(PO, PM) = \measuredangle(M'P', M'O)$. Но $\measuredangle(PO, PM) = \measuredangle(MO, t)$, где t — касательная к S в точке M (оба угла измеряются половиной дуги MO); следовательно,

$$\measuredangle(MO, t) = \measuredangle(s, M'O').$$

С другой стороны, окружности S и S' (рис. 19, *б*) образуют в точках M и M_1' равные углы $\measuredangle(MO, t)$ и $\measuredangle(M_1'O, t_1')$ с прямой OMM' (это следует из того, что O есть центр подобия окружностей S и S'; ср. ниже стр. 489). А так как, кроме того, $\measuredangle(M_1O, t_1') = \measuredangle(t', M'O)$ (см. стр. 453), то имеем

$$\measuredangle(MO, t) = \measuredangle(t', M'O).$$

Итак, мы доказали наше утверждение для того случая, когда одна из двух рассматриваемых окружностей ненулевого радиуса — это проходящая через O прямая. Пусть теперь S_1 и S_2 — две произвольные окружности ненулевого радиуса, пересекающиеся в точке A; S_1' и S_2' — пересекающиеся в точке A' окружности, в которые переходят S_1 и S_2 при инверсии. В таком случае имеем (рис. 20)

$$\measuredangle(t_1, AO) = \measuredangle(A'O, t_1'), \quad \measuredangle(AO, t_2) = \measuredangle(t_2', A'O),$$

откуда

$$\measuredangle(t_1, t_2) = \measuredangle(t_2', t_1'),$$

что и требовалось доказать.

В частности, из свойства Б инверсии следует, что *невырожденная инверсия переводит любые две касающиеся окружности в касающиеся окружности.*

---

[1]) См. также «Г. П.», стр. 74—75.

4.3. Теорема Паскаля. Преобразование инверсии находит многочисленные применения при доказательстве геометрических теорем. Часто удается так преобразовать при помощи инверсии чертеж какой-либо относящейся к окружностям геометрической теоремы, что некоторые из фигурирующих на этом чертеже окружностей переходят в прямые линии, и чертеж тем самым упрощается; если же доказать выражаемую преобразованным чертежом новую, более простую теорему, то отсюда будет вытекать также и справедливость первоначальной теоремы. Упрощение чертежей с помощью

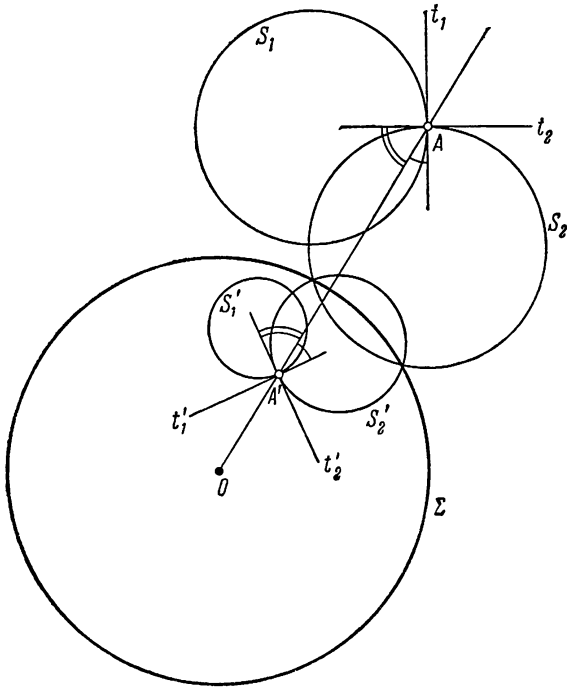


Рис. 20.

инверсии лежит также в основе многочисленных применений этого преобразования к решению геометрических задач на построение. Отсылая читателя по этому поводу, например, к любой из первых четырех книг приведенного в конце статьи списка литературы [1]), мы ограничимся здесь одним простым, но эффектным примером несколько иного рода.

Докажем, что *точки P, Q и R пересечения противоположных сторон A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 произвольного* (может быть, и самопересекающегося!) *вписанного в окружность S шести гольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ лежат на одной прямой* (теорема Паскаля).

Пусть S_1 — произвольная окружность, пересекающая S в точках A_1 и A_4, S_2 — окружность, в которую переводит S_1 инверсия с центром P и степенью $k_1 = \overline{PA}_1 \cdot \overline{PA}_2 = \overline{PA}_4 \cdot \overline{PA}_5$ (S_2 проходит через точки A_2 и A_5); S_3 — окружность, в которую переводит S_2 инверсия с центром Q и степенью

[1]) См. также «Г. П.», стр. 70—72, 145—146 и статью «Общие принципы геометрических построений», стр. 193.

$k_2=\overline{QA_2}\cdot\overline{QA_3}=\overline{QA_5}\cdot\overline{QA_6}$ (S_3 проходит через точки A_3 и A_6); $\overline{S_1}$ — окружность, в которую переводит S_3 инверсия с центром R и степенью $k_3=\overline{RA_3}\cdot\overline{RA_4}=\overline{RA_6}\cdot\overline{RA_1}$ ($\overline{S_1}$ снова проходит через точки A_4 и A_1); наконец, обозначим еще касательные к S в точках A_1, A_2, A_3 и A_4 через t_1, t_2, t_3 и t_4, а касательные к S_1, S_2, S_3 и $\overline{S_1}$ в тех же точках — через u_1, u_2, u_3 и $\bar{u}_1$ (рис. 21). Легко видеть, что при всех трех инверсиях окружность S переходит сама в себя. В силу свойства Б инверсии имеем

$$\sphericalangle(t_1, u_1)=\sphericalangle(u_2, t_2)=\sphericalangle(t_3, u_3)=\sphericalangle(\bar{u}_1, t_4).$$

Но равенство $\sphericalangle(t_1, u_1)=\sphericalangle(\bar{u}_1, t_4)$ показывает, что окружности S_1 и $\overline{S_1}$, пересекающие S в одних и тех же точках A_1 и A_4, образуют в этих точках с окружностью S одинаковые (по величине и по направлению!) углы, откуда следует, что эти окружности просто совпадают. Таким образом, точки P, Q и R суть центры инверсий, переводящих S_1 в S_2, S_2 в S_3 и S_3 в S_1, т. е. это суть центры подобия этих окружностей (см. доказательство свойства А инверсии). Но отсюда следует, что эти точки лежат на одной прямой (см. ниже стр. 489—490) [1]).

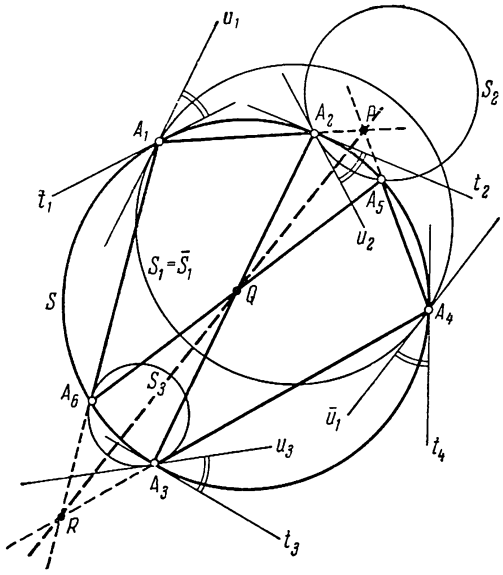


Рис. 21.

§ 5. Точечная геометрия окружностей

5.1. Круговая плоскость. То обстоятельство, что прямые и окружности являются единственными линиями, изучаемыми в элементарной геометрии, заставляет ограничиться здесь рассмотрением лишь таких преобразований плоскости, которые переводят прямые и окружности снова в прямые и окружности. Однако ясно, что никакое (непрерывное) преобразование плоскости, переводящее *каждую* ее точку A в другую точку A', не может перевести замкнутую линию — окружность — в незамкнутую линию — прямую; следовательно, такое преобразование должно переводить каждую прямую в прямую и каждую окружность в окружность [2]). Тем самым мы приходим к преобразо-

---

[1]) См. также «Г. П.», стр. 93 и след.

[2]) Если бы такое преобразование переводило прямую s в окружность S, то оно должно было бы перевести прямую s_1, пересекающую s в точке A, в прямую или окружность S_1', имеющую с S о д н у общую точку A', т. е. касающуюся S в точке A'. Это, однако, невозможно, так как прямые s и s_1 разбивают плоскость на 4 части (такие, что никакие две точки, принадлежащие разным частям плоскости, нельзя соединить прямой или

ваниям подобия — единственным преобразованиям плоскости, при которых любая прямая снова переходит в прямую и каждая окружность переходит в окружность [1]),— и действительно эти преобразования суть единственные, систематически рассматриваемые в курсе элементарной геометрии.

Сказанное выше не противоречит тому, что инверсия также переводит окружности и прямые снова в окружности и прямые: действительно, инверсия не является преобразованием *всей плоскости*, поскольку она не переводит центр инверсии O ни в какую другую точку плоскости. С другой стороны, именно то обстоятельство, что совокупность окружностей и прямых переводится инверсией в совокупность тех же линий, делает весьма желательным включение этого преобразования в число тех, с которыми оперирует элементарная геометрия. Однако для этого прежде всего желательно получить возможность говорить об инверсии как о преобразовании всей плоскости, а не плоскости с одной выключенной точкой: ведь иначе нам придется считать, что инверсия переводит прямую в окружность без одной точки (ибо центр инверсии мы должны вообще исключить из рассмотрения), а если нам надо будет произвести подряд две или несколько инверсий, то положение осложнится еще больше.

Выход из создавшегося положения состоит в следующем. Условимся говорить, что при инверсии центр O переходит в некоторую фиктивную «бесконечно удаленную точку» Ω плоскости; обратно, эта «бесконечно удаленная точка» Ω переходит в центр инверсии O (ср. стр. 57). Хотя эта терминология означает только, что инверсия не переводит O ни в какую реально существующую точку плоскости, она во многих случаях оказывается чрезвычайно удобной. Так как прямые при инверсии переходят в окружности, проходящие через центр инверсии O, то приходится считать, что все прямые плоскости проходят через «бесконечно удаленную точку»; это соглашение устраняет различие между прямыми и окружностями, так как прямую теперь также можно считать замкнутой — она «замыкается в бесконечности» [2]). Плоскость, условно дополненная, таким образом, одной «бесконечно удаленной точкой», называется *круговой плоскостью*. Понятие круговой плоскости является математической абстракцией в такой же степени, как и понятие обычной (безграничной) плоскости; в современной математике (в частности, в теории функций комплексного переменного) оно играет весьма важную роль.

окружностью, не пересекающей ни s, ни s_1), а касающиеся окружности (или окружность и прямая) S и S_1' делят плоскость только на 3 части.

[1]) См. «Г. П.», стр. 62—63. По поводу последующего ср. также «Г. П.», стр. 57—59.

[2]) Это утверждение означает, что точка A, неограниченно удаляющаяся по прямой *в любом ее направлении*, стремится к «бесконечно удаленной точке» Ω (в том смысле, что точка A', в которую переводит A инверсия с центром O, стремится к точке O).

5.2. Круговые преобразования. Преобразования круговой плоскости, переводящие прямые и окружности снова в прямые и окружности (или, другими словами, переводящие в себя совокупность всех окружностей ненулевого радиуса), уже не исчерпываются одними преобразованиями подобия — пример другого рода доставляет нам инверсия. Все такие преобразования называются *круговыми преобразованиями*[1]). Нетрудно видеть, что *каждое круговое преобразование круговой плоскости является или преобразованием подобия или инверсией, сопровождаемой еще, быть может, преобразованием подобия.* Действительно, если круговое преобразование оставляет на месте «бесконечно удаленную точку» Ω, то оно переводит прямые («окружности бесконечного радиуса» или «окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку Ω») снова в прямые и окружности конечного радиуса — в окружности конечного радиуса, т. е. является преобразованием подобия. Рассмотрим теперь круговое преобразование K, которое переводит в Ω какую-то «конечную» (т. е. обыкновенную) точку O плоскости. Это преобразование можно заменить инверсией I с центром O, сопровождаемой еще каким-то преобразованием П. (П переводит точку A_1, в которую переводит произвольную точку A инверсия I, в точку A', в которую переводит A преобразование K; если A_1 всегда совпадает с A', то K совпадает с инверсией I и никакого дополнительного преобразования рассматривать не нужно.) Очевидно, что П есть тоже круговое преобразование: оно переводит окружность S_1, в которую инверсия I переводит окружность S, в окружность S', в которую S переводит K. С другой стороны, П переводит прямые снова в прямые (ибо и K и I переводят в прямые проходящие через O окружности). Поэтому П есть преобразование подобия, что и доказывает наше утверждение (произвольное круговое преобразование K совпадает с инверсией I, сопровождаемой преобразованием подобия П).

5.3. Понятие о круговой геометрии. Изучение свойств геометрических фигур, общих всем фигурам, получаемым друг из друга круговыми преобразованиями, составляет предмет *круговой геометрии* (или *точечной круговой геометрии*; смысл прилагательного «точечная» станет ясным из дальнейшего)[2]). Основную роль в этой геометрии играет понятие окружности (ненулевого радиуса); прямая линия не имеет здесь самостоятельного значения, ибо круговое преобразование может переводить прямую в окружность. В этой геометрии, так же как и в обычной геометрии, положение окружности на плоскости не отражается на ее свойствах (ибо по-разному расположенные окружности имеют одинаковые свойства); однако здесь уже и величина радиуса также не помогает различать окружности, ибо инверсия

---

[1]) Эти преобразования называются также *преобразованиями Мебиуса.*

[2]) Ср. «Г. П.», § 6.

переводит друг в друга *неравные* окружности. Напротив, угол между окружностями играет в круговой геометрии такую же роль, как и в обычной, поскольку он сохраняется при любом круговом преобразовании (см. стр. 474).

Мы не имеем никакой возможности входить здесь в обсуждение подробностей круговой геометрии, которой в специальной математической литературе посвящен целый ряд весьма обстоятельных сочинений (из них в списке литературы в конце статьи упомянута лишь книга Бляшке [8]). Отметим только, что понятия пучка и связки окружностей играют в круговой геометрии весьма существенную роль; эти понятия имеют здесь смысл, так как всякое круговое преобразование переводит пучок окружностей снова в пучок окружностей и связку окружностей — в связку [1]).

Б. ОКРУЖНОСТЬ КАК СОВОКУПНОСТЬ ПРЯМЫХ

§ 6. Направленные окружности

6.1. Аналогия между свойствами точек и прямых. Значительную роль в геометрии играет то обстоятельство, что свойства точек во многом напоминают свойства прямых линий [2]). Так, например, точку можно задать двумя (проходящими через эту точку) прямыми, а прямую — двумя (лежащими на этой прямой) точками; точки прямой, заключенные между двумя данными точками A и B, образуют отрезок AB, а проходящие через точку прямые, заключенные между двумя данными прямыми a и b, — угол $\angle(a, b)$ (близость между понятиями отрезка и угла хорошо иллюстрируется сказанным в п. **1.1**); через три вершины треугольника проходит окружность («описанная» окружность треугольника), и трех сторон треугольника касается окружность («вписанная» окружность треугольника) и т. д. Цель настоящего раздела состоит в том, чтобы показать, как далеко заходит этот параллелизм.

В разделе А мы всюду рассматривали окружность как совокупность точек; такой подход является привычным и для школьного курса геометрии. В противоположность этому теперь мы будем смотреть на окружность как на совокупность прямых, касательных к этой окружности; другими словами, под *окружностью* S мы

---

[1]) Из того, что пучок окружностей можно определить как совокупность всех окружностей, перпендикулярных двум данным, сразу следует, что инверсия переводит пучок окружностей снова в пучок (ибо перпендикулярные окружности при инверсии переходят в перпендикулярные). То, что связка при инверсии переходит в связку, несколько менее очевидно; доказательство этого составляет несложную, но содержательную задачу, которую мы предлагаем читателю решить самостоятельно.

[2]) По этому поводу ср. стр. 130—133.

будем понимать совокупность всех прямых плоскости, удаленных на одно и то же расстояние r от фиксированной точки O — центра окружности (рис. 22, *а*). При этом величина r — радиус окружности — может равняться нулю; в таком случае мы приходим к точке S_0, которая здесь рассматривается как совокупность всех прямых, проходящих через S_0 (рис. 22, *б*). Таким образом, и с принятой в этой главе точки зрения точка является частным случаем окружности («окружность нулевого радиуса»).

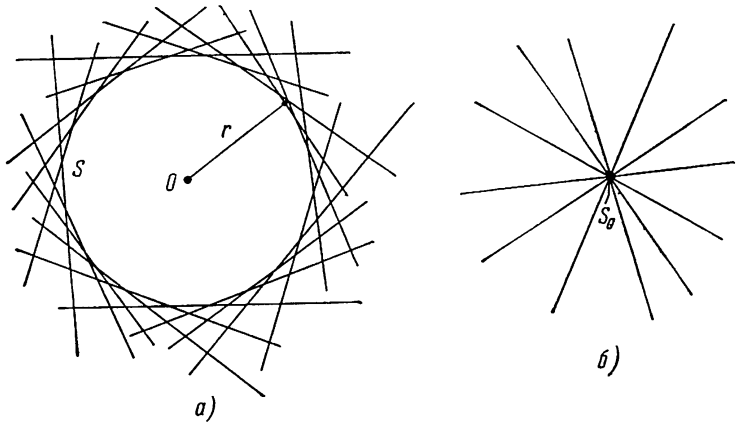


Рис. 22.

6.2. Дальнейшее расширение понятия окружности. Заметим, что сходство между окружностью — множеством точек — и окружностью — множеством прямых — нарушается во многих пунктах. Так, например, две окружности могут иметь не больше двух общих точек, но до четырех общих прямых (т. е. общих касательных); центры всех окружностей, проходящих через две данные точки, лежат на определенной прямой (рис. 23, *а*), в то время как центры всех окружностей, касающихся двух данных прямых, заполняют д в е прямые (рис. 23, *б*); существует единственная окружность, проходящая через три данные точки (рис. 24, *а*), но целых четыре окружности, касающиеся трех данных прямых (рис. 24, *б*) и т. д. Для того чтобы устранить эти расхождения, мы будем всюду в этой главе рассматривать *направленные* окружности и прямые, т. е. окружности и прямые, на которых выбрано определенное направление, на рисунках указываемое стрелкой (ср. стр. 450). Направленные окружности называются еще *циклами*, а направленные прямые — *осями*. При этом мы будем считать, что (направленные) окружности S_1 и S_2 касаются только в том случае, если направления этих окружностей в общей точке совпадают (рис. 25, *а*); таким образом, изображенные на рис. 25, *б* две окружности теперь не

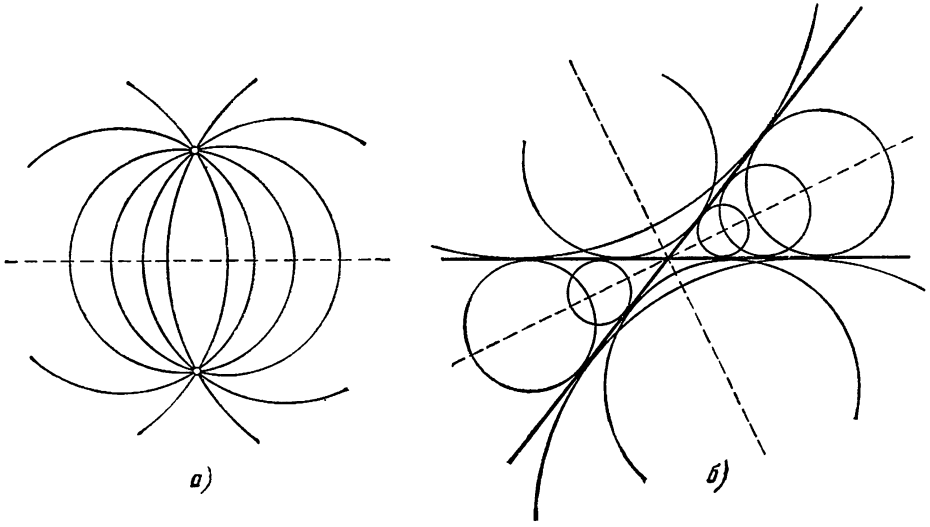


Рис. 23.

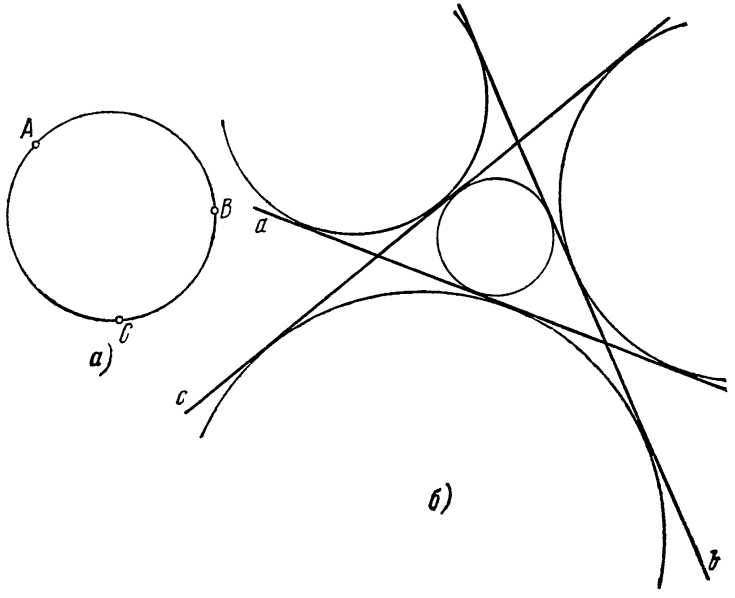


Рис. 24.

считаются касающимися. Это же условие мы сохраним и для касания (направленной) окружности S_1 с (направленной) прямой S_0 («окружностью бесконечного радиуса»). Две (направленные) прямые мы будем называть параллельными только в том случае, если направления этих прямых совпадают. Целесообразность введения направленных прямых и окружностей подтверждается тем, что две (направленные) окружности имеют не более двух общих (направленных) касательных (рис. 26, *а*); центры всех (направленных) окружностей, касающихся двух данных (направленных) прямых, лежат на одной прямой (рис. 26, *б*); существует единственная (направленная) окружность, касающаяся трех данных (направленных) прямых (рис. 26, *в*) и т. д. В дальнейшем прилагательное «направленная» мы будем, как правило, опускать.

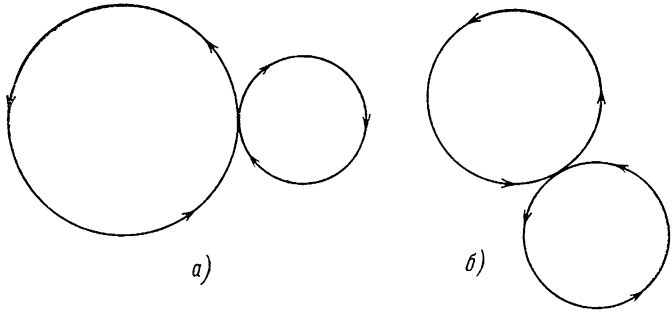


Рис. 25.

Для того чтобы сохранить в силе приведенное выше определение окружности, теперь приходится ввести дополнительное соглашение: ведь прямые, удаленные от точки O на расстояние r, могут касаться одной или другой из двух окружностей, отличающихся друг от друга только направлением. Мы будем считать расстояние от точки O до (направленной) прямой l *положительным*, если O лежит *слева* от l (рис. 27, *а*), и отрицательным в противном случае. В таком случае придется считать, что радиус окружности может быть и отрицательным; (направленную) окружность S с центром O и (положительным, отрицательным или равным нулю) радиусом r можно попрежнему определить как «геометрическое место» (направленных) прямых, удаленных от O на расстояние r. Очевидно, что все окружности, направленные против часовой стрелки, будут иметь положительный радиус, а направленные по часовой стрелке — отрицательный (рис. 27, *б*).

6.3. Касательное расстояние двух окружностей. Под (направленым) углом $\measuredangle(a, b)$ между двумя (направленными) прямыми a и b мы будем понимать угол между указанными стрелками направлениями этих прямых (рис. 28, *а*); при этом $\measuredangle(a, b)$ определится уже с точностью до краткого 2π (ср. стр. 451). Под *углом* $\measuredangle(S_1, S_2)$

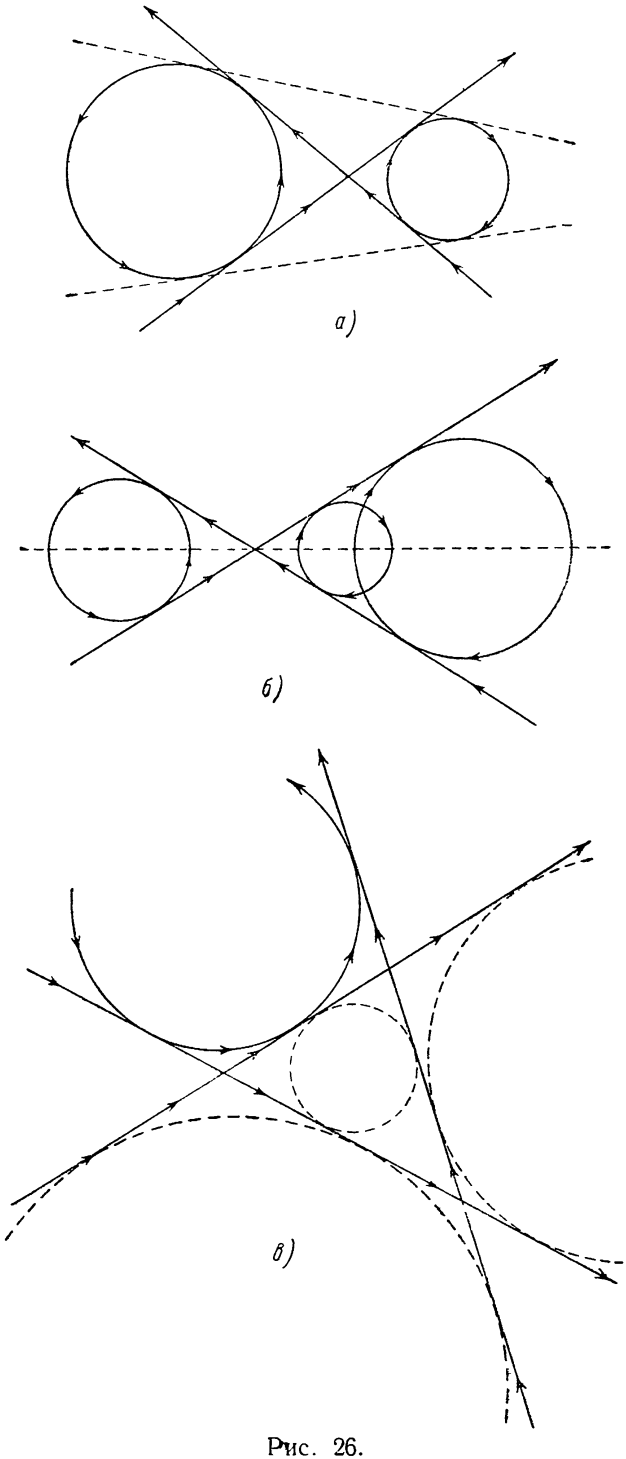


Рис. 26.

между двумя (направленными) окружностями S_1 и S_2 мы будем понимать угол между (направленными) касательными к S_1 и к S_2 в точке их пересечения (рис. 28, *б*); при этом два угла, образованные окружностями S_1 и S_2 в двух точках пересечения, будут отличаться

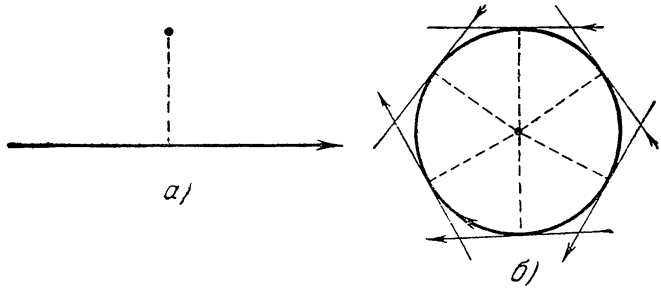


Рис. 27.

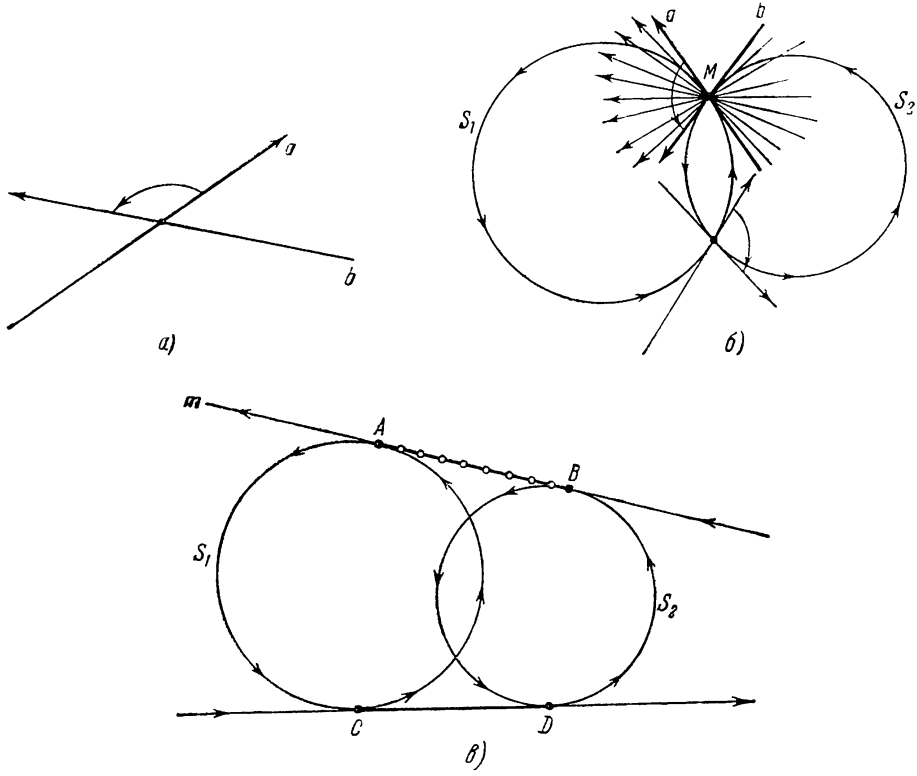


Рис. 28.

знаками (ср. также стр. 453). Как геометрическая фигура, угол между S_1 и S_2 представляет собой совокупность всех прямых, проходящих через общую точку M окружностей S_1 и S_2 и заключенных между касательными a и b к этим окружностям.

Наряду с углом между S_1 и S_2 мы будем рассматривать также совокупность точек, принадлежащих общей прямой (общей касательной) m окружностей S_1 и S_2 и заключенных между точками A и B этих окружностей (рис. 28, *в*)—отрезок $\overline{AB}$, длину которого мы будем называть *касательным расстоянием* между S_1 и S_2. Так как прямая m является направленной, то можно считать направленным и отрезок AB; отметим только, что касательное расстояние между двумя окружностями S_1 и S_2 (взятыми в этом именно порядке!), измеренное по одной или по другой из их общих касательных, имеет разный знак (ср. направление отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ на рис. 28, *в*). Касательное расстояние между касающимися (и только между касающимися) окружностями равно нулю (как и угол между касающимися окружностями). Если к двум окружностям нельзя провести общих касательных, то касательное расстояние между ними не существует вовсе (подобно тому как не существует угла между непересекающимися окружностями).

Касательное расстояние двух окружностей S_1 и S_2 обобщает понятие расстояния между точками; оно переходит в это последнее понятие, если S_1 и S_2 суть «окружности нулевого радиуса». В этом разделе понятие касательного расстояния будет играть большую роль.

§ 7. Центр подобия и ось подобия

7.1. Степень прямой относительно окружности. Рассмотрим теперь следующую теорему, аналогичную той, которая служила для определения степени точки относительно окружности (см. § 2, стр. 454):

Если на прямой m взять несколько точек, лежащих вне окружности S, то произведение тангенсов половин углов, составленных прямой m с проходящими через каждую из точек касательными (произведение $\operatorname{tg}\frac{\sphericalangle(m, a)}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sphericalangle(m, b)}{2}$ на рис. 29, *а, б*), *будет одним и тем же для всех этих точек.*

Для доказательства опустим из центра O окружности S перпендикуляр OP на прямую m; далее обозначим через A и B точки соприкосновения с S касательных a и b, проходящих через точку M прямой m. Из треугольника OAP по теореме тангенсов получим

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\angle PAO-\angle OPA}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\angle PAO+\angle OPA}{2}}=\frac{OP-OA}{OP+OA}.$$

Так как в четырехугольнике $OAMP$ два противоположных угла прямые, то вокруг него можно описать окружность; следовательно, $\angle PAO=\angle PMO$, $\angle OPA=\angle OMA$ (как углы, опирающиеся на

одну дугу). А так как

$$\angle PMO + \angle OMA = \angle PMA$$

и

$$\angle PMO - \angle OMA = \angle PMO + \angle OMB = \angle PMB,$$

то получаем

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\angle PMB}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\angle PMA}{2}} = \frac{OP-OA}{OP+OA}.$$

Но на рис. 29, *а*, *б*

$$\angle PMB = +\measuredangle(m, b), \quad \angle PMA = \pi + \measuredangle(m, a)$$

обратите внимание на направление углов!); следовательно,

$$\operatorname{tg}\frac{\angle PMB}{2} = +\operatorname{tg}\frac{\measuredangle(m, b)}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\angle PMA}{2} = -\operatorname{ctg}\frac{\measuredangle(m, a)}{2}$$

и, значит,

$$\operatorname{tg}\frac{\measuredangle(m, a)}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\measuredangle(m, b)}{2} = \frac{r-d}{r+d},$$

где $r = OA$ — радиус окружности S; $d = OP$ — расстояние от центра S до m. Последняя формула остается в силе при любых (по величине и по знаку; см. выше, стр. 482) r и d [1]); она и доказывает требуемую теорему.

Произведение $\operatorname{tg}\frac{\measuredangle(m, a)}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\measuredangle(m, b)}{2}$ называется *степенью* (направленной) *прямой* m *относительно* (направленной) *окружности* S. Очевидно, что степень прямой m относительно окружности S (равная отношению $\frac{r-d}{r+d}$) положительна, если прямая m пересекает окружность S, и отрицательна в противном случае (из рис. 29, *а, б* видно, что в первом случае углы $\measuredangle(m, a)$ и $\measuredangle(m, b)$ направлены одинаково, а во втором — противоположно). Степень m относительно S равна нулю в том и только в том случае, когда прямая m касается окружности S; единице — в том и только в том случае, когда прямая m проходит через центр окружности S; минус единице — в том и только в том случае, когда S есть точка, через которую прямая m не проходит. Если m совпадает по положению на плоскости с касательной к окружности S, но отличается от нее направлением, то степень прямой m относительно окружности S следует считать бесконечной; наконец, если S есть точка и m проходит через S, то степень вообще не может быть определена. Отметим еще, что если прямая m пересекает окружность S, то степень прямой m относительно S равна квадрату тангенса половины угла, образованного прямой m с S; для

[1]) Рекомендуем читателю самостоятельно рассмотреть ряд представляющихся случаев (на рис. 29, *а*, *б* и r и d положительны).

доказательства этого достаточно принять за точку M точку пересечения линий m и S (рис. 29, *а*).

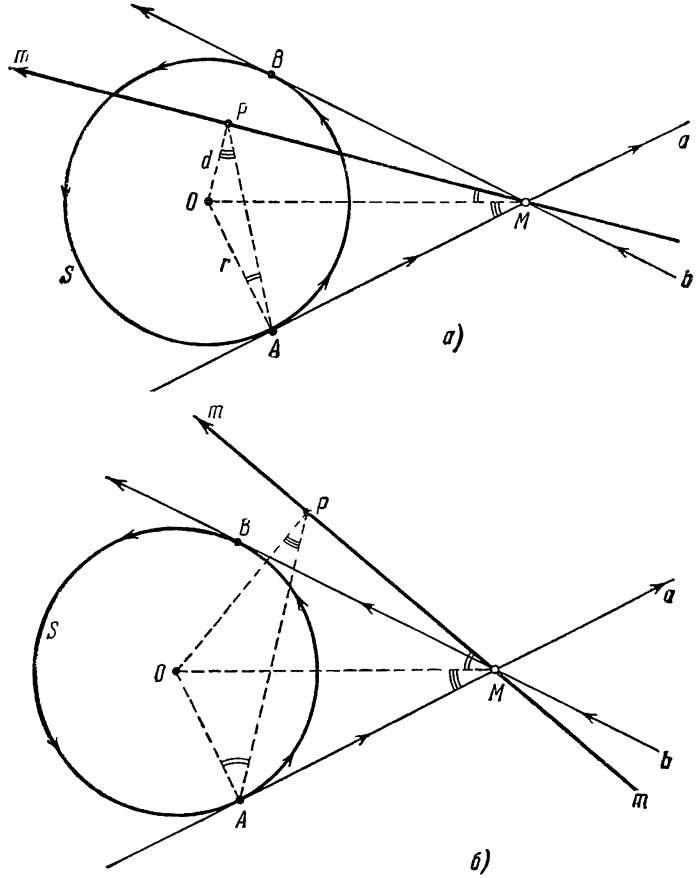


Рис. 29.

7.2. Центр подобия двух окружностей. Рассмотрим теперь две собственные окружности S_1 и S_2 и найдем *все прямые, имеющие относительно* S_1 *и* S_2 *одинаковые степени*; эта задача аналогична задаче об отыскании точек, имеющих одинаковые степени относительно двух данных (ненаправленных) окружностей (см. п. **2.2.**). Если m — такая прямая, d_1, d_2 — расстояния центров O_1 и O_2 окружностей S_1 и S_2 от этой прямой, r_1 и r_2 — радиусы этих окружностей, то в силу доказанного выше будем иметь

$$\frac{r_1-d_1}{r_1+d_1}=\frac{r_2-d_2}{r_2+d_2},$$

откуда, составляя производную пропорцию, получим

$$\frac{(r_1-d_1)+(r_1+d_1)}{(r_1-d_1)-(r_1+d_1)}=\frac{(r_2-d_2)+(r_2+d_2)}{(r_2-d_2)-(r_2+d_2)} \quad \text{или} \quad \frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}.$$

Из последней формулы сразу следует, что *если* $r_1 = r_2$, *то* $d_1 = d_2$, т. е. *прямая* m *параллельна линии центров* O_1O_2. Если же исключить последний случай, то $d_1 \neq d_2$ и прямая m пересечет линию центров в некоторой точке O; при этом из рис. 30 сразу следует соотношение

$$\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{r_1}{r_2},$$

чем полностью определяется положение точки O. Обратно, если

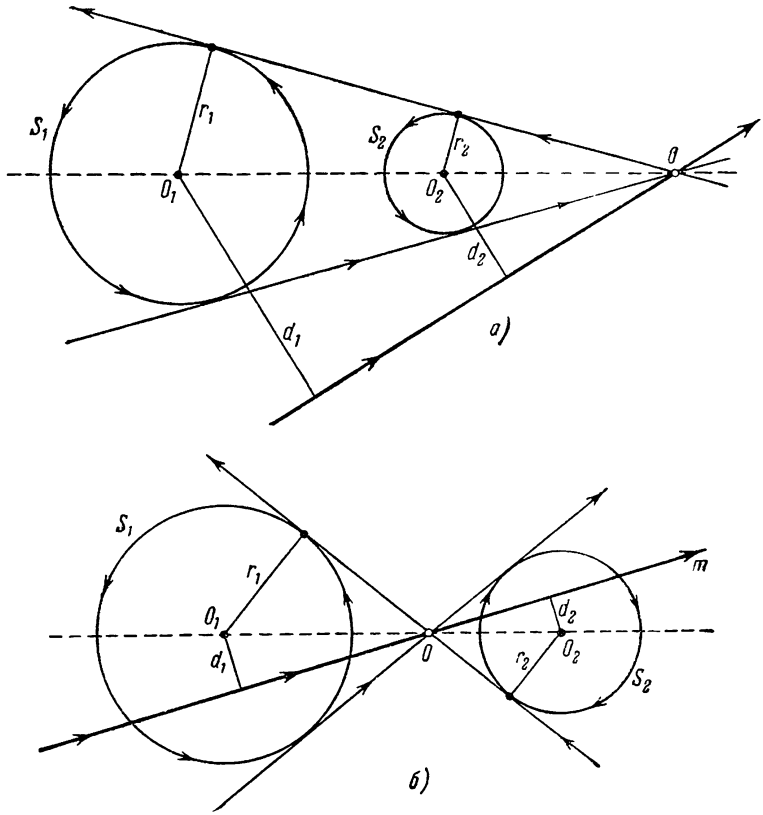


Рис. 30.

прямая m проходит через такую точку O на линии центров, что $\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = \frac{r_1}{r_2}$, то

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}} = \frac{r_1}{r_2},$$

откуда вытекает, что эта прямая имеет одинаковые степени относительно окружностей S_1 и S_2. Таким образом, мы заключаем, что *если* $r_1 \neq r_2$, *то прямые, имеющие относительно окружностей*

S_1 и S_2 одинаковые степени,—это те (и только те) прямые, которые пересекают линию центров O_1O_2 в такой точке O, что $\frac{\overline{OO_1}}{\overline{OO_2}}=\frac{r_1}{r_2}$. Эта точка O называется *центром подобия окружностей* S_1 и S_2 [1]).

Очевидно, что если окружности S_1 и S_2 имеют две общие касательные (рис. 30, *а*, *б*), то их центр подобия совпадает с точкой пересечения общих касательных; это вытекает из того, что общие касательные имеют одинаковые (равные нулю) степени относительно обеих окружностей. Если окружности S_1 и S_2 касаются, то их единственная общая касательная также имеет одинаковые степени относительно S_1 и S_2, откуда вытекает, что центром подобия этих окружностей является точка их касания. Равные окружности вообще не имеют центра подобия, ибо в этом случае прямые, имеющие относительно обеих окружностей одинаковые степени, не пересекаются между собой. Заметим еще, что все прямые, проходящие через центр подобия окружностей S_1 и S_2 и пересекающие одну из них, пересекают и вторую, и притом под тем же углом, что и первую (ибо степень прямой m относительно пересекающей ее окружности S полностью определяется углом между линиями m и S); отсюда снова можно усмотреть, что если окружности S_1 и S_2 имеют две общие касательные, то центр подобия O совпадает с точкой их пересечения. Важно еще заметить, что если направления двух окружностей S_1, S_2 одинаковы (обе направлены по или обе против часовой стрелки), так что радиусы r_1 и r_2 имеют одинаковые знаки, то расстояния d_1 и d_2 также имеют одинаковые знаки (ибо $d_1:d_2=r_1:r_2$), и потому центры O_1, O_2 окружностей расположены *по одну сторону* от любой прямой, проходящей через центр подобия. Следовательно, центр подобия расположен *вне* отрезка O_1O_2 (рис. 30, *а*). Если же окружности S_1 и S_2 имеют противоположные направления, то их центр подобия расположен *на* отрезке O_1O_2 (рис. 30, *б*).

7.3. Ось подобия трех окружностей. Рассмотрим теперь три окружности S_1, S_2, и S_3. Если центр подобия O_{12} окружностей S_1 и S_2 не совпадает с центром подобия O_{13} окружностей S_1 и S_3, то прямая $O_{12}O_{13}$ имеет равные степени относительно S_1 и S_2 и относительно S_1 и S_3. Отсюда вытекает, что эта прямая имеет также одинаковые степени относительно S_2 и S_3 и, значит, проходит через центр подобия O_{23} последних двух окружностей (рис. 31). Таким образом, мы видим, что *попарные центры подобия трех окруж-*

[1]) Ср. «Г. П.», стр. 93—94. (Заметим, что ненаправленные окружности имеют два центра подобия, в то время как направленные окружности имеют один центр подобия—внешний, если окружности направлены одинаково, и внутренний в противном случае.)

ностей S_1, S_2 и S_3 лежат на одной прямой о [1]). Эта прямая называется *осью подобия* трех окружностей; ее можно также определить как прямую, имеющую одинаковые степени относительно всех трех окружностей. Если же центры подобия O_{12} и O_{13} совпадают, то каждая прямая m, проходящая через общий центр подобия O, имеет равные степени относительно S_1 и S_2 и относительно S_1 и S_3.

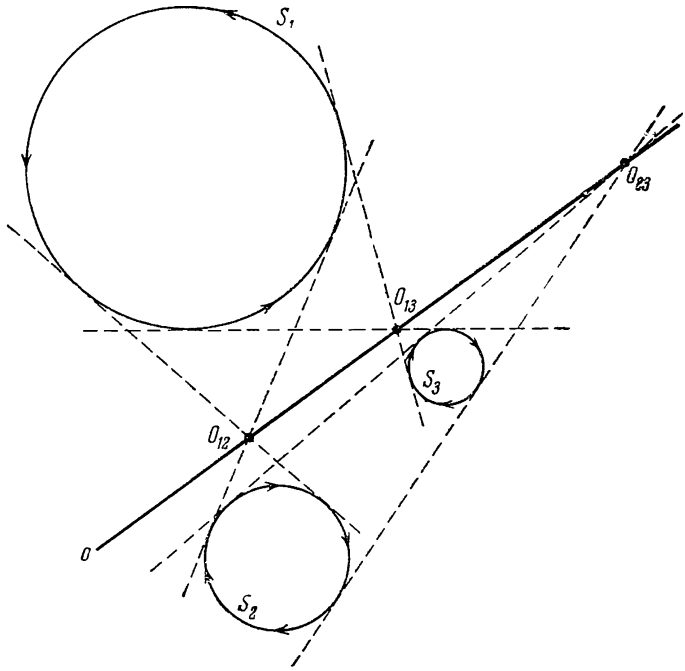


Рис 31.

Следовательно, m имеет также равные степени относительно S_2 и S_3, откуда вытекает, что O совпадает и с центром подобия окружностей S_2 и S_3. Случай, когда попарные центры подобия нескольких окружностей все совпадают между собой, аналогичен случаю совпадения попарных радикальных осей нескольких окружностей (т. е. случаю, когда все окружности принадлежат одному пучку); мы рассмотрим его подробнее в следующем параграфе.

§ 8. Ряды и сети окружностей

8.1. Ряд окружностей. *Совокупность всех* (направленных) *окружностей, каждые две из которых имеют один и тот же центр подобия О,* мы будем называть (собственным) ***рядом окружностей;***

[1]) Ср. «Г. П.», стр 93.

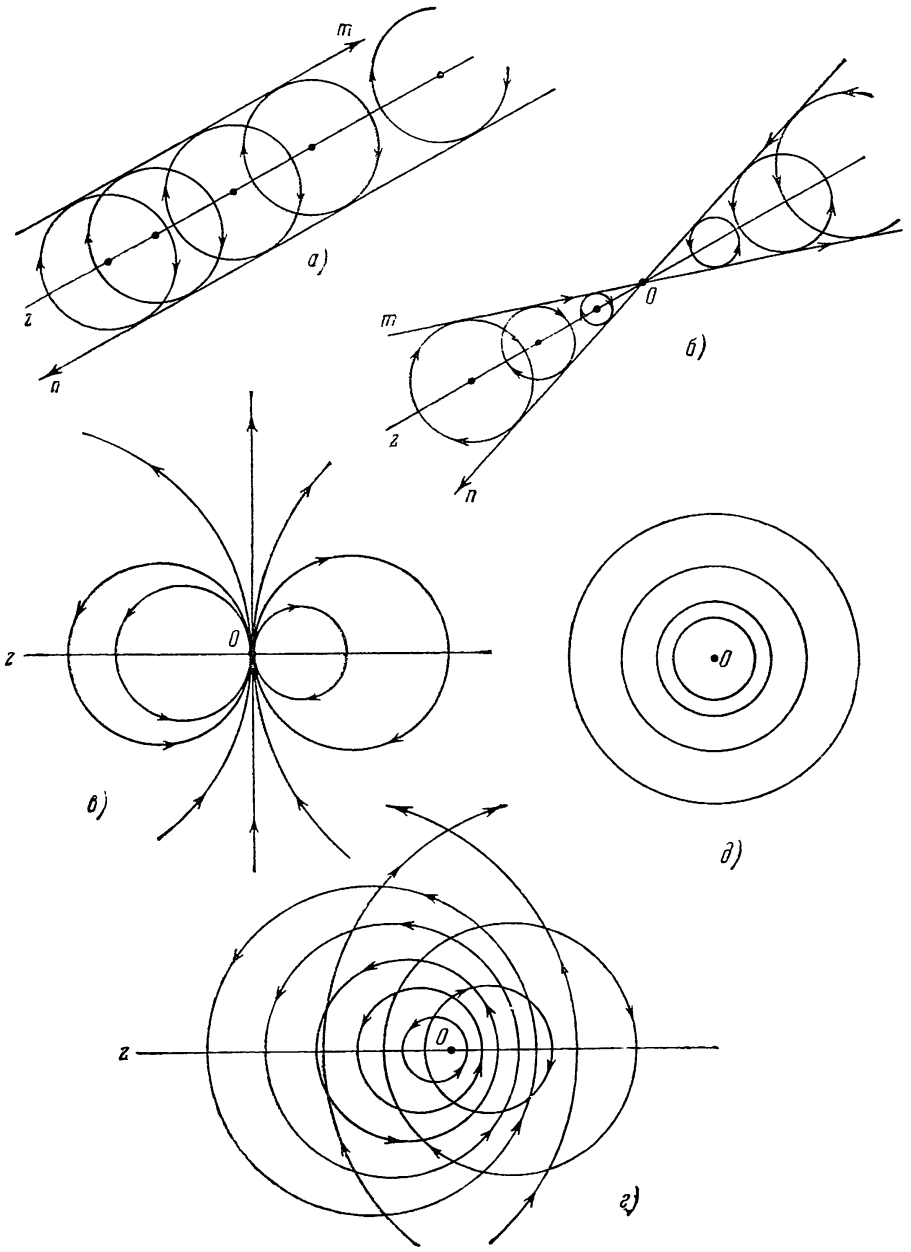


Рис. 32.

при этом точку O — *центр ряда* — мы также будем включать в состав ряда («окружность нулевого радиуса» ряда). Кроме того к числу рядов окружностей мы причислим всевозможные совокупности окружностей фиксированного (по величине и по знаку!) радиуса r, центры которых лежат на одной прямой z («ряд равных окружностей»; рис. 32,*а*); r может быть равно нулю, так что совокупность всех точек одной прямой тоже будет считаться рядом («ряд окружностей нулевого радиуса».) Очевидно, что если две окружности ряда имеют две (пересекающиеся или непересекающиеся) общие касательные m и n, пересекающиеся в их центре подобия, то все окружности ряда касаются прямых m и n (рис. 32,*а*, *б*); в этом случае ряд (состоящий из всех окружностей, касающихся m и n) называется *рядом окружностей с общими касательными*. Если две окружности (собственного) ряда касаются в точке O, то все окружности ряда касаются друг друга в этой точке (рис. 32,*в*); в таком случае мы приходим *к ряду касающихся окружностей* (сходному с пучком касающихся окружностей; см. п. **3.1.**). Наконец, если какие-то две окружности ряда не имеют общих касательных, то и никакие две окружности не имеют общих касательных; в этом случае мы приходим к *ряду окружностей без общих касательных* (рис. 32, *г*, *д*) [1]).

Частным случаем ряда окружностей без общих касательных является ряд концентрических окружностей, состоящий из всех окружностей с центром в фиксированной точке O (рис. 32,*д*). Во всех же остальных случаях центры окружностей ряда не совпадают; они заполняют некоторую прямую z — *линию центров* ряда (если ряд имеет центр O, то z есть прямая, соединяющая O с центром какой-либо окружности S ряда). Очевидно, что при этом каждая точка линии центров z является центром некоторой (и притом только одной) окружности ряда.

8.2. Сеть окружностей. Рассмотрим теперь *совокупность всех* (направленных) *окружностей, каждые три из которых имеют одну и ту же ось подобия* o; такая совокупность окружностей называется (собственной) *сетью окружностей*, а прямая o — *осью сети*. К числу сетей мы будем причислять также совокупность всех окружностей плоскости фиксированного (по величине и по знаку!) радиуса r («сеть равных окружностей»); при $r = 0$ мы приходим к совокупности всех точек плоскости, которая тоже входит в число сетей окружностей («сеть окружностей нулевого радиуса»). Очевидно, что собственную сеть окружностей можно также определить как *совокупность всех окружностей, относительно которых данная прямая* m *имеет одну и ту же степень* k; эта степень k называется *степенью*

---

[1]) Эти три типа рядов окружностей (см. рис. 32, *а*, *б*; 32, *в* и 32, *г*, *д*) называются также *эллиптическим* рядом окружностей, *параболическим* рядом и *гиперболическим* рядом.

сети. Отсюда вытекает, что собственную сеть можно также определить как совокупность всех окружностей, радиус r которых находится в постоянном отношении l к расстоянию d от центра окружности до оси o сети; эта величина l связана со степенью k сети соотношением $l=\frac{1+k}{1-k}$ $\left(\text{если } \frac{r-d}{r+d}=k, \text{ то } \frac{r}{d}=\frac{1+k}{1-k}\right)$. Если степень k сети положительна, то сеть можно также определить как совокупность всех окружностей, пересекающих ось o под постоянным углом α $\left(\text{таким, что } \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=k;\ \text{см. рис. } 33,а\right)$; если $k=0$, то сеть состоит из всех окружностей, касающихся оси o (рис. 33,*б*); наконец, если $k<0$, то нам приходится довольствоваться более сложным определением сети как совокупности всех таких окружностей S, что S видна под постоянным углом φ из точки P — проекции центра O окружности на ось o сети $\left(\text{угол } \varphi \text{ связан с числом } k \text{ соотношением } \sin\frac{\varphi}{2}=\frac{r}{d}=\frac{1+k}{1-k};\ \text{см. рис. } 33,в\right)$ [1]).

Докажем теперь, что *пересечение двух различных сетей* (совокупность окружностей, принадлежащих одновременно двум сетям) *образует ряд* (если только вообще есть окружности, принадлежащие этому пересечению). Действительно, пересечение сети окружностей постоянного радиуса r и собственной сети с осью o и степенью k образует ряд равных окружностей, состоящий из окружностей радиуса r, расстояние d центра которых до o равно $r\frac{1-k}{1+k}$ $\left(\text{ибо } \frac{r-d}{r+d}=k\right)$; пересечения двух различных сетей равных окружностей, так же как и пересечения двух различных собственных сетей с общей осью вообще не существует. Далее, окружности, принадлежащие одновременно двум собственным сетям с непересекающимися осями o_1 и o_2 и степенями k_1 и k_2, удовлетворяют условиям $\frac{r-d_1}{r+d_1}=k_1$ и $\frac{r-d_2}{r+d_2}=k_2$ или $\frac{r}{d_1}=\frac{1+k_1}{1-k_1}=l_1$ и $\frac{r}{d_2}=\frac{1+k_2}{1-k_2}=l_2$; здесь r — радиус окружности, d_1 и d_2 — расстояния от центра окружности до o_1 и до o_2. Но расстояния d_1 и d_2 от любой точки плоскости до непересекающихся прямых o_1 и o_2 (рис. 34) связаны соотношением $d_2=\pm(d_1-a)$; здесь a — постоянное (по величине и знаку) расстояние от точек прямой o_2 до прямой o_1 и знаки «+» и «—» отвечают случаям, когда прямые o_1 и o_2 *параллельны* (одинаково направлены) и когда они *противопараллельны* (противоположно направлены). Таким образом, мы приходим к системе уравнений

$$\frac{r}{d_1}=l_1,\quad \pm\frac{r}{d_1-a}=l_2,$$

[1]) Собственная сеть первого типа называется *гиперболической*, второго — *параболической* и третьего — *эллиптической*.

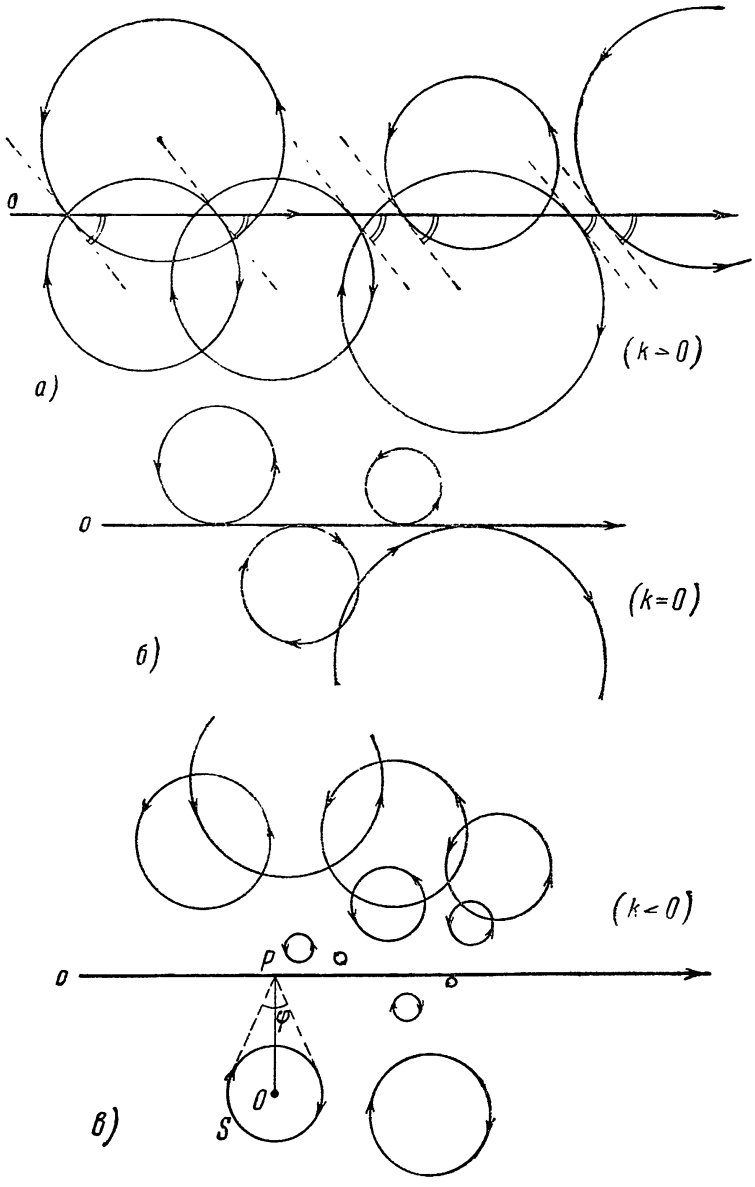


Рис. 33.

из которой следует, что

$$r = a\frac{l_2 l_1}{\pm l_2 - l_1}, \quad d_1 = a\frac{l_2}{\pm l_2 - l_1};$$

это означает, что пересечение наших двух сетей не существует, если o_1 параллельно o_2 и $l_1 = l_2$ или o_1 противопараллельно o_2 и $l_1 = -l_2$, а во всех остальных случаях представляет собой ряд

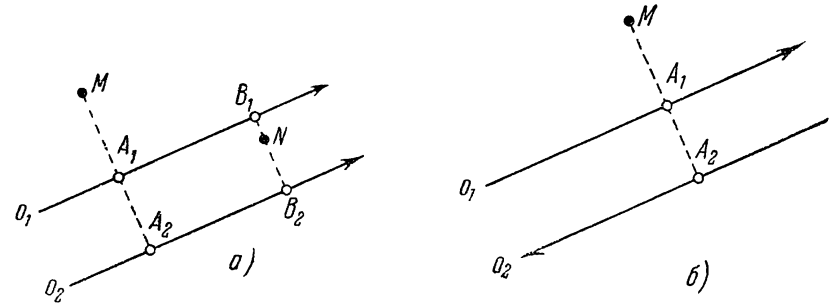


Рис. 34.

равных окружностей. Наконец, если оси o_1 и o_2 двух сетей пересекаются в точке O, то пересечение сетей образует ряд с центром O: действительно, точка O является центром подобия любых двух окружностей S_1 и S_2, принадлежащих одновременно обеим сетям, ибо через эту точку проходят две прямые, имеющие относительно S_1 и S_2 одинаковые степени (прямые o_1 и o_2).

§ 9. Осевая инверсия

9.1. Определение осевой инверсии. В полной аналогии с п. **4.1** выберем на плоскости некоторую сеть окружностей и рассмотрим все те окружности этой сети, которые касаются данной (направленной) прямой a. Эти окружности принадлежат одновременно как первой сети, так и сети всех окружностей, касающихся прямой a; согласно сказанному в конце предыдущего параграфа, они образуют ряд окружностей (мы исключаем здесь случаи, когда ось первоначальной сети совпадает с a и пересечение двух сетей вовсе не существует или совпадает с самой сетью, а также когда сеть состоит из окружностей, касающихся прямой, параллельной a, и пересечения также не существует). Так как все окружности этого ряда касаются прямой a, то мы имеем здесь либо ряд окружностей с двумя общими касательными a и a', либо ряд касающихся окружностей. Таким образом, выбор на плоскости определенной сети окружностей позволяет определить своеобразное *отображение плоскости, переводящее каждую отличную от оси o сети* (направленную) *прямую a в новую* (направленную) *прямую a'* (если наш ряд состоит из окружностей, касающихся прямой a в какой-либо точке, то мы будем

считать, что рассматриваемое преобразование переводит прямую a саму в себя). Это преобразование мы будем называть *осевой инверсией*, отвечающей рассматриваемой сети [1]). При этом осевую инверсию, отвечающую сети равных окружностей, мы будем называть *особой инверсией*; осевую инверсию, отвечающую сети окружностей, касающихся одной прямой, — *вырожденной*; во всех же остальных случаях мы будем иметь *обыкновенную* или *общую* осевую инверсию, причем ось o сети называется *осью инверсии*, а степень k сети — *степенью инверсии*.

9.2. Вырожденная инверсия и особая инверсия. Очевидно, что вырожденная инверсия переводит каждую прямую плоскости, не параллельную оси o сети, в одну и ту же прямую o,—это преобразование не представляет интереса, и мы в дальнейшем исключим его из рассмотрения. Более интересна особая осевая инверсия. Предположим для начала, что исходная сеть состоит из всех окружностей радиуса нуль, т. е. из всех точек. Совокупность всех «окружностей нулевого радиуса», «касающихся» прямой a (т. е. совокупность всех точек прямой a), представляет собой ряд (равных) окружностей с общими касательными a и a', где прямая a' отличается от прямой a только своим направлением. Таким образом, мы видим, что особая инверсия, отвечающая сети «нулевых» окружностей (точек) лишь изменяет направление каждой прямой плоскости; такое преобразование в множестве направленных прямых естественно называть *переориентацией* (т. е. «переменой направлений»). Очевидно, что переориентация переводит каждую окружность S в окружность S', отличающуюся от S только направлением (в том смысле, что прямые, касающиеся окружности S, переходят в прямые, касающиеся окружности S'); в частности, точки («окружности нулевого радиуса») переориентация переводит в себя.

Пусть теперь исходная сеть окружностей состоит из всех окружностей радиуса r. Очевидно, что все такие окружности, касающиеся определенной прямой a, касаются также прямой a', противопараллельной a и удаленной от a на расстояние $2r$ (величина $2r$ может быть и отрицательной — в соответствии со сказанным на стр. 482 это означает, что прямая a' расположена справа от a; на рис. 35 величина $2r$ положительна). Таким образом, в этом случае особая инверсия сдвигает каждую прямую на расстояние $2r$ от его перво-

[1]) Этот термин можно понимать в двояком смысле. Можно считать, что слово «осевая» подразумевает, что рассматриваемое преобразование задается не точкой O — «центром» инверсии, как точечная инверсия (которую в таком случае лучше было бы назвать «центральной инверсией»), а направленной прямой o — «осью» преобразования. Можно же рассматривать слово «осевая» как указание на то, что наше преобразование переводит не точки плоскости снова в точки, а направленные прямые («оси») в направленные прямые («оси»), т. е. является *осевым преобразованием* плоскости (см. ниже, стр. 504).

начального положения и изменяет направление прямой на обратное. Преобразование, переводящее каждую (направленную) прямую a, в прямую a', параллельную a и удаленную от a на определенное расстояние d, называется *расширением* на величину d. Очевидно, что при расширении на величину d каждая окружность с центром O и радиусом r переходит в новую окружность с тем же центром O, но радиусом $r+d$ (рис. 36, *а*), в частности точки переходят в окружности радиуса d (рис. 36, *б*) — с этим обстоятельством и связано

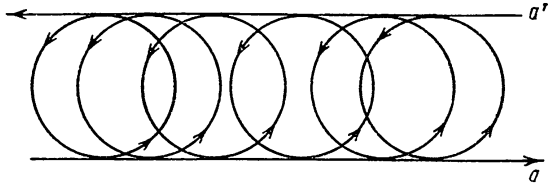


Рис. 35.

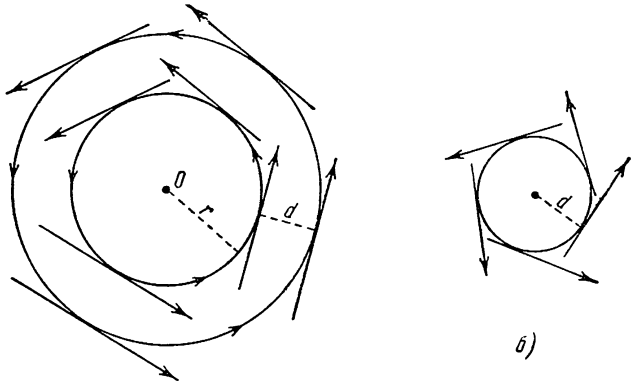


Рис. 36.

название «расширение» [1]). Касающиеся окружности при расширении

[1]) То обстоятельство, что расширение может переводить точки в окружности и наоборот, используется в элементарной геометрии: так известное

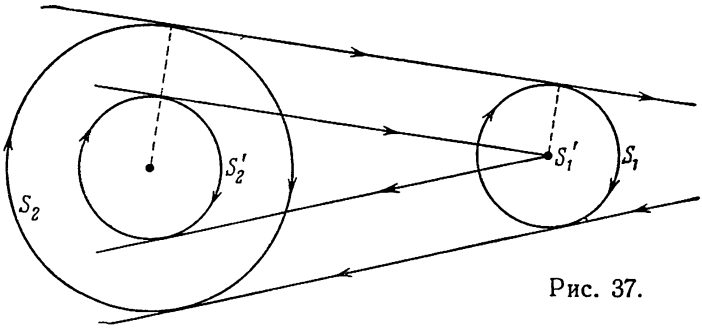


Рис. 37.

построение общей касательной двух окружностей (рис. 37), по существу, сводится к тому, что две окружности S_1 и S_2 при помощи расширения переводятся в точку S_1' и окружность S_2'.

переходят в касающиеся окружности (рис. 38, *а*); более общо, две окружности, касательное расстояние которых равно t, переходят при расширении в новые окружности, касательное расстояние которых также равно t (рис. 38, *б*). Итак, мы видим, что *особая осевая инверсия, отвечающая сети окружностей радиуса r, представляет собой расширение на величину 2r, сопровождаемое переориентацией.*

9.3. Свойства осевой инверсии. Перейдем теперь к обыкновенной осевой инверсии (это преобразование мы часто будем называть просто осевой инверсией) с осью o и степенью k. Очевидно, что каждая окружность S сети, касающаяся определенной прямой a, пересекающей o в точке M, касается также и прямой a', пересекающей o в той же точке M и удовлетворяющей условию

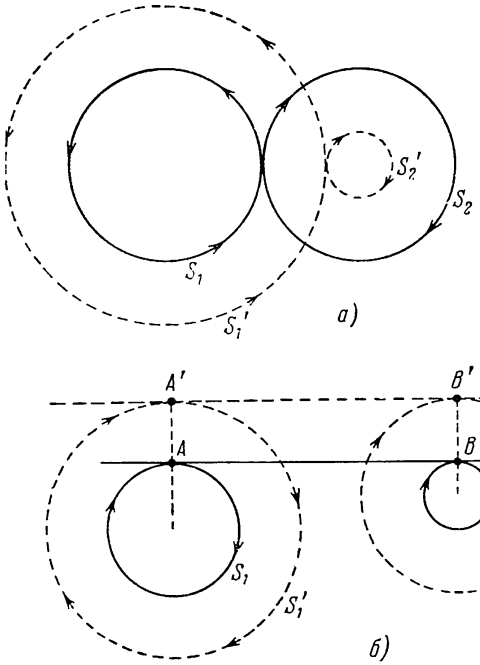


Рис. 38

$$\operatorname{tg}\frac{\sphericalangle(o,\ a)}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sphericalangle(o,\ a')}{2}=k\ (*)$$

(рис. 39); это вытекает из того, что прямая o имеет относительно окружности S степень k. Отсюда вытекает, что *осевая инверсия с осью o и степенью k переводит произвольную прямую a в прямую a', пересекающую o в той же точке, что и a, и удовлетворяющую соотношению* (*) — это определение осевой инверсии полностью аналогично аналитическому определению точечной инверсии (см. стр. 471). Что же касается параллельных оси o инверсии прямых, то каждая окружность S сети, касающаяся такой прямой b, касается также прямой b', противопараллельной b и расположенной так, что отношение расстояний от b и от b' до o равно k; это вытекает из того, что степень k прямой o относительно окружности S равна $\frac{r-d}{r+d}$ (рис. 39). Поэтому инверсия переводит прямую b в b' (и b' в b).

Это определение осевой инверсии можно несколько «геометризировать». Условимся задавать определяющую инверсию сеть осью o и принадлежащей сети окружностью S_0 (т. е. такой окружностью S_0, что ее степень относительно o равна k); эту окружность мы будем

называть *направляющей окружностью* осевой инверсии. Очевидно, что осевая инверсия переводит каждую касательную a_0 окружности S_0 во вторую касательную a_0' той же окружности, проходящую через точку пересечения a_0 с o; касательную b_0 окружности S_0, не пересекающую o, — во вторую не пересекающую o касательную b_0' окружности S_0; произвольную прямую a, пересекающую ось o и параллельную касательной a_0 окружности S_0, — в прямую a', пересекающую o в той же точке, что и a, и параллельную касательной a_0' окружности S_0; произвольную прямую b, параллельную не пересекающей o касательной b_0 окружности S_0, — в прямую b', параллельную b_0' и такую, что отношение расстояний от b и b' до o равно отношению расстояний до o от b_0 и b_0' (рис. 39).

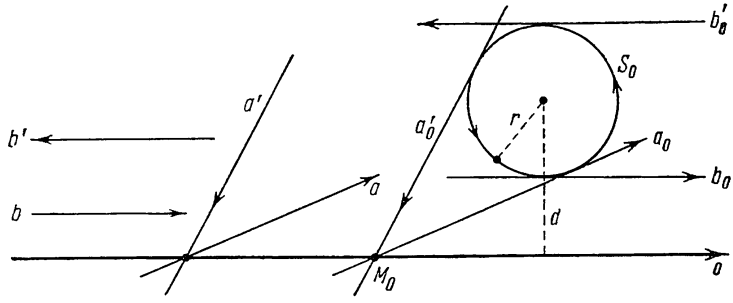


Рис. 39.

Очевидно, что всякая *невырожденная осевая инверсия* (т. е. особая инверсия или обыкновенная инверсия) «переставляет» (направленные) прямые плоскости, т. е. переводит каждую прямую a в ту прямую a', которая сама переходит в a[1]). Докажем теперь два менее очевидных свойства осевой инверсии.

А. *Всякая невырожденная осевая инверсия переводит каждую окружность ограниченного радиуса снова в окружность ограниченного радиуса* (т. е. каждую окружность или точку снова в окружность или точку).

Так как и расширение и переориентация переводят каждую окружность ограниченного радиуса снова в окружность ограниченного радиуса, то очевидно, что и особая инверсия обладает этим свойством. Более сложно показать, что им обладает обыкновенная осевая инверсия. Обозначим центр направляющей окружности S_0

[1]) Особая инверсия переводит каждую прямую a в противопараллельную ей прямую a', удаленную от a на постоянное расстояние $2r$ и расположенную справа (или — при отрицательном r — слева) от a. Но в этом случае и a расположена справа (слева) от a' (прямые a и a' противопараллельны!), откуда и вытекает, что a' переходит в a.

нашей осевой инверсии через O_0, и пусть a_0 и a_0' — две касательные окружности S_0, пересекающиеся в точке M_0 оси o и касающиеся окружности S_0 в точках A_0 и A_0'; R_0 и Q_0 — точки пересечения хорды A_0A_0' с прямой O_0M_0 и с перпендикуляром O_0P_0, опущенным из O_0 на ось o (рис. 40). Из подобия прямоугольных треугольников $O_0Q_0R_0$ и $O_0M_0P_0$, $O_0A_0R_0$ и $O_0M_0A_0$ имеем $\frac{O_0Q_0}{O_0R_0}=\frac{O_0M_0}{O_0P_0}$ и $\frac{O_0R_0}{O_0A_0}=\frac{O_0A_0}{O_0M_0}$. Перемножая почленно эти два равенства, получаем

$$\frac{O_0Q_0}{O_0A_0}=\frac{O_0A_0}{O_0P_0},\quad O_0Q_0=\frac{O_0A_0^2}{O_0P_0},$$

откуда вытекает, что *точка Q_0 не зависит от выбора пары касательных a_0, a_0'* (т. е. от выбора точки M_0 оси o).

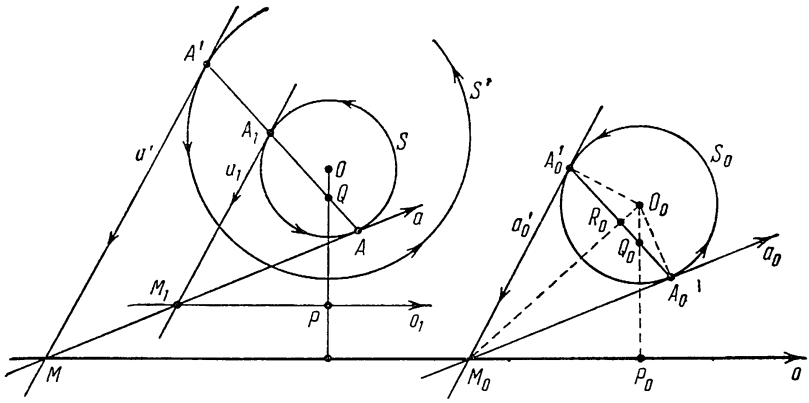


Рис. 40.

Рассмотрим теперь произвольную окружность S с центром O и пусть Q — такая точка перпендикуляра, опущенного из O на o, что $\overline{O_0Q_0}:\overline{OQ}=r_0:r$, где r_0 и r — (положительные или отрицательные!) радиусы окружностей S_0 и S; пусть, далее, S' — такая окружность, что *центр подобия окружностей S и S' совпадает с Q, а радикальная ось окружностей S и S' — с o*[1]). Мы утверж-

[1]) Если S есть точка («окружность нулевого радиуса»), то S' — такая окружность, что o есть радикальная ось окружностей S и S' и $\overline{O_0Q_0}:\overline{O'S}=r_0:r'$, где O' и r' — центр и радиус окружности S'; если S — такая собственная окружность, что радикальная ось окружностей S и Q совпадает с o, то S' совпадает с точкой Q; если S есть точка оси o инверсии, то S' совпадает с S.

Для построения окружности S' проще всего построить пару касательных a_0 и a_0' окружности S_0 и параллельные им прямые a и a' (a_0 и a_0', a и a' пересекаются на оси o). Если S касается прямой a, то из доказанного ниже следует, что S' касается a'; это, а также то, что центр подобия окружностей S и S' нам известен (точку Q можно построить), позволяет найти S'.

даем, что рассматриваемая осевая инверсия переводит окружность S в S'.

Для доказательства заметим, что точка M_1 пересечения касательных a и a_1 окружности S, параллельных касательным a_0 и a_0' направляющей окружности S_0, принадлежит прямой o_1, расположенной по отношению к S точно так же, как прямая o — по отношению к S_0 (т. е. такой, что $o_1 \parallel o$ и $\overline{O_0P_0} : \overline{OP} = r_0 : r$, где P — основание перпендикуляра, опущенного из O на o_1); это вытекает из того, что фигура, образованная окружностью S и ее касательными a, a_1, подобна фигуре, образованной окружностью S_0 и касательными a_0, a_0'. Далее, прямая AA_1, соединяющая точки соприкосновения прямых a и a_1 с окружностью S, проходит через точку Q (это следует из тех же соображений подобия). Касательная a' окружности S' в точке A' пересечения прямой QA_1 с S' параллельна a_1 (ибо Q есть центр подобия окружностей S и S'; рис. 40); далее точка M пересечения прямых a и a' лежит на радикальной оси o окружностей S и S' (ибо $MA = MA'$, так как треугольники M_1AA_1 и MAA' подобны, а $M_1A = M_1A_1$ (рис. 40)). Но то, что касательные a и a' окружностей S и S', параллельные касательным a_0 и a_0' окружности S_0, пересекаются на прямой o, и доказывает наше утверждение (см. определение осевой инверсии, стр. 499).

Б. *Невырожденная осевая инверсия сохраняет касательное расстояние окружностей.* Точнее, если A_1 и A_2 — точки соприкосновения двух окружностей S_1 и S_2 ограниченного радиуса с их общей касательной t, и A_1', A_2' — точки соприкосновения окружностей S_1' и S_2', в которые переводит S_1 и S_2 невырожденная инверсия, с прямой t', в которую эта инверсия переводит прямую t, то

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2'A_1'}.$$

Прежде всего очевидно, что если особая осевая инверсия переводит две окружности ограниченного радиуса S_1 и S_2 в окружности S_1' и S_2', то касательные расстояния $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1'A_2'}$ этих пар окружностей таковы, что $\overline{A_1A_2} = -\overline{A_1'A_2'} = \overline{A_2'A_1'}$ (ибо при расширении касательное расстояние двух окружностей не меняется, а при переориентации оно меняет знак); таким образом, надо только показать, что обыкновенная инверсия обладает свойством Б. Заметим далее, что если $\overline{MA}$ и $\overline{MA'}$ суть касательные расстояния точки M оси o инверсии и двух окружностей S и S', переходящих одна в другую при инверсии, то

$$\overline{MA} = \overline{A'M};$$

это следует из того, что o есть радикальная ось окружностей S и S' (рис. 40). Тем самым мы доказали наше утверждение для того случая, когда одной из двух окружностей является точка M оси o

инверсии. Если же S_1 и S_2 — две произвольные окружности, переходящие при инверсии в окружности S_1' и S_2', то точка M пересечения общих касательных A_1A_2 и $A_1'A_2'$ к S_1 и S_2 и к S_1' и S_2' лежит на оси инверсии (рис. 41); поэтому имеем

$$\overline{MA_1} = \overline{A_1'M}; \quad \overline{MA_2} = \overline{A_2'M},$$

откуда и следует, что

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2'A_1'}.$$

В частности, из свойства Б инверсии следует, что *невырожденная осевая инверсия переводит две касающиеся окружности в касающиеся окружности.*

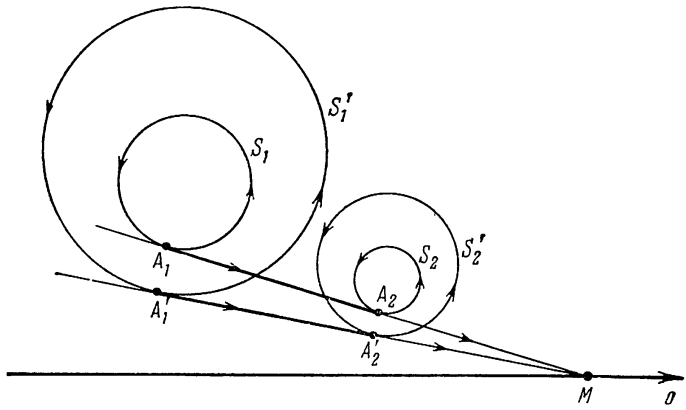


Рис. 41.

9.4. Теорема Брианшона. Осевая инверсия, так же как и точечная инверсия, может быть использована при доказательстве геометрических теорем и в решении задач на построение[1]). В качестве примера приведем одну теорему, доказываемую с применением свойств осевой инверсии.

Покажем, что *прямые p, q и r, соединяющие противоположные вершины A_1 и A_4, A_2 и A_5, A_3 и A_6 произвольного* (возможно — самопересекающегося!) *описанного вокруг окружности S шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, пересекаются в одной точке или параллельны* (теорема Брианшона).

Пусть S_1 — произвольная (направленная) окружность, касающаяся сторон A_1A_2 и A_4A_5 нашего шестиугольника (стороны шестиугольника мы здесь будем считать направленными, приписав им направление, отвечающее какому-то произвольно выбранному направлению окружности S); S_2 — окружность, в которую переводит S_1 осевая инверсия с осью q и направляющей окружностью S (S_2 касается сторон A_2A_3 и A_5A_6); S_3 — окружность, в которую переводит S_2 осевая инверсия с осью r и той же направляющей окружностью S (S_3 касается сторон A_3A_4 и A_6A_1); наконец, $\overline{S}_1$ — окружность, в которую переводит S_3 осевая инверсия с осью p и направляющей окружностью S ($\overline{S}_1$ снова касается сторон A_4A_5 и A_1A_2; рис. 42). Обозна-

[1]) Много примеров такого рода имеется в указанной в списке литературы книге И. М. Яглома [1].

чая точки касания прямых A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_5 с окружностью S через P_1, P_2, P_3 и P_4, а точки касания тех же прямых с окружностями S_1 и $\overline{S}_1$, S_2, S_3, снова S_1 и $\overline{S}_1$ — через Q_1 и $\overline{Q}_1$, Q_2, Q_3, Q_4 и $\overline{Q}_4$, в силу свойства Б осевой инверсии, имеем (см. также стр. 485):

$$\overline{P_1Q_1} = \overline{Q_2P_2} = \overline{P_3Q_3} = \overline{\overline{Q}_4P_4} = \overline{P_1\overline{Q}_1}.$$

Но равенство $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_1\overline{Q}_1}$ означает, что окружности S_1 и $\overline{S}_1$ — это одна и та же окружность. Следовательно, прямые q, r и p являются осями инвер-

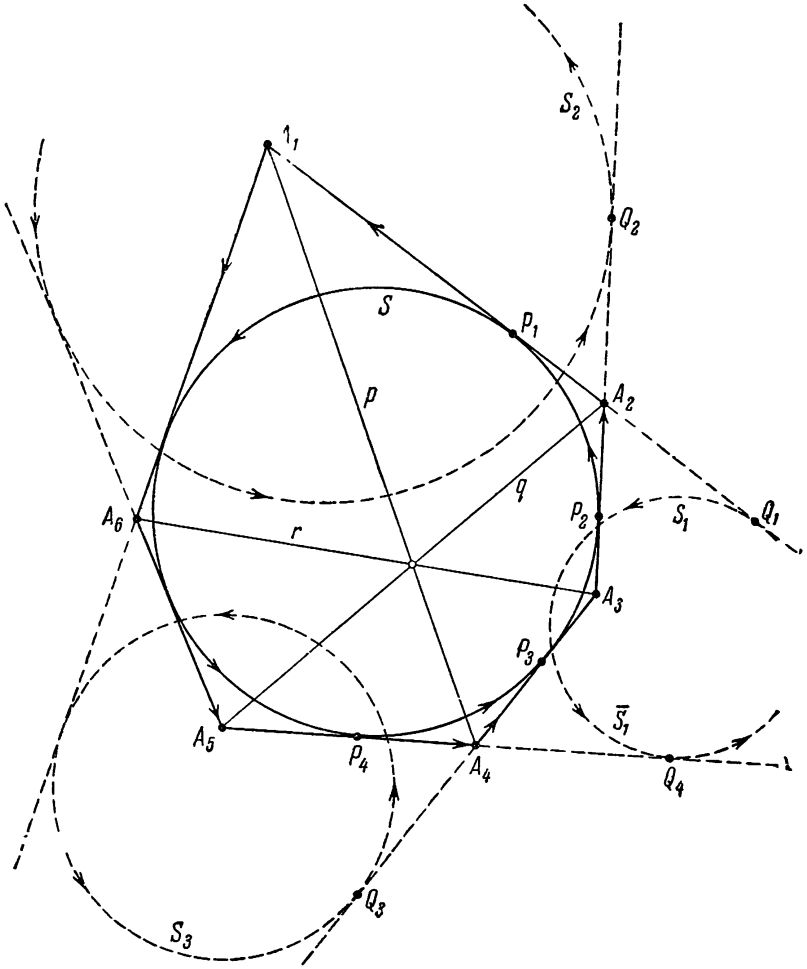


Рис. 42.

сий, переводящих S_1 в S_2, S_2 в S_3 и, наконец, S_3 снова в S_1, и значит, совпадают с попарными радикальными осями трех окружностей S_1, S_2 и S_3 (см. доказательство свойства А осевой инверсии). Но отсюда вытекает, что эти прямые пересекаются в одной точке — в радикальном центре окружностей S_1, S_2 и S_3 — или параллельны (см. п. 2.3).

§ 10. Осевая геометрия окружностей

10.1. Осевые круговые преобразования. В настоящем разделе точки всюду рассматривались лишь как частный случай окружностей — никакого самостоятельного значения они здесь не имели. Соответственно этому мы здесь уже не будем считать точку основным геометрическим элементом и откажемся от рассмотрения точечных преобразований плоскости, т. е. преобразований, переводящих каждую точку снова в точку. Роль точечных преобразований будут теперь играть преобразования множества направленных прямых линий (осей) плоскости, т. е. преобразования, переводящие каждую направленную прямую (ось) в новую направленную прямую (ось). Такие преобразования естественно называть *осевыми преобразованиями*

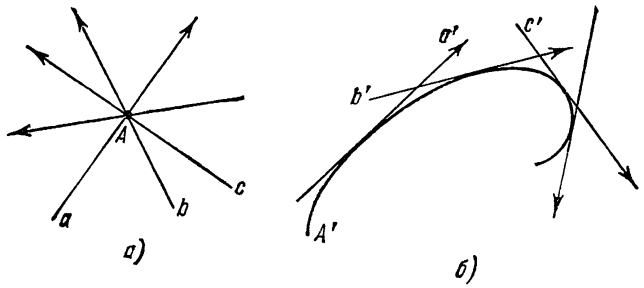


Рис. 43.

плоскости. Осевые преобразования, вообще говоря, уже не переводят точки снова в точки: если понимать под точкой A совокупность всех проходящих через нее прямых a, b, c, ... (рис. 43, *а*), то придется принять, что осевое преобразование переводит точку A в некоторую кривую A', определяемую своими касательными a', b', c', ... (рис. 43, *б*); подобно этому точечное преобразование переводит прямую a, понимаемую как совокупность точек A, B, C, ..., в кривую a', на которой лежат преобразованные точки A', B', C', ...

Особое место среди всех осевых преобразований занимают *осевые круговые преобразования* [1])—такие осевые преобразования, которые переводят каждую (направленную) окружность S ограниченного радиуса в новую окружность S' (т. е. переводят совокупность касательных произвольной окружности S в совокупность касательных некоторой новой окружности S'). Простейшие примеры осевых круговых преобразований доставляют уже преобразования подобия: поскольку эти преобразования переводят каждую прямую снова в прямую, то их можно рассматривать как осевые, а так как они

[1]) В литературе эти преобразования чаще называются *преобразованиями Лагерра*.

переводят также и окружности в окружности, то являются круговыми преобразованиями [1]). Более сложным примером может служить невырожденная осевая инверсия. Нетрудно показать, что последний пример имеет общий характер, т. е. что каждое осевое круговое преобразование сводится к невырожденной инверсии; точнее, мы покажем, что *каждое осевое круговое преобразование представляет собой особую или обыкновенную осевую инверсию, сопровождаемую еще, быть может, преобразованием подобия.*

Прежде всего, ясно, что *осевое круговое преобразование, переводящее каждую точку снова в точку, является преобразованием подобия*; это утверждение лишь по форме отличается от утверждения о том, что все точечные круговые преобразования, переводящие прямые снова в прямые, исчерпываются преобразованиями подобия (см. п. **5.1**). Далее заметим, что *если какое-либо осевое круговое преобразование переводит какие-либо две точки A и B снова в точки A' и B', то оно переводит все точки прямой AB снова в точки.* Действительно, при этом две проходящие через A и B (направленные) прямые a и b, отличающиеся только направлением, переходят в (направленные) прямые a' и b', проходящие через A' и B' и тоже отличающиеся только направлением, и все точки прямой AB, «касающиеся» a и b, переходят в точки прямой $A'B'$, «касающиеся» a' и b'. Поэтому, *если осевое круговое преобразование переводит в точки три точки A, B и C плоскости, не лежащие на одной прямой, то оно переводит в точку каждую точку M плоскости* (точка N пересечения прямых AM и BC переходит в точку, ибо она лежит на прямой BC, и точка M переходит в точку, так как она лежит на прямой AN; если $AM \parallel BC$, то нам придется только заменить A какой-либо другой вершиной треугольника ABC) *и, значит, является преобразованием подобия.* Таким образом, если осевое круговое преобразование отлично от преобразования подобия (а только такие преобразования нас сейчас интересуют), то имеет место один из следующих трех случаев:

1) преобразование не переводит в точку ни одну точку плоскости;

2) преобразование переводит в точку одну единственную точку плоскости (ниже мы покажем, что этот случай на самом деле невозможен);

---

[1]) Для того чтобы рассматривать преобразование подобия как осевое, надо еще условиться считать, что оно переводит определенную направленную прямую a в другую направленную прямую a' (направления a и a' могут быть выбраны произвольно) и направленную прямую b — в такую направленную прямую b', что $\sphericalangle(a, b) = \sphericalangle(a', b')$ $\sphericalangle(a, b) = 0$, если b параллельна a, $\sphericalangle(a, b) = \pi$, если b противопараллельна a). Таким образом, одному и тому же преобразованию подобия, понимаемому как точечное преобразование, могут соответствовать два различных осевых преобразования (отвечающих двум различным выборам направления оси a').

3) преобразование переводит в точки все точки одной прямой и только эти точки.

Рассмотрим теперь эти три случая последовательно.

1) Пусть осевое круговое преобразование Λ не переводит в точку ни одну точку плоскости. Рассмотрим две произвольные точки A' и B' и две проходящие через эти точки прямые a' и b', отличающиеся только направлением; пусть a и b суть прямые, которые Λ переводит в a' и b'. В точки прямой $A'B'$ («окружности нулевого радиуса, касающиеся прямых a' и b'») переходят окружности, касающиеся прямых a и b. Если бы прямые a и b пересекались, то в число последних окружностей входила бы также и точка M пересечения прямых a и b (ср. рис. 32, *б* на стр. 492); поэтому в одну из точек прямой $A'B'$ переходила бы точка M, что противоречит нашему условию. Отсюда следует, что прямые a и b противопараллельны и все касающиеся их окружности (в частности, и окружности A и B, которые Λ переводит в точки A' и B') равны (ср. выше рис. 32, *а*; прямые a и b не могут быть параллельны, ибо таких прямых вообще не касается ни одна окружность). Итак мы видим, что в любые две точки A' и B' переходят окружности одного радиуса; следовательно, Λ переводит в точки все окружности *одного определенного радиуса* r.

Заменим теперь наше круговое преобразование особой инверсией (расширением и переориентацией) Υ, переводящей в точки окружности именно этого радиуса r, сопровождаемой, быть может, еще некоторым дополнительным преобразованием P. Это дополнительное осевое круговое преобразование переводит все точки снова в точки (ибо уже Υ переводит окружности радиуса r в точки) и, значит, является преобразованием подобия; таким образом, наше исходное преобразование Λ является особой инверсией, сопровождаемой преобразованием подобия.

2) Докажем теперь, что осевое круговое преобразование Λ, переводящее в точку одну единственную точку A, не может существовать. Действительно, две отличающиеся только направлением прямые a и b, проходящие через точку A, должны переходить в две прямые a' и b', пересекающиеся в точке A', в которую переходит A. Рассмотрим еще некоторую, не параллельную a прямую a_1; она и совпадающая с ней по положению (отличающаяся от a_1 лишь направлением!) прямая b_1 переходят в противопараллельные прямые a_1' и b_1' (ибо ни одна из точек прямой a_1 не переходит в точку; ср. выше). Заметим теперь, что всегда найдутся такие две окружности M', M_1', касающиеся соответственно a' и b', a_1' и b_1', что одна из них заключается внутри другой (рис. 44, *а*, *б*). В эти две окружности переходят две точки M и M_1 прямых a и a_1; две отличающиеся направлением прямые, совпадающие по положению на пло-

скости с прямой MM_1, должны будут перейти в общие касательные окружностей M' и M_1'; но таких касательных вовсе не существует. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

3) Пусть осевое круговое преобразование Λ переводит в точки все точки некоторой прямой o (которую мы здесь будем считать направленной) и только эти точки; далее пусть Λ переводит в некоторую не лежащую на прямой o точку A' определенную окружность A. Заменим Λ обыкновенной осевой инверсией Υ с осью o, переводящей окружность A в точку A_1 (такую, что o есть радикальная ось окружностей A и A_1), сопровождаемой, если это требуется,

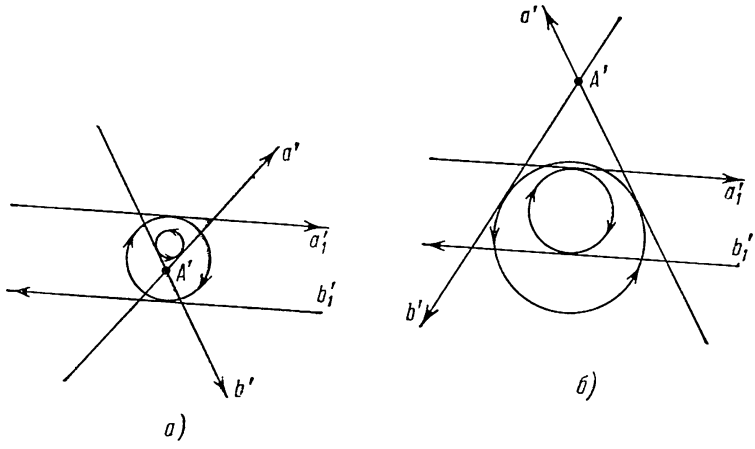


Рис. 44.

каким-то дополнительным осевым круговым преобразованием P. Преобразование P переводит все точки прямой o снова в точки и, кроме того, переводит в точку A' точку A_1; поэтому оно переводит все точки плоскости снова в точки (см. выше стр. 505) и, значит, является преобразованием подобия. Таким образом, мы видим, что в этом случае Λ представляет собой обыкновенную осевую инверсию Υ, сопровождаемую преобразованием подобия P. Этим и завершается доказательство нашей теоремы.

10.2. Понятие об осевой круговой геометрии. Изучение таких свойств геометрических фигур (в частности, окружностей и различных систем окружностей), которые не разрушаются осевыми круговыми преобразованиями, составляет предмет *осевой круговой геометрии*, или *геометрии Лагерра*. Иногда при этом вместо совокупности всех осевых круговых преобразований рассматривают лишь те из них, которые сохраняют касательное расстояние двух окружностей (т. е. невырожденные осевые инверсии и движения, а также произведение осевых инверсий и движений); это позволяет использовать в осевой круговой геометрии понятие касательного расстояния (в общей

осевой круговой геометрии можно говорить лишь об отношении касательных расстояний двух пар окружностей [1]). Осевая круговая геометрия представляет собой содержательную геометрическую дисциплину [2]). Большую роль в этой геометрии играют понятия ряда и сети окружностей; последнее связано с тем, что каждое осевое круговое преобразование переводит ряд окружностей снова в ряд и сеть окружностей в сеть (докажите!).

В. ОКРУЖНОСТЬ КАК СОВОКУПНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

§ 11. Новый взгляд на окружность

11.1. Плоскость как множество линейных элементов. В первом разделе настоящей статьи окружность рассматривалась как множество («геометрическое место») точек. При этом прямая, как правило, считалась лишь частным случаем окружности, в то время как точки играли особую роль: они принимались за основной элемент геометрии, что находило отражение, например, в том, что в первом разделе рассматривались исключительно точечные преобразования плоскости — преобразования, переводящие точки) к числу которых причислялась также «бесконечно удаленная точка» Ω) снова в точки. В противоположность этому во втором разделе мы рассматривали окружность как совокупность прямых линий; соответственно этому здесь уже точка считалась частным случаем окружности, а прямая играла особую роль. Теперь мы хотим наметить построение более общей теории, в которой и прямые и точки совершенно равноправны с окружностями (представляют собой лишь частные случаи окружности). При этом прямые и окружности мы здесь, как и во второй главе, будем считать направленными, а к числу точек, как и в первой главе, отнесем также «бесконечно удаленную точку» Ω. Под двумя касающимися окружностями мы теперь будем понимать:

две касающиеся (направленные) окружности или (направленные) окружность и прямую, имеющие в точке касания одинаковое направление;

две параллельные (т. е. не пересекающиеся и одинаково направленные) прямые;

точку и проходящую через эту точку окружность или прямую;

«бесконечно удаленную точку» Ω и произвольную прямую.

Поскольку ни точки, ни прямые не будут ничем выделяться из всего множества окружностей (понимаемых в указанном выше широ-

---

[1]) Взаимоотношение между совокупностью всех осевых круговых преобразований и совокупностью осевых круговых преобразований, сохраняющих касательные расстояния между окружностями, аналогично отношению между преобразованиями подобия и движениями.

[2]) Основы которой изложены, например, в указанной в конце статьи книге В. Бляшке [7].

ком смысле), то основным элементом геометрии здесь придется считать какой-то новый геометрический образ. За такой образ удобно принять так называемый *линейный элемент* (A, a), т. е. совокуп-

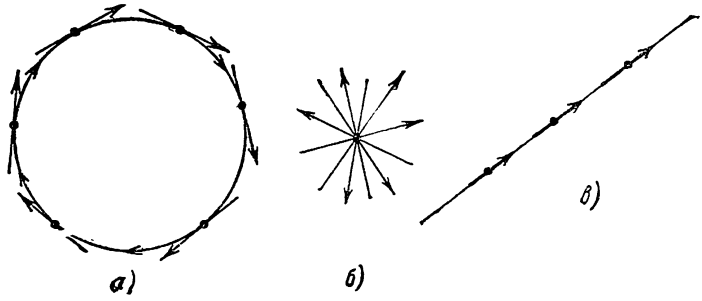


Рис. 45.

ность точки A и проходящей через нее (направленной) прямой a (другими словами, совокупность точки и заданного в этой точке направления). Окружность мы теперь будем рассматривать как совокупность всех линейных элементов, задаваемых точкой окружности и касательной к окружности в этой точке (рис. 45, *а*); точки и прямые мы также будем понимать как совокупности линейных элементов (рис. 45, *б*, *в*). Заметим еще, что касание двух окружностей с принятой здесь точки зрения означает наличие у них общего линейного элемента (рис. 46); если уговориться еще, что задание какого-то направления (указываемого направленной прямой a; две параллельные прямые задают одно направление) и «бесконечно удаленной точки» Ω определяет «бесконечно удаленный линейный элемент» (Ω, a), то это условие охватит все перечисленные выше случаи касания окружностей.

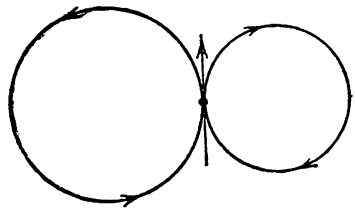


Рис. 46.

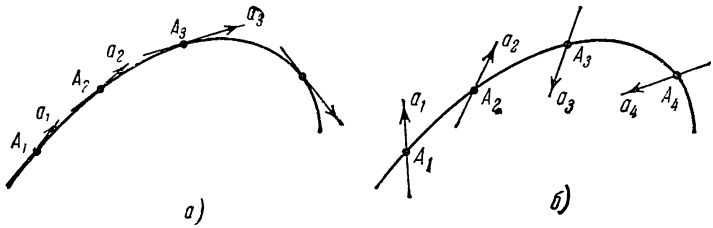
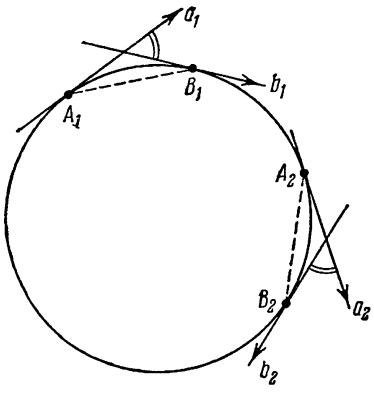


Рис. 47.

11.2. Новое определение окружности. При построении геометрии в множестве элементов каждую кривую γ приходится рассматривать как совокупность определенных этой кривой линейных элементов (рис. 47, *а*), при этом в определении кривой как «геометрического места» линейных

элементов $(A_1, a_1), (A_2, a_2), (A_3, a_3), \ldots$ надо специально оговаривать, что точки $A_1, A_2, A_3, \ldots$ и прямые $a_1, a_2, a_3, \ldots$, взятые в отдельности, определяют *одну и ту же* кривую, т. е. что не имеет место случай, изображенный на рис. 47, *б* (другими словами, надо потребовать, чтобы для каждого линейного элемента (A, a) рассматриваемой совокупности линейных элементов прямая a являлась касательной в точке A к кривой, определенной всеми точками этих элементов; отсюда уже будет следовать, что A является точкой прикосновения прямой a с кривой, определенной прямыми рассматриваемых линейных элементов). Окружность как множество линейных элементов определяется как *такая кривая, что для двух произвольных ее линейных элементов* (A, a) *и* (B, b) *расстояние* AB *полностью определяется углом* $\angle(a, b)$ *и наоборот* (т. е. если ни расстояние AB, ни угол $\angle(a, b)$ не равны тождественно нулю для всех пар линейных элементов кривой, то для двух пар линейных элементов (A_1, a_1), (B_1, b_1) и (A_2, a_2), (B_2, b_2) с равными расстояниями A_1B_1 и A_2B_2 равны и углы $\angle(a_1, b_1)$ и $\angle(a_2, b_2)$; рис. 48). При этом *радиус* окружности можно определить как предел отношения $\frac{AB}{\angle(a,b)}$ при $\angle(a, b) \to 0$ или $AB \to 0$ [1]); радиус окружности может также равняться нулю (окружность нулевого радиуса представляет собой точку) или быть бесконечным (окружность бесконечного радиуса — прямая). Если считать углы направленными (см. § 1 раздела А), то это определение будет учитывать также и знак радиуса (см. п. 6.2).



§ 12. Касательная геометрия окружностей

12.1. Касательные круговые преобразования. Изучение свойств окружностей, рассматриваемых как совокупность линейных элементов, служит предметом весьма содержательной теории, которую можно было бы развивать аналогично построениям первых двух разделов статьи. Так, например, здесь можно было бы определить понятие «степени окружности относительно окружности» и с помощью этого понятия выделить некоторые специальные системы окружностей, родственные пучкам и рядам или связкам и сетям; далее с помощью этих систем окружностей можно определять своеобразную «инверсию», представляющую собой такое преобразование в множестве линейных элементов, при котором каждая окружность (понимаемая в принятом в этой главе широком смысле) переходит в новую окружность и т. д.

---

[1]) Окружность характеризуется тем, что между расстоянием AB и углом $\angle(a, b)$ имеется функциональная зависимость: $AB = f(\angle(a, b))$; радиус окружности равен производной возникающей таким образом функции $y = f(x)$ при $x = 0$ (см. ЭЭМ., кн. III, статью «Производные. Интегралы и ряды»). Угол всюду измеряется в радианной мере.

Однако изложение этой теории требует значительно больше места, чем допускают рамки настоящей статьи.

Мы здесь ограничимся лишь вопросом о сведении произвольных *касательных круговых преобразований* [1]), т. е. таких преобразований в множестве линейных элементов, которые переводят каждую окружность снова в окружность (переводят совокупность линейных элементов произвольной окружности в совокупность линейных элементов какой-то другой окружности), к известным нам уже точечным и осевым круговым преобразованиям. Касающиеся окружности, т. е. окружности,

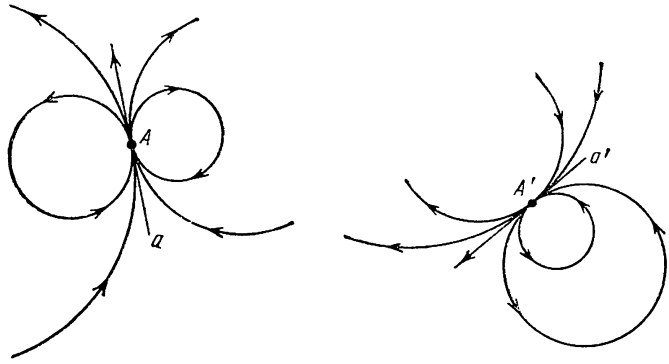


Рис. 49.

имеющие общий линейный элемент, касательное круговое преобразование переводит снова в касающиеся окружности; с этим обстоятельством связано и само название «касательное преобразование» [2]).

Очевидно, что рассмотренные в разделах А и Б точечные круговые преобразования и осевые круговые преобразования являются частными случаями касательных круговых преобразований. Действительно, поскольку, например, точечное круговое преобразование К переводит касающиеся окружности снова в касающиеся окружности, то его можно считать также преобразованием в множестве линейных элементов: так как совокупность всех окружностей, проходящих через определенную точку A и касающихся в этой точке друг друга, переходит в совокупность окружностей, касающихся друг друга в какой-то другой точке A' (рис. 49), то можно считать, что К переводит каждый линейный элемент (A, a) в другой линейный

[1]) В литературе эти преобразования обыкновенно называются *круговыми преобразованиями Ли*.

[2]) Вообще *касательными преобразованиями* со ласно Ли называют также такие преобразования в множестве линейных элементов, которые переводят каждую кривую (см. п. **11.2**) снова в кривую; такие преобразования переводят касающиеся кривые (кривые, имеющие общий линейный элемент) снова в касающиеся кривые. Касательные круговые преобразования представляют собой частный случай общих касательных преобразований

элемент (A', a') [1]). С нашей новой точки зрения точечные и осевые круговые преобразования можно характеризовать как такие касательные круговые преобразования, которые переводят точки снова в точки, соответственно переводят прямые в прямые. Однако существуют также касательные круговые преобразования, которые не сохраняют ни точек, ни прямых; к такому преобразованию мы придем, например, если произведем подряд несколько точечных и осевых круговых преобразований (скажем, сначала точечную, а затем осевую инверсию). Оказывается, что этот прием получения касательных круговых преобразований имеет общий характер, т. е. что *всякое касательное круговое преобразование можно представить в виде последовательности нескольких точечных и осевых круговых преобразований* [2]).

Сначала предположим, что касательное круговое преобразование M_1 *переводит в себя некоторую точку* A. Произведем теперь последовательно (точечную) инверсию I с центром A, преобразование M_1 и еще одну инверсию I; полученное таким образом преобразование мы обозначим через Λ. *Прямую* a инверсия I переводит в окружность S, проходящую через точку A (окружность, «касающуюся окружности нулевого радиуса A»); преобразование M_1 переводит S в другую окружность S', также проходящую через A (ибо M_1, по предположению, переводит A в себя); наконец, I переводит S' в другую *прямую* a'. Таким образом, мы видим, что преобразование Λ — последовательность преобразований I, M_1 и I — *переводит каждую прямую линию снова в прямую линию* и, значит, *является осевым круговым преобразованием* (обыкновенной или особой осевой инверсией, сопровождаемой еще, быть может, преобразованием подобия). Последовательность же инверсии I, осевого кругового преобразования Λ и снова инверсии I совпадает с последовательностью двух преобразований I, исходного касательного кругового преобразования M_1 и еще двух инверсий I, т. е. совпадает с преобразованием M_1 (ибо две последовательные инверсии I, очевидно, взаимно уничтожаются); этим и доказывается, что M_1 *можно представить в виде последовательности трех преобразований* I, Λ *и* I.

Рассмотрим теперь *произвольное* касательное круговое преобразование M. Если M переводит все точки снова в точки, то оно, как мы уже знаем, сводится к (точечной) инверсии. Предположим теперь, что M переводит

---

[1]) Точечная инверсия с центром O и степенью k представляет собой касательное круговое преобразование, переводящее каждый линейный элемент (A, a) в линейный элемент (A', a'), где A и A' лежат на одной прямой m с центром O инверсии, $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=k$ и $\sphericalangle(m, a)=\sphericalangle(a', m)$; последнее условие указывает также, как следует направить a', если считать прямую a направленной. Осевая инверсия с осью o и степенью k переводит друг в друга линейные элементы (A, a) и (A', a'), где a и a' пересекаются в точке M оси o, $\operatorname{tg}\frac{\sphericalangle(o, a)}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\sphericalangle(o, a')}{2}=k$ и $\overline{AM}=\overline{MA'}$. Столь же просто указать, как преобразуют произвольный линейный элемент (A, a) особые точечная и осевая инверсии; мы предоставляем это сделать читателю.

[2]) Используя терминологию статьи «Г. П.», можно сказать, что каждое касательное круговое преобразование представляет собой произведение нескольких точечных и осевых круговых преобразований.

точку A в окружность S с центром A' и радиусом r [1]). Обозначим через T параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{A'A}$ [2]) и через Υ — особую осевую инверсию, определяемую сетью окружностей радиуса r (особую инверсию Υ можно также заменить расширением на величину $-r$). Преобразование T переводит окружность S в окружность S' с центром A и радиусом r; Υ переводит S' в точку A; таким образом, последовательность преобразований M, T и Υ представляет собой касательное круговое преобразование (обозначим его через M_1), переводящее точку A в себя. Но такое преобразование, как мы только что показали, можно заменить последовательностью (точечной) инверсии I, осевого кругового преобразования Λ (обыкновенной или особой осевой инверсии, сопровождаемой преобразованием подобия) и инверсии I. С другой стороны, M представляет собой последовательность преобразования M_1, особой инверсии Υ и параллельного переноса $\overline{T}$ на вектор $\overrightarrow{AA'}$ (последовательность трех преобразований M_1, Υ и $\overline{T}$ не отличается от последовательности пяти преобразований M, T, Υ, Υ и $\overline{T}$; но две последовательные инверсии Υ взаимно уничтожаются и два параллельных переноса T и $\overline{T}$ также взаимно уничтожаются). Таким образом, M *совпадает с последовательностью пяти преобразований* I, Λ, I, Υ *и* $\overline{T}$, что и доказывает наше утверждение.

12.2. Задача Аполлония. Касательные круговые преобразования допускают многочисленные применения к доказательству геометрических теорем и к решению задач на построение. Здесь мы ограничимся одним известным примером такого рода.

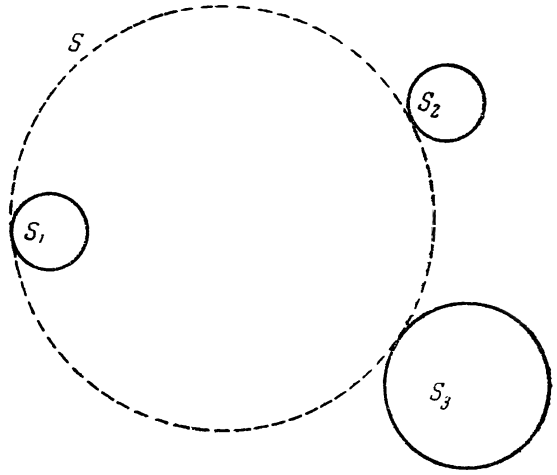
Пусть нам требуется *построить окружность* S, *касающуюся трех заданных окружностей* S_1, S_2 *и* S_3 (рис. 50, *а*; эта задача на построение носит название задачи Аполлония). Первоначально эта задача кажется очень сложной, поскольку совсем не видно, как перейти от имеющихся ничем не связанных друг с другом окружностей S_1, S_2 и S_3 к искомой окружности S. Можно, однако, так упростить чертеж задачи, что новая задача будет уже совсем простой.

Прежде всего мы с помощью какого-либо *осевого кругового преобразования* Λ переведем окружность S_1 в точку S_1'; окружности S_2 и S_3 перейдут при этом в новые окружности S_2' и S_3'. В качестве преобразования Λ можно использовать особую осевую инверсию или расширение на величину $-r_1$, где r_1 — радиус окружности S_1 (см. рис. 50, *б*.) При этом использование осевого кругового преобразования предполагает, разумеется, что окружности S_1, S_2 и S_3 являются

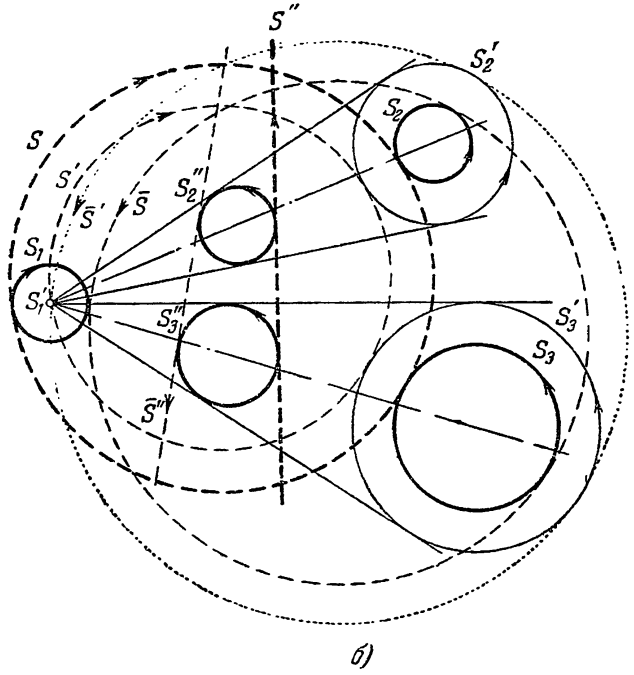
---

[1]) Если M переводит A в прямую a, то вместо M мы будем рассматривать последовательность $\overline{M}$ преобразования M и какой-либо (точечной) инверсии I, переводящей a в окружность S; в свою очередь M будет получаться, если последовательно произвести преобразования $\overline{M}$ и I. (Впрочем, можно доказать, что никакое касательное круговое преобразование не переводит *все* точки плоскости в прямые, так что наверное найдется точка A, которую M переводит в окружность S ограниченного радиуса.)

[2]) См. стр. 54.



а)



б)

Рис. 50.

направленными. Если эти окружности первоначально были ненаправленными, то мы зададим их направления произвольно. Различный выбор направлений этих окружностей даст нам разные решения задачи Аполлония [1]).

Искомая окружность S преобразованием Λ (скажем, расширением) переводится в окружность S', касающуюся окружностей S_2' и S_3' и проходящую через точку S_1'. Произведем теперь *точечное круговое преобразование*, переводящее точку S_1' в «несобственную» точку Ω, скажем, инверсию I с центром S_1'. При этом окружности S_2' и S_3' перейдут в какие-то окружности S_2'' и S_3'', а искомая окружность S' — в прямую S'', касающуюся окружностей S_2'' и S_3''. Таким образом, *касательное круговое преобразование* K, представляющее собой последовательность двух преобразований — осевого кругового преобразования (расширения) Λ и точечного кругового преобразования (инверсии) I, — переводит окружности S_1, S_2 и S_3 в «несобственную» точку Ω и в две окружности S_2'' и S_3''; искомую окружность S касательное круговое преобразование K переводит в прямую S'', касающуюся окружностей S_2'' и S_3''. Зная окружности S_2'' и S_3'', эту прямую S'' нетрудно построить; затем от прямой S'' легко перейти к окружности S' и, наконец, к искомой окружности S. В зависимости от расположения и направлений окружностей S_2'' и S_3'' задача может иметь два решения (именно этот случай изображен на рис. 50), одно решение или ни одного решения.

12.3. Понятие о касательной геометрии окружностей. Изучение таких свойств фигур, которые сохраняются при касательных круговых преобразованиях, составляет предмет *касательной геометрии окружностей* [2]). Доказанное выше позволяет утверждать, что *касательная геометрия окружностей изучает свойства фигур, сохраняющиеся как при точечных, так и при осевых круговых преобразованиях, и только эти свойства.* В этой геометрии уже не имеет смысла ни понятие угла между окружностями, ни понятие касательного расстояния; нетрудно показать даже, что здесь нельзя указать никакого аналога этих понятий, поскольку любую пару окружностей можно перевести соответственно подобранным касательным круговым преобразованием в любую другую пару окружностей.

---

[1]) Ниже мы увидим, что если окружности S_1, S_2 и S_3 направленные, то задача Аполлония может иметь до двух решений. Направление трех ненаправленных окружностей можно выбрать $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ разными способами; это приводит к 16 различным окружностям S. Но эти 16 направленных окружностей попарно отличаются одна от другой только направлением. Таким образом, мы заключаем, что *в случае ненаправленных окружностей наибольшее возможное число решений задачи Аполлония равно восьми.*

[2]) Элементы этой геометрии содержатся в книге Бляшке [7], на которую мы уже неоднократно ссылались.

Напротив, уже не каждые две тройки окружностей будут обладать в касательной геометрии окружностей одинаковыми свойствами: так, легко видеть, что изображенные на рис. 51, *а*, *б* две тройки окружностей S_1, S_2, S_3 и $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$, $\overline{S}_3$ нельзя перевести одну в другую (ибо в противном случае прямая S перешла бы в окружность $\overline{S}$, «касающуюся» $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$, а такой окружности вовсе не существует). Впрочем, можно показать, что все различные (с точки зрения касательной геометрии окружностей) тройки окружностей, никакие две

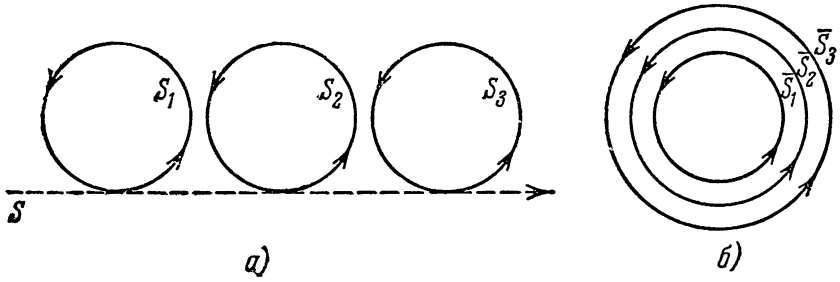


Рис. 51.

из которых не касаются между собой, исчерпываются этой парой: каждую другую тройку окружностей можно перевести касательным круговым преобразованием в одну из изображенных на рис. 51, *а*, *б*. Более содержательно изучение свойств четверок окружностей; здесь можно выделить некоторые особо интересные типы четверок и составить некоторые «инварианты» четверок окружностей, т. е. сопоставить с четверками окружностей определенные числа, совпадение которых для двух четверок означает, что в смысле касательной круговой геометрии эти четверки окружностей «одинаковы», т. е что они переводятся одна в другую некоторым касательным круговым преобразованием. Мы, однако, не имеем никакой возможности остановиться здесь на этих деталях касательной геометрии окружностей.

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Яглом, Геометрические преобразования, Гостехиздат, т. I, М., 1957; т. II, М., 1958.

Книга содержит много частных теорем, касающихся свойств окружностей. Второй том состоит из двух глав, последняя из которых специально посвящена применениям точечной и осевой геометрии окружностей к элементарной геометрии.

[2] Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, Гостехиздат, т. I, М.—Л., 1948, т. II, 1949.

Заключающая т. I гл. X посвящена элементам геометрии окружностей, включающим понятие о радикальной оси и радикальном центре, о пучках окружностей, о точечной инверсии и расширении; имеются также

много приложений этих понятий к решению элементарно-геометрических задач Заключающая т. II гл. XX посвящена стереометрическим аналогам всех этих понятий.

[3] Ж. Адамар, Элементарная геометрия, перев. с франц., Учпедгиз, ч. 1, М., 1957, ч. 2, 1958.
Весьма обширный курс элементарной геометрии, содержащий много задач, сопровождаемых подробными решениями. В т. I, посвященном планиметрии, имеются понятия радикальной оси и радикального центра, а также точечной инверсии; в т. II освещены соответствующие стереометрические понятия. Много приложений.

[4] Б. Н. Делоне и О. К. Житомирский, Задачник по геометрии, М., Физматгиз, 1959.
Планиметрическая часть книги завершается циклом задач «Начала геометрии кругов», в котором в форме задач изложены основные понятия (точечной) геометрии окружностей. Все задачи сопровождаются решениями.

[5] Ф. Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей, т. II, Геометрия, перев. с нем., М.—Л., ОНТИ, 1934.
Весьма содержательный обзор некоторых центральных геометрических понятий и вопросов преподавания геометрии; изложение элементарное, но нелегкое в силу сжатости. В части книги, посвященной геометрическим преобразованиям, отмечена инверсия и общие касательные преобразования; в дополнительных замечаниях о некоторых вопросах элементарной геометрии говорится о расширении.

[6] Ф. Клейн, Высшая геометрия, перев. с нем., М.—Л., ГОНТИ, 1939.
Неэлементарное сочинение, содержащее много материала по геометрии окружностей В частности, в книге говорится о всех трех видах круговых преобразований, фигурирующих в настоящей статье.

7] В. Бляшке (W. Blaschke), Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. III, Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln, Berlin, 1929 г.
Обширная монография по геометрии окружностей и сфер. Изложение весьма ясное, но неэлементарное.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ТРИГОНОМЕТРИИ

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Основные понятия сферической геометрии 518
1.1. Происхождение сферической геометрии 518
1.2. Точки, большие окружности, малые окружности 519
1.3. Движение сферы 522
1.4. Предмет сферической геометрии 524
1.5. Принцип двойственности 526
1.6. Углы на сфере 527
§ 2. Сферические треугольники 530
2.1. Треугольники и двуугольники на сфере 530
2.2. Полярные треугольники 530
2.3. Равенство сферических треугольников 532
2.4. Большая окружность как кратчайшая 534
2.5. Площадь сферического треугольника 536
§ 3. Малые окружности 539
3.1. Окружности и углы на сфере 539
3.2. Геодезическая кривизна малой окружности 541
3.3. Формула Гаусса — Бонне 543
§ 4. Тригонометрические соотношения в сферическом треугольнике . 545
4.1. Сферическая теорема косинусов 545
4.2. Сферическая теорема синусов 547
4.3. Формулы пяти элементов 549
4.4. Двойственная теорема косинусов 551
4.5. Формулы котангенсов 552
4.6. Случай прямоугольного сферического треугольника 553
4.7. Решение сферических треугольников 555
Литература 557

§ 1. Основные понятия сферической геометрии

1.1. Происхождение сферической геометрии. Геометрия на плоскости имеет, как известно, существенно «земное» происхождение — она возникла, как указывает самое слово «геометрия» (γεωμετρία — «землемерие»), из измерения земельных участков таких размеров, которые позволяют рассматривать поверхность земли как плоскость.

Сферическая геометрия, т. е. геометрия на сфере, имеет, напротив, «небесное» происхождение: с геометрией на сфере люди столкнулись впервые в астрономии, при изучении видимой «небесной сферы». Сферическая геометрия возникла в I—II веках нашей эры,

когда после римских завоеваний был установлен тесный контакт между греческими и александрийскими геометрами и вавилонскими астрономами. В I в. появилась «Сферика» Менелая, которая тотчас же была применена к астрономии знаменитым Клавдием Птолемеем. Позже, с развитием мореплавания и географии, сферическую геометрию стали применять и к поверхности земного шара. В настоящее время как плоская, так и сферическая геометрия широко применяются в геодезии — на плоской геометрии основана «низшая геодезия» — геодезия небольших участков земли, на сферической геометрии основана «высшая геодезия» — геодезия больших участков земли.

Между плоской и сферической геометриями имеется много общего; это объясняется тем, что сфера обладает такой же «подвижностью», как и плоскость: всякую точку плоскости и выходящее из нее направление (рис. 1) можно совместить движением этой плоскости со всякой другой точкой

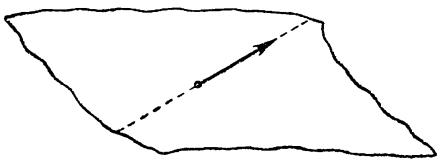


Рис. 1.

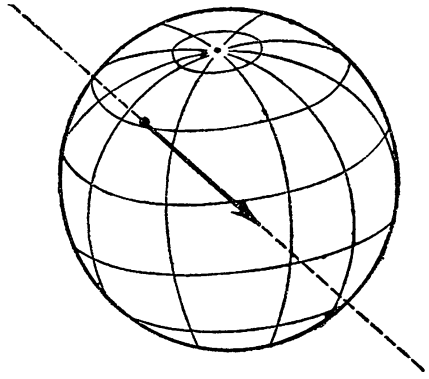


Рис. 2.

плоскости и выходящим из нее направлением, и точно так же *всякую точку сферы и выходящее из нее направление* (рис. 2) *можно совместить вращением этой сферы со всякой другой точкой сферы и выходящим из нее направлением*[1]).

1.2. Точки, большие окружности, малые окружности. Если основными понятиями плоской геометрии являются точка, прямая и движение плоскости[2]), то в сферической геометрии такую же роль играют *точка* сферы, *большая окружность* и *движение* сферы. Разъясним смысл этих понятий. Сечение сферы всякой плоскостью представляет собой окружность, так как если опустить из центра сферы перпендикуляр на эту плоскость и произвести поворот пространства вокруг этого перпендикуляра на любой угол, то при повороте перейдет в себя как сфера, так и плоскость и, следовательно, линия их пересечения; поэтому всякая точка этой линии пересечения находится на одном и том же расстоянии от точки пересечения плоскости с перпендикуляром, откуда видно, что эта линия

[1]) См. в связи с этим статью о неевклидовых геометриях в кн. V ЭЭМ.
[2]) См. статью «Аксиомы и основные понятия геометрии», стр. 32.

пересечения — окружность. Радиус ϱ этой окружности является катетом прямоугольного треугольника (рис. 3), гипотенуза которого — радиус r, а второй катет — перпендикуляр h, опущенный из центра сферы на плоскость. Поэтому в силу теоремы Пифагора

$$\varrho = \sqrt{r^2 - h^2}.$$

Эта формула показывает, что величина ϱ принимает максимальное значение $\varrho = r$ при $h = 0$, т. е. в том случае, когда плоскость проходит через центр сферы, т. е. является диаметральной плоскостью. В этом случае окружность на сфере и называется *большой окружностью* (иногда — *большим кругом*). При $h > 0$ мы имеем $\varrho < r$; окружность на сфере называется в этом случае *малой окружностью*.

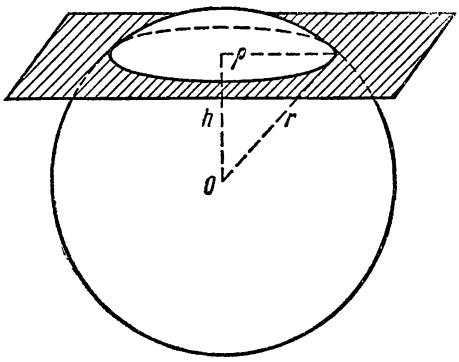


Рис. 3.

Так как через всякие три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость, то через всякие две точки сферы, не являющиеся диаметрально противоположными (т. е. концами одного диаметра) проходит единственная диаметральная плоскость. Поэтому *через всякие две точки сферы, не являющиеся диаметрально противоположными, проходит единственная большая окружность* (рис. 4). Этот факт вполне аналогичен тому, что на плоскости через всякие две точки проходит единственная прямая. Через две диаметрально противоположные точки сферы, напротив, можно провести бесконечное множество больших окружностей (рис. 5). Так как всякие две диаметральные плоскости сферы пересекаются по ее диаметру, то *всякие две большие окружности пересекаются в двух диаметрально противоположных точках сферы* (рис. 6). Здесь мы наблюдаем отличие сферической геометрии от плоской геометрии, в которой две прямые пересекаются не более чем в одной точке.

Так как плоскость делит пространство на две области, то *большая окружность делит сферу на две области* (рис. 4); эти области называются *полусферами*. Далее, так как две пересекающиеся плоскости делят пространство на четыре области, то *две большие окружности делят сферу на четыре области* (рис. 6). Наконец, так как три плоскости, пересекающиеся в одной точке, делят пространство на восемь областей, то *три большие окружности, не пересекающиеся в одной точке, делят сферу на восемь областей* (на рис. 7 изображены восемь областей ABC, ABC', $AB'C$, $A'BC$,

$AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$, $A'B'C'$, на которые делят сферу большие окружности AB, AC и BC, причем точки A',B',C' диаметрально противоположны точкам A,B,C и, следовательно, области ABC и $A'B'C'$, ABC' и $A'B'C$, $AB'C$ и $A'BC'$, $A'BC$ и $AB'C'$ попарно диаметрально противоположны).

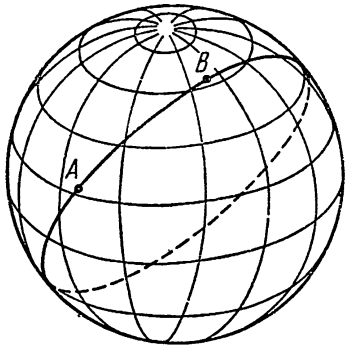


Рис. 4.

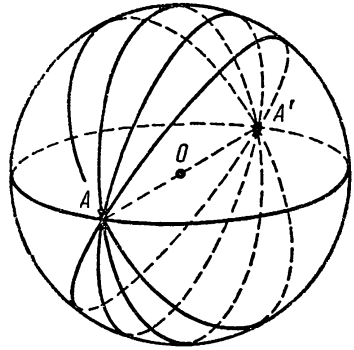


Рис. 5.

Если первые два из этих свойств аналогичны свойствам прямых на плоскости, которая делится на две области прямой и на четыре области двумя пересекающимися прямыми, то третье из указанных свойств не вполне аналогично соответствующему свойству прямых

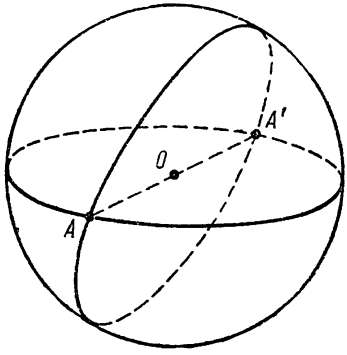


Рис. 6.

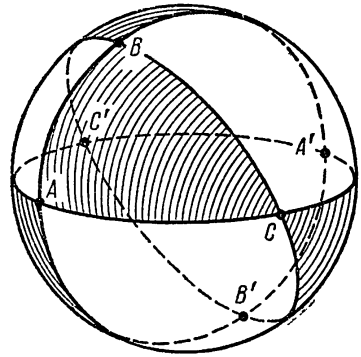


Рис. 7.

на плоскости, так как три попарно пересекающиеся прямые, не проходящие все три через одну точку, делят плоскость не на в о с е м ь, а на с е м ь частей (рис. 8).

Всякой большой окружности соответствуют две диаметрально противоположные точки сферы, высекаемые из нее диаметром, перпендикулярным к плоскости большой окружности (рис. 9). Эти две точки называются *полюсами* большой окружности (от греческого слова πόλος, в латинской форме polus — «ось», так как перпендикуляр,

восставленный к плоскости окружности в ее центре, называется *осью* окружности в пространстве); в частности, полюсами экватора Земли являются ее географические полюсы — Северный и Южный. Очевидно, что каждым двум диаметрально противоположным точкам A и B на сфере соответствует единственная большая окружность,

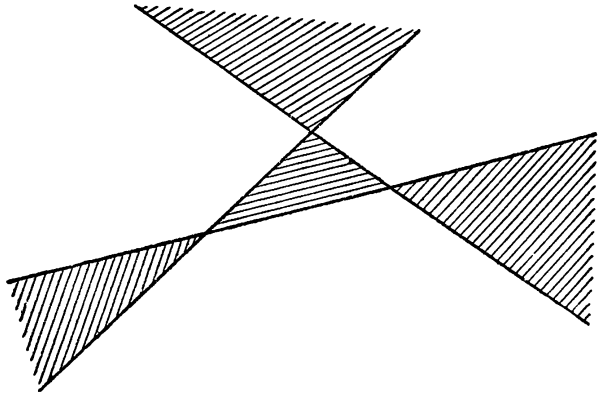


Рис. 8.

для которой точки A и B являются полюсами; эта большая окружность называется *полярой* пары диаметрально противоположных точек A, B (от латинского слова polaris, прилагательного к слову polus). Каждая точка поляры называется *полярно сопряженной* с каждым

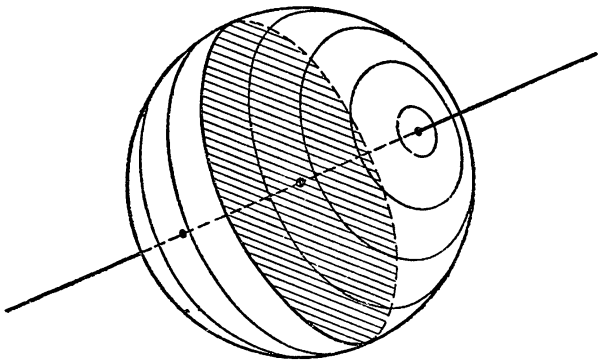


Рис. 9.

из ее полюсов; иначе говоря, точки P, Q сферы являются полярно сопряженными, если радиусы OP и OQ перпендикулярны (O — центр сферы).

1. 3. Движение сферы. *Движением* сферы называется такое преобразование [1]) сферы, при котором сохраняются расстояния между

[1]) Ср. статьи «Геометрические преобразования», стр. 60, и «Аксиомы и основные понятия геометрии», стр. 36—37.

точками. Иными словами, преобразование φ сферы является движением, если для любых точек A, B сферы расстояние между точками $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ равно расстоянию между точками A и B. Так как две точки A и B в том и только в том случае являются диаметрально противоположными, если расстояние между ними имеет наибольшее возможное значение, равное $2r$ (где r — радиус сферы), то из определения движения непосредственно следует, что *при любом*

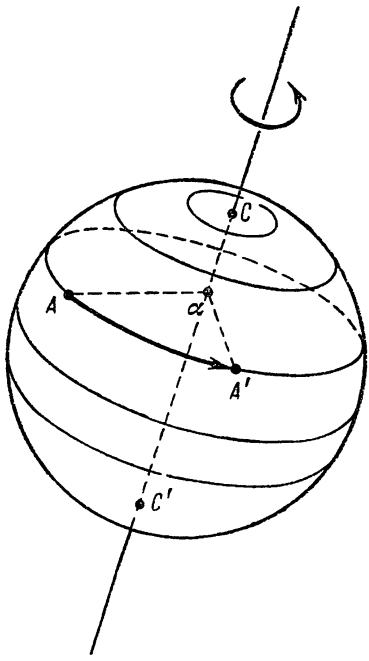


Рис. 10.

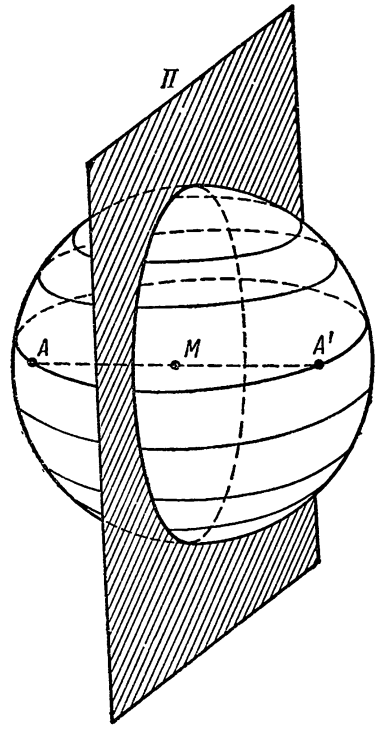


Рис. 11.

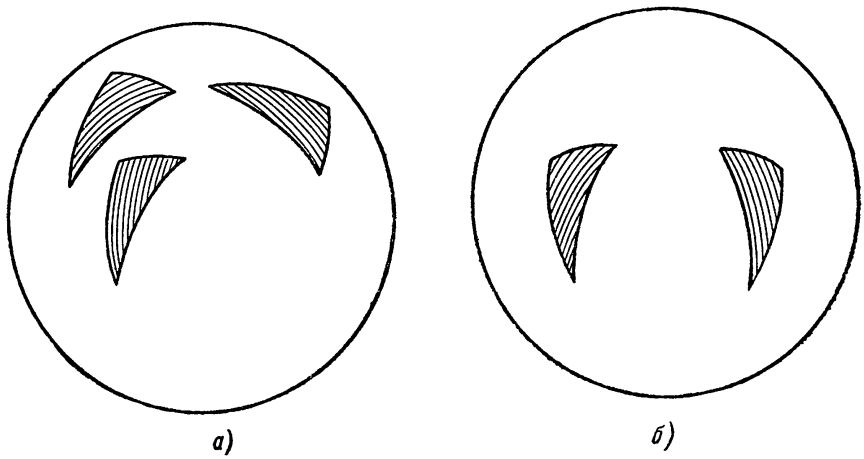
движении сферы диаметрально противоположные точки сферы переходят в диаметрально противоположные точки. Это свойство также не имеет аналога в плоской геометрии, так как на плоскости нет таких пар точек, что движение одной из этих точек вполне определяет движение второй. Поэтому, если движение плоскости является преобразованием множества точек этой плоскости, то движение сферы по существу является преобразованием множества пар диаметрально противоположных точек сферы.

В качестве примера движения сферы укажем *поворот* сферы вокруг некоторого ее диаметра CC' на угол α, при котором каждая окружность сферы, имеющая линию CC' своей осью, поворачивается по себе на угол α (рис. 10; разумеется, все окружности поворачиваются на угол α в одном и том же направлении). Другим примером

движения сферы является *симметрия* сферы относительно некоторой ее диаметральной плоскости П, при которой каждая точка A переходит в такую точку A', что плоскость П перпендикулярна отрезку AA' и проходит через его середину (рис. 11). Поворот и симметрия являются в некотором смысле основными движениями сферы; именно можно доказать, *что всякое (нетождественное) движение сферы либо является поворотом, либо является симметрией, либо представляет собой произведение поворота и симметрии* (ср. стр. 89).

1.4. Предмет сферической геометрии. Теперь мы можем более четко очертить содержание сферической геометрии: *сферическая геометрия изучает те свойства фигур на сфере, которые сохраняются при любых движениях сферы* (ср. стр. 99). Фигуры на сфере, которые могут быть переведены одна в другую некоторым движением сферы, называются *равными* фигурами, геометрические свойства равных фигур одинаковы.

Иногда предмет сферической геометрии определяется иначе. Именно, вместо движений, определенных выше, рассматриваются только *повороты* сферы и изучаются те свойства фигур, которые сохраняются при поворотах. Фигуры, переходящие друг в друга при некотором повороте, называют



а) *б)*

Рис. 12.

в этом случае *равными*. Фигуры же, которые переходят друг в друга при движении (в определенном выше смысле), но не могут быть совмещены поворотом, равными не считают; такие фигуры называют (при указанном подходе к сферической геометрии) *симметричными*. Так, на рис. 12, *а* изображены равные фигуры (сферические треугольники, см. ниже), а на рис. 12, *б* — симметричные фигуры.

Эти два подхода к сферической геометрии можно сопоставить с двумя аналогичными подходами к геометрии на плоскости. Именно совокупность всех движений плоскости можно понимать в смысле, указанном в статье «Аксиомы и основные понятия геометрии» (т. е. рассматривать все пово-

роты, параллельные переносы плоскости, а также симметрии относительно прямой и произведения симметрий и поворотов, симметрий и переносов, см. стр. 89). С другой стороны, допустимо также построение геометрии на плоскости, при котором допускаются лишь «движения 1-го рода»—повороты и параллельные переносы. При такой точке зрения равными считаются лишь фигуры, переходящие друг в друга при некотором повороте или переносе, т. е. фигуры, не только «равные» в обычном понимании

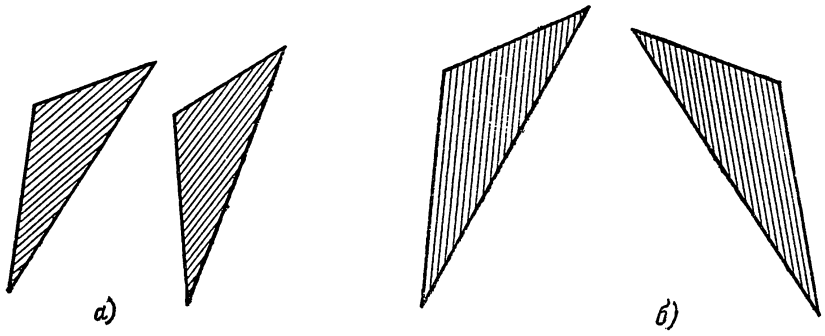


Рис. 13.

этого слова, но имеющие одинаковое направление обхода (по или против часовой стрелки). Фигуры же, «равные» в обычном смысле, но имеющие противоположные направления обхода, считают при таком подходе к плоской геометрии не равными, а лишь «симметричными». На рис. 13, *а* изображены равные треугольники, а на рис. 13, *б*—симметричные.

Если, следуя школьным определениям, понимать под «равными» фигурами такие, которые могут быть совмещены с помощью «наложения», то указанные выше два подхода к планиметрии будут отвечать двум различным пониманиям слова «наложение». С одной стороны, можно допускать в качестве «наложений» любые «механические» перемещения плоских фигур, не выводящие их из рассматриваемой плоскости. Если определить равенство фигур с помощью таких «наложений» (т. е. движений 1-го рода), то мы придем ко второму из указанных выше подходов к планиметрии; треугольники, изображенные на рис. 13, *б*, в этом случае равными не будут, так как никакое перемещение одного из этих треугольников, не выводящее его из плоскости чертежа, не может совместить его с другим треугольником. С другой стороны, можно допускать в качестве «наложений» и такие перемещения фигур, которые выводят их из рассматриваемой плоскости. Например, симметрия относительно прямой при таком подходе также становится «наложением», ибо ее можно осуществить перемещением в пространстве (вращением около оси, рис. 14). Такой подход приводит к обычному пониманию равенства фигур (треугольники, изображенные на рис. 13, *б*, в этом случае считаются равными).

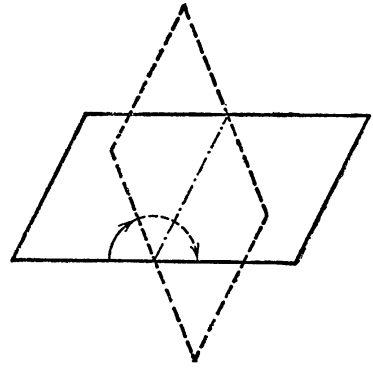


Рис. 14.

Таким образом, отличие между двумя указанными подходами к планиметрии заключается в том, что под движениями в одном случае понимаются «механические» перемещения фигур в самой рассматриваемой плоскости, а в другом случае — «механические» перемещения, совершаемые в объемлющем трехмерном пространстве. Следует заметить, что два указанных подхода к планиметрии приводят, строго говоря, к двум различным геометрическим системам. Именно в геометрии, основанной только на движениях 1-го рода, существуют понятия, не имеющие смысла в обычной планиметрии; сюда относятся: направление обхода фигуры, ориентированная площадь фигуры (площадь, взятая с тем или иным знаком в зависимости от направления обхода [1]), косое произведение двух векторов [2]) и др. Однако в школьном преподавании эти вопросы обычно оставляются в стороне, в связи с чем становится наиболее естественным рассмотрение всех движений, а не только движений 1-го рода.

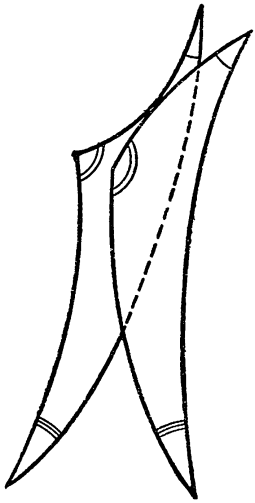


Рис. 15.

В случае геометрии на сфере различие между указанными двумя подходами кажется на первый взгляд еще более принципиальным, чем в случае планиметрии. Ведь никаким «механическим» перемещением (в трехмерном пространстве) одного из треугольников, изображенных на рис. 12, *б*, его нельзя наложить на второй из этих треугольников (если «вынуть» треугольник ABC из сферы и приложить его к треугольнику $A'B'C'$ «другой стороной», то треугольники не совместятся — мешает искривленность сферы, рис. 15). Однако это соображение не является принципиальным: если сферу считать расположенной в четырехмерном пространстве [3]), то симметричные фигуры (например, треугольники, изображенные на рис. 12, *б*) могут быть совмещены при помощи «механического» перемещения в этом четырехмерном пространстве (т. е. при помощи «движения 1-го рода» в четырехмерном пространстве).

1.5. Принцип двойственности. Мы видели, что любое движение сферы переводит пару диаметрально противоположных точек снова в пару диаметрально противоположных точек. Таким образом, *пара диаметрально противоположных точек является в сферической геометрии самостоятельным геометрическим объектом.* Отметим одно замечательное свойство этих пар точек: *всякой теореме сферической геометрии соответствует другая теорема этой геометрии, получающаяся из первой взаимной заменой слов:* «пара диаметрально противоположных точек» и «большая окружность», «лежит на» и «проходит через», «соединяются» и «пересекаются на» и т. д. Например:

всякие две большие окружности на сфере пересекаются в одной паре диаметрально противоположных точек,	всякие две пары диаметрально противоположных точек сферы соединяются одной большой окружностью.

[1]) См книгу: А. М. Лопшиц, Об измерении площадей ориентированных фигур, М., 1956.

[2]) См. статью «Векторы и их применения в геометрии», стр. 350.

[3]) См статью о многомерных пространствах в кн. V ЭЭМ.

Это свойство теорем сферической геометрии является следствием того, что всякой большой окружности на сфере взаимно однозначно соответствует пара ее полюсов, а всякой паре диаметрально противоположных точек сферы взаимно однозначно соответствует их поляра, причем если большая окружность проходит через пару диаметрально противоположных точек, то полюсы этой окружности лежат на поляре этой пары точек (рис. 16). Это свойство называется *принципом двойственности*, а теоремы, получающиеся друг из друга указанной заменой, называются *двойственными друг другу теоремами*. Если одна из двух двойственных теорем доказана, то доказательство второй теоремы может быть получено из доказательства первой теоремы переходом от каждой большой окружности к ее полюсам, а от каждой пары диаметрально противоположных точек — к ее поляре.

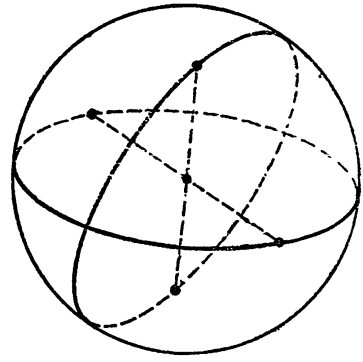


Рис. 16.

1.6. Углы на сфере. *Углом* между двумя пересекающимися линиями в пространстве называется угол между касательными к этим линиям в точке их пересечения. Частным случаем общего понятия угла между двумя линиями является угол между двумя большими окружностями на сфере. На рис. 17 изображен угол BAC между большими окружностями AB и AC на сфере и измеряющий этот угол XAY между касательными AX и AY к этим большим окружностям.

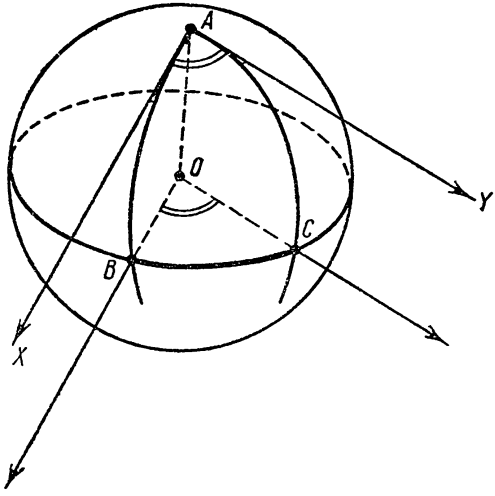


Рис. 17.

Если мы проведем большую окружность, являющуюся полярой вершины A угла на сфере и пересекающую стороны этого угла в точках B и C, то лучи OB и OC соответственно параллельны лучам AX и AY, касательным к сторонам угла (рис. 17). Поэтому длина дуги большой окружности BC равна произведению $\angle BAC$ на радиус сферы, т. е. *угол на сфере равен длине дуги большой окружности между точками сторон угла, полярно сопряженными с вершиной угла, деленной на радиус сферы.*

Так как оба угла BAC и $BA'C$, образованные двумя полуокружностями при их различных концах, равны одному и тому же углу BOC, то эти углы равны между собой и величина каждого из них называется *углом между двумя большими полуокружностями*. Две большие окружности определяют четыре угла между двумя полуокружностями, попарно равные друг другу. Те из этих углов, обе стороны которых являются продолжениями сторон другого угла, равны и называются *вертикальными углами* (рис. 18, *а*); те из этих углов, которые имеют одну общую сторону, составляют в сумме развернутый угол π и называются *смежными углами* (рис. 18, б).

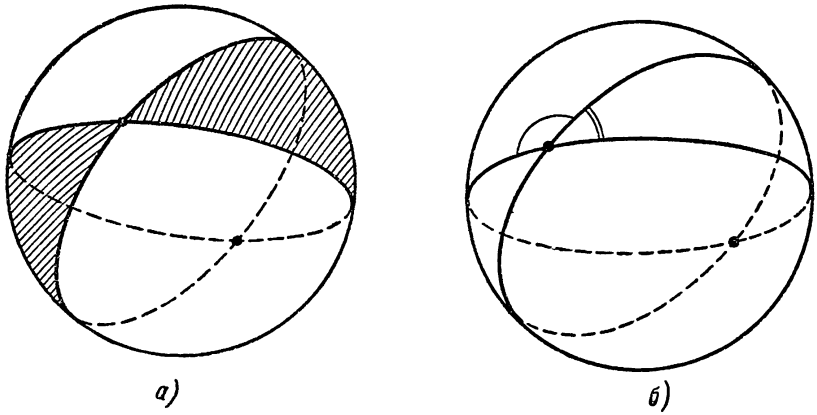


Рис. 18.

Так как полюсы D и E больших окружностей AB и AC' представляют собой точки большой окружности BC, полученные из точек B и C поворотом вокруг прямой AA' на прямой угол, то дуга BC равна дуге DE и угол BAC равен длине дуги DE, деленной на радиус сферы. Заменяя одну из точек D или E ее диаметрально противоположной точкой D' или E' (рис. 19), мы получим угол, смежный с углом BAC. Таким образом, *угол между двумя большими окружностями равен длине дуги, соединяющей их полюсы, деленной на радиус сферы.*

Так как при отражении от диаметральной плоскости полюсы большой окружности, высекаемой из сферы этой плоскостью, переходят друг в друга, то большие окружности, проходящие через эти полюсы, при указанном отражении переходят в себя (рис. 20). Поэтому углы, составляемые этими большими окружностями с большой окружностью, высекаемой плоскостью, равны углам, смежным с ними и, следовательно, являются прямыми углами. Таким образом, *большие окружности, одна из которых проходит через полюс другой, пересекаются под прямым углом.* Будем называть такие большие окружности *перпендикулярными.*

Обратно, отметив на одной из двух перпендикулярных больших окружностей точку, полярно сопряженную точке пересечения, мы получим такую точку, что проведенный в нее радиус сферы перпендикулярен диаметральной плоскости, высекающей из сферы вторую

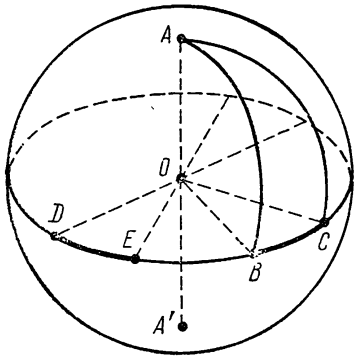


Рис. 19.

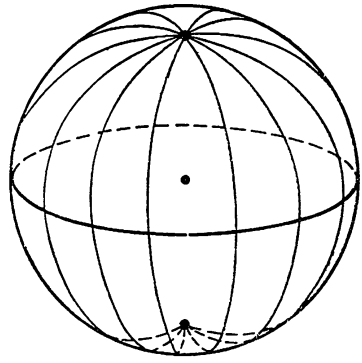


Рис. 20.

большую окружность (рис. 21), т. е. точку, являющуюся полюсом этой окружности. Поэтому *каждая из двух перпендикулярных больших окружностей проходит через полюс другой большой окружности.*

Отсюда следует, что большая окружность, являющаяся полярой точки пересечения двух больших окружностей, перпендикулярна

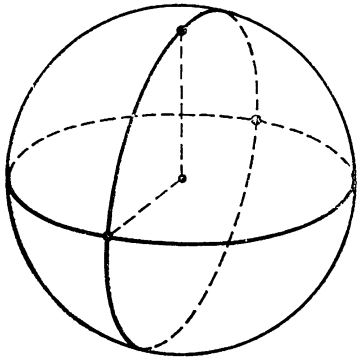


Рис. 21.

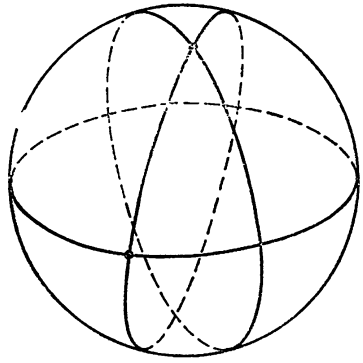


Рис. 22.

обеим большим окружностям, т. е. *две большие окружности всегда обладают единственной большой окружностью, перпендикулярной к ним обеим* (рис. 22). Для сравнения заметим, что на плоскости общими перпендикулярами обладают только параллельные прямые, причем две параллельные прямые обладают не одним, а бесконечным множеством общих перпендикуляров.

§ 2. Сферические треугольники

2.1. Треугольники и двуугольники на сфере. В § 1 мы видели, что три большие окружности на сфере, не пересекающиеся в одной точке, делят сферу на восемь областей. Каждая из этих областей, ограниченная дугами трех больших окружностей, называется *сферическим треугольником* (рис. 23). Дуги больших окружностей, ограничивающие сферический треугольник, называются его *сторонами,* концы этих дуг называются его *вершинами*, а углы, образуемые сторонами сферического треугольника в его вершинах, называются *углами* сферического треугольника. Ясно, что каждая сторона сферического треугольника меньше половины большой окружности.

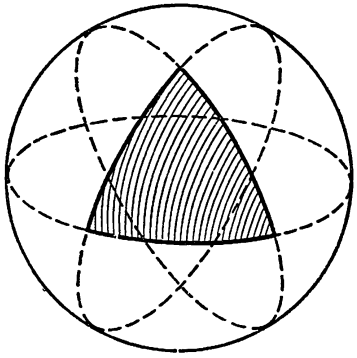


Рис. 23.

В отличие от плоскости, где треугольник является многоугольником с наименьшим числом сторон, на сфере имеются многоугольники с числом сторон меньше трех — *двуугольники*. Двуугольником является часть сферы, ограниченная двумя половинами больших окружностей с общими концами; эти общие концы, называемые *вершинами* двуугольника, являются диаметрально противоположными точками сферы. На рис. 24 изображен двуугольник с вершинами A и A'.

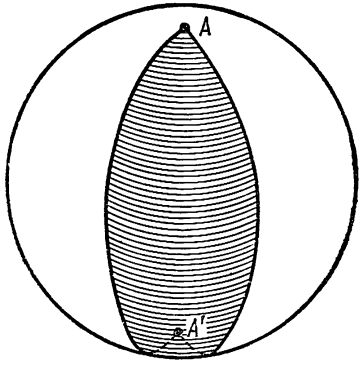


Рис. 24.

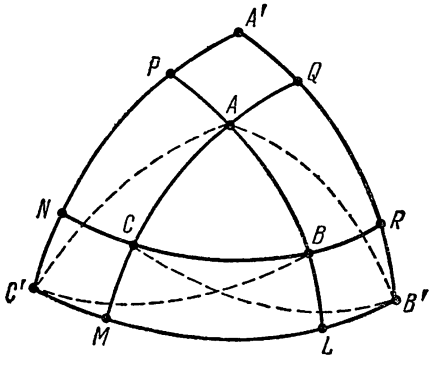


Рис. 25.

2.2. Полярные треугольники. Всякому сферическому треугольнику ABC можно поставить в соответствие другой сферический треугольник $A'B'C'$, вершины которого являются полюсами сторон BC, CA, AB сферического треугольника ABC, лежащими от этих сторон по ту же сторону, что и соответственно вершины A, B, C (рис. 25).

Будем называть сферический треугольник $A'B'C'$ *полярным* по отношению к сферическому треугольнику ABC.

Если сферический треугольник $A'B'C'$ является полярным по отношению к сферическому треугольнику ABC, то и сферический треугольник ABC полярен по отношению к сферическому треугольнику $A'B'C'$. В самом деле, так как точка B' является полюсом стороны AC, то точка B' полярно сопряжена с точками A и C (рис. 25). Так как точка C' является полюсом стороны AB, то точка C' полярно сопряжена с точками A и B. Но так как точка A полярно сопряжена с точками B' и C' стороны $B'C'$, то она является полюсом стороны $B'C'$. При этом, так как точки A и A' лежат по одну сторону от стороны BC, то они лежат и по одну сторону от стороны $B'C'$. Так же доказывается, что точки B и C тоже являются полюсами сторон $C'A'$ и $A'B'$ и лежат по ту же сторону от этих сторон, что и точки B' и C', т. е. сферический треугольник ABC полярен по отношению к сферическому треугольнику $A'B'C'$.

Обозначим точки пересечения больших окружностей AB и AC со стороной $B'C'$ через L и M, точки пересечения больших окружностей BC и BA со стороной $A'C'$ через N и P и точки пересечения больших окружностей CA и CB со стороной $A'B'$ через Q и R (рис. 25). Тогда, если величины углов CAB, ABC и BCA обозначить через A, B и C, а радиус сферы — через r, то дуги больших окружностей LM, NP и QR соответственно равны Ar, Br, Cr. Далее, так как дуги $B'M$, LC', $C'P$, NA', $A'R$, QB' соединяют полярно сопряженные точки, то они равны $\frac{\pi}{2}r$. Поэтому, если все три угла $A,B,C \leqslant \frac{\pi}{2}$, то дуги $B'L$ и MC', $C'N$ и PA', $A'Q$ и RB', дополняющие дуги Ar, Br, Cr до $\frac{\pi}{2}r$, соответственно равны $\left(\frac{\pi}{2}-A\right)r$, $\left(\frac{\pi}{2}-B\right)r$, $\left(\frac{\pi}{2}-C\right)r$. Таким образом, стороны $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ полярного треугольника в этом случае равны $(\pi-A)r$, $(\pi-B)r$, $(\pi-C)r$. Тот же результат совершенно аналогично доказывается и для случаев, когда углы A,B или C больше $\frac{\pi}{2}$. Поэтому *стороны треугольника, полярного по отношению к сферическому треугольнику ABC, соответственно равны* $(\pi-A)r$, $(\pi-B)r$, $(\pi-C)r$. Отсюда, если мы обозначим эти стороны через a', b', c', мы получим, что $A=\pi-\frac{a'}{r}$, $B=\pi-\frac{b'}{r}$, $C=\pi-\frac{c'}{r}$, т. е. *углы треугольника, полярного по отношению к сферическому треугольнику со сторонами a', b', c', соответственно равны* $\pi-\frac{a'}{r}$, $\pi-\frac{b'}{r}$, $\pi-\frac{c'}{r}$.

Сферический треугольник, совпадающий со своим полярным треугольником, называется *автополярным треугольником* (от греческого

αὐτός — «сам» и слова «полярный»). Так как все вершины автополярного треугольника полярно сопряжены, все стороны этого сферического треугольника равны четверти большой окружности, откуда вытекает, что все три угла этого сферического треугольника прямые. На рис. 26 изображен автополярный треугольник ABC.

2.3. Равенство сферических треугольников. Согласно сказанному выше два сферических треугольника называются *равными*, если их можно совместить друг с другом движением сферы. Очевидно, что между вершинами двух равных сферических треугольников можно установить такое соответствие, при котором и соответственные стороны, и соответственные углы этих сферических треугольников равны: для этого надо поставить в соответствие каждой вершине первого сферического треугольника ту вершину второго сферического треугольника, в которую он переходит при совмещении этих сферических треугольников.

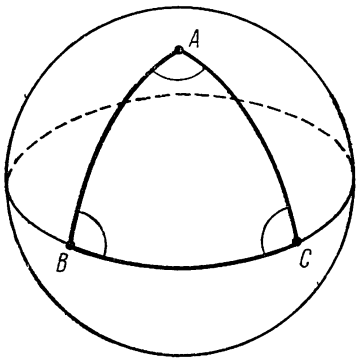


Рис. 26.

Равенство сферических треугольников, так же как равенство плоских треугольников, определяется равенством трех элементов этих треугольников. Имеются шесть признаков равенства сферических треугольников: *два сферических треугольника равны, если*:

I) *две стороны одного сферического треугольника равны двум соответственным сторонам другого сферического треугольника и равны углы между этими сторонами*;

II) *два угла одного сферического треугольника равны двум соответственным углам другого сферического треугольника и равны стороны между этими углами*;

III) *все три стороны одного сферического треугольника равны соответственным сторонам другого сферического треугольника*;

IV) *две стороны одного сферического треугольника равны двум соответственным сторонам другого сферического треугольника, углы, лежащие против двух равных сторон, равны, а углы, лежащие против двух других равных сторон, одновременно острые или тупые*;

V) *два угла одного сферического треугольника равны двум соответственным углам другого сферического треугольника, стороны, лежащие против двух равных углов, равны, а стороны, лежащие против двух других равных углов, одновременно меньше или больше* $\frac{\pi}{2} r$;

VI) *все три угла одного сферического треугольника равны соответственным углам другого сферического треугольника.*

Первые четыре из этих признаков равенства аналогичны признакам равенства плоских треугольников и доказываются совершенно так же, как аналогичные признаки равенства в плоской геометрии. Далее, V признак равенства сферических треугольников также имеет аналог в плоской геометрии с той только разницей, что в V признаке равенства плоских треугольников нет условия, аналогичного условию, сформулированному в конце V признака равенства сферических треугольников. Доказательство этого признака в плоской геометрии тривиально: из того, что два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, вытекает, что и третьи углы треугольников равны между собой. В случае сферических треугольников такое доказательство неприменимо, так как здесь сумма трех углов треугольника не является, как мы увидим ниже, постоянной величиной (т. е. эта сумма неодинакова для различных треугольников). Наконец, VI признак равенства сферических треугольников совсем не имеет аналога в плоской геометрии, где равенство соответственных углов двух треугольников является признаком не равенства, а подобия треугольников.

Как же доказываются V и VI признаки равенства сферических треугольников? Сравнивая I признак равенства со II, III с VI, а IV с V, мы видим, что если для двух сферических треугольников выполнен один признак каждой пары, для полярных по отношению к ним треугольников выполнен второй признак той же пары. Поэтому, так как из равенства двух сферических треугольников, очевидно, вытекает равенство полярных по отношению к ним треугольников, то из справедливости одного из признаков каждой пары вытекает справедливость второго из признаков той же пары. В частности, справедливость VI признака, не имеющего аналога на плоскости, вытекает из справедливости III признака, а справедливость V признака — из справедливости IV признака.

Условия, указанные в конце IV и V признаков равенства сферических треугольников, являются существенными. Мы покажем это сейчас на двух простых примерах.

Пример неравных сферических треугольников, в которых имеют место равенства двух пар соответственных сторон и углов, лежащих против двух равных сторон (ср. IV признак), изображен на рис. 27. Для построения таких сферических треугольников следует взять равнобедренный сферический треугольник ABC с основанием BC и соединить дугой большой окружности его вершину A с точкой D основания, не являющейся его серединой. Тогда сферические треугольники ABD и ACD имеют общую сторону AD, равные стороны AB и AC и равные углы B и C, но их стороны BD и DC не равны по построению.

Пример неравных сферических треугольников, в которых имеют место равенства двух пар соответственных углов и сторон, лежащих против двух равных углов, изображен на рис. 28 (ср. V признак). Для построения таких сферических треугольников следует построить

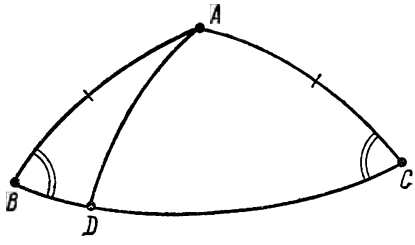


Рис. 27.

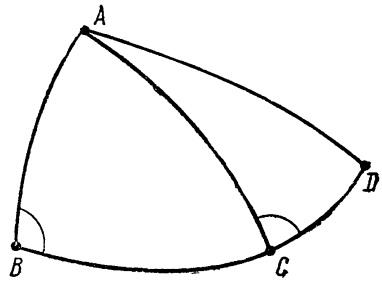


Рис. 28.

сферический треугольник ABC, у которого углы ABC и ACB дополняют друг друга до угла π. Далее на продолжении стороны BC следует взять произвольную точку D и соединить ее дугой большой окружности с точкой A. Сферические треугольники ABD и ACD имеют общий угол D, равные углы ABD и ACD и общую сторону AD, но их стороны BD и CD не равны по построению.

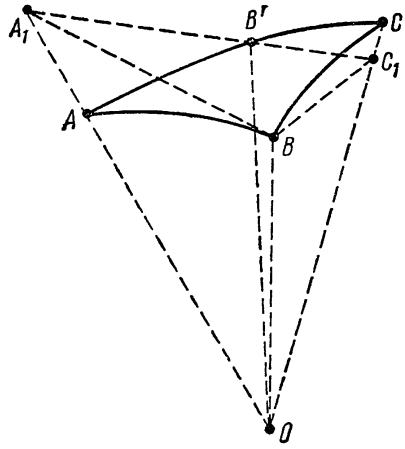


Рис. 29.

2.4. Большая окружность как кратчайшая. *Во всяком сферическом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон и больше их разности.* В самом деле пусть ABC — произвольный сферический треугольник. Допустим, что из двух сторон AB, AC сторона AC бóльшая. Отложим на стороне AC дугу AB', равную дуге AB (рис. 29). Проведем какую-нибудь плоскость, проходящую через точки B, B' и пересекающую лучи OA и OC (а не их продолжения !) в точках A_1 и C_1. Треугольники OA_1B и OA_1B' равны (так как они имеют общую сторону OA_1, равные стороны OB и OB' и равные углы при вершине O). Следовательно, $A_1B=A_1B'$. Так как точки A_1, B' и C_1 лежат на одной прямой (являющейся линией пересечения плоскостей OAC и A_1BC_1), причем точка B' лежит между A_1 и C_1, то

$$B'C_1 = A_1C_1 - A_1B' = A_1C_1 - A_1B < BC_1.$$

Рассмотрим теперь треугольники OBC_1 и $OB'C_1$. В этих треугольниках OC_1 — общая сторона и $OB = OB'$, а третьи стороны связаны неравенством $B'C_1 < BC_1$. Следовательно, углы, лежащие в этих треугольниках против неравных сторон, связаны неравенством $\angle B'OC_1 < \angle BOC_1$. Поэтому дуга $\overset{\frown}{B'C}$, стягиваемая углом $B'OC$, также меньше дуги $\overset{\frown}{BC_1}$, стягиваемой углом BOC_1. Иначе говоря,

$$\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{B'C} < \overset{\frown}{BC},$$

т. е. каждая сторона сферического треугольника больше разности двух других его сторон. Отсюда, в свою очередь, вытекает (после прибавления слагаемого $\overset{\frown}{AB}$ к обеим частям полученного неравенства), что

$$\overset{\frown}{AC} < \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC},$$

т. е. каждая сторона сферического треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Из доказанной теоремы, так же как в плоской геометрии, следует, что *во всяком сферическом треугольнике против большего угла лежит большая сторона, а против большей стороны лежит больший угол.*

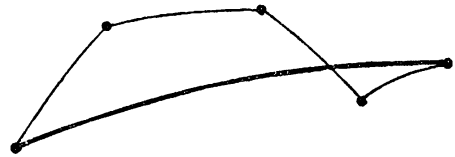


Рис. 30.

Далее, из того, что в сферическом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон, следует, что *дуга большой окружности, меньшая полуокружности, короче всякой линии, состоящей из дуг нескольких больших окружностей, соединяющей те же точки сферы* (рис. 30); это доказывается в точности так же, как теорема о том, что прямолинейный отрезок на плоскости короче всякой ломаной, соединяющей те же точки [1]). Так как длину всякой [2]) непрерывной линии на сфере можно со сколь угодно малой

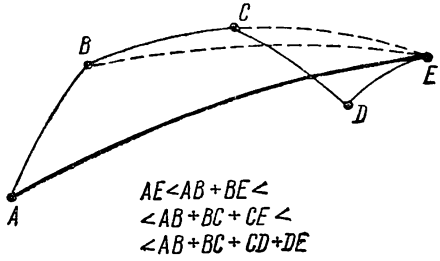


Рис. 31.

[1]) Тот факт, что рассматривается дуга, меньшая полуокружности, является существенным, так как доказательство приведенного утверждения (рис. 31) основывается на рассмотрении цепочки сферических треугольников, а в любом сферическом треугольнике каждая сторона меньше полуокружности. Совершенно ясно, что дуга большой окружности, бóльшая полуокружности, не является кратчайшей.

[2]) Разумеется, речь идет о «спрямляемых» линиях на сфере (ср. статью о длине кривой и площади поверхности в кн. V ЭЭМ).

ошибкой заменить длиной линии, состоящей из дуг больших окружностей, соединяющих точки данной линии, то *дуга большой окружности, меньшая полуокружности, короче всякой непрерывной линии на сфере, соединяющей те же точки сферы*, т. е. эта дуга большей окружности является кратчайшей линией на сфере. В этом отношении большая окружность является аналогом прямой линии на плоскости. Отсюда видно, что та линия на земной поверхности (предполагаемой сферической), которая получается на ней путем провешивания и которую в малых участках принимают за прямую линию, при достаточном продолжении представляет собой дугу большой окружности. Так как эти линии проводятся на земной поверхности геодезистами, то большие окружности называются также *геодезическими линиями* на сфере.

Так как кратчайшей линией, соединяющей две точки сферы, является дуга большой окружности (не превосходящая полуокружности), то длину этой дуги называют *сферическим расстоянием* между двумя точками сферы.

В отличие от плоскости, где невозможны треугольники с двумя прямыми углами, на сфере возможны такие треугольники: это треугольники, у которых одна из вершин является полюсом противоположной стороны; стороны этих треугольников, лежащие против прямых углов, равны $\frac{\pi}{2}r$. Имеются на сфере и треугольники с тремя прямыми углами: это знакомые нам автополярные треугольники (рис. 26); у автополярных треугольников все три стороны равны $\frac{\pi}{2}r$. В том случае, когда сферический треугольник обладает только одним прямым углом, сторона, лежащая против этого угла, так же как в случае плоских прямоугольных треугольников, называется гипотенузой, а остальные две стороны — катетами.

2.5. Площадь сферического треугольника. Будем называть *площадью сферической фигуры*, по аналогии с площадью плоской фигуры, действительное число, удовлетворяющее следующим четырем требованиям [1]):

1) *площадь сферической фигуры является положительным числом*, (свойство позитивности; здесь предполагается, что сферическая фигура содержит сферический треугольник),

2) *площадь сферической фигуры не изменяется при движении сферы* (свойство инвариантности),

3) *если сферическая фигура разложена на две сферические фигуры, то площадь данной фигуры равна сумме площадей двух фигур, на которые она разложена* (свойство аддитивности),

4) *площадь всей сферы радиуса r равна $4\pi r^2$* (свойство нормировки).

[1]) Ср. со статьей о площадях и объемах в кн. V ЭЭМ.

Прежде всего найдем *площадь двуугольника*. Из свойства аддитивности, инвариантности и нормировки следует, что если разделить сферу на n равных двуугольников (рис. 32), то площадь каждого из них $\left(\text{т. е. площадь двуугольника с углом } \frac{2\pi}{n}\right)$ равна $\frac{1}{n}\cdot 4\pi r^2$. Поэтому площадь двуугольника с углом $\frac{2\pi m}{n}$, составленного из m рассмотренных двуугольников, равна $\frac{m}{n}\cdot 4\pi r^2$, а если угол некоторого двуугольника больше $\frac{2\pi m}{n}$ и меньше $\frac{2\pi(m+1)}{n}$, то площадь этого двуугольника заключена между $\frac{m}{n}4\pi r^2$ и $\frac{m+1}{n}4\pi r^2$ (это

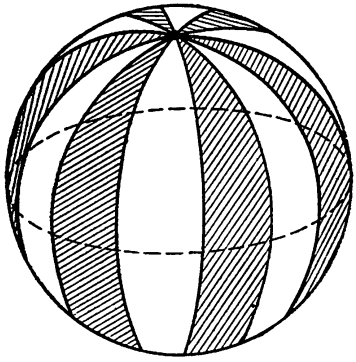


Рис. 32.

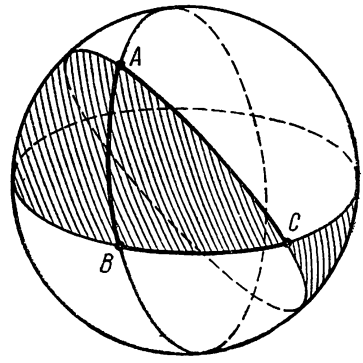


Рис. 33.

вытекает из первого и третьего свойств площади). Неограниченно увеличивая число n, мы можем с помощью предельного перехода найти площадь любого двуугольника: *площадь двуугольника, углы при вершинах которого* равны α, *равна*

$$S(\alpha)=\frac{\alpha}{2\pi}4\pi r^2=2r^2\alpha,$$

т. е.

$$S(\alpha)=2r^2\cdot\alpha. \tag{1}$$

Если нам дан *сферический треугольник* ABC, то пара больших окружностей, проходящих через две его стороны, определяет два двуугольника, углы которых равны углу сферического треугольника между этими сторонами (рис. 33). Всего таким образом получается шесть двуугольников, два с углом A, два — с углом B и два — с углом C. Треугольник ABC и диаметрально противоположный ему треугольник $A'B'C'$ (равный треугольнику ABC), входят в три двуугольника, остальные точки сферы (не лежащие на сторонах двуугольников) входят только в один двуугольник. Поэтому

сумма площадей шести двуугольников равна сумме площади S всей сферы и учетверенной площади $S(\Delta)$ треугольника ABC, т. е.

$$2S(A)+2S(B)+2S(C)=S+4S(\Delta).$$

Так как

$$S(A)=2r^2A,\quad S(B)=2r^2B,\quad S(C)=2r^2C,$$

то мы получаем

$$4r^2(A+B+C)=4\pi r^2+4S(\Delta),$$

т. е.

$$S(\Delta)=r^2(A+B+C-\pi). \tag{2}$$

Так как величины $S(\Delta)$ и r^2 положительны, то величина $A+B+C-\pi$ также положительна, откуда следует, что

$$A+B+C>\pi,$$

т. е. *сумма углов сферического треугольника больше развернутого угла*. Величина $A+B+C-\pi$ называется *угловым избытком* сферического треугольника.

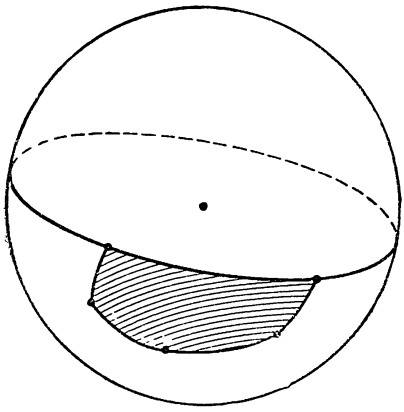


Рис. 34.

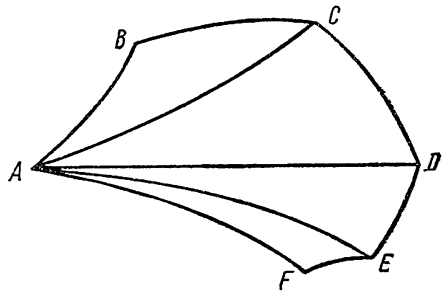


Рис. 35.

Таким образом, *площадь сферического треугольника равна произведению его углового избытка на квадрат радиуса сферы.*

Заменяя в последнем неравенстве углы A, B и C равными им выражениями $\pi-\frac{a'}{r}$, $\pi-\frac{b'}{r}$, $\pi-\frac{c'}{r}$ где, a', b', c'—стороны полярного треугольника, мы получим неравенство

$$a'+b'+c'<2\pi r,$$

показывающее, что *сумма сторон сферического треугольника меньше длины большой окружности.*

Будем называть *сферическим многоугольником* часть сферы, ограниченную замкнутой линией (не пересекающей самое себя), состоящей из дуг больших окружностей. Дуги больших окружностей, ограничивающие сферический многоугольник, называются его *сторонами*, концы этих дуг

называются его *вершинами*, а углы, образуемые сторонами сферического многоугольника в его вершинах, называются *углами* сферического многоугольника.

Сферический многоугольник называется *выпуклым*, если он находится по одну сторону от каждой большой окружности, проходящей через сторону многоугольника (рис. 34). Соединяя одну из вершин выпуклого сферического n-угольника дугами больших окружностей со всеми другими вершинами этого многоугольника, мы разделим его на $n-2$ сферических треугольника (рис. 35). Площадь выпуклого сферического n-угольника, очевидно, равна сумме площадей этих $n-2$ сферических треугольников. Поэтому, так как сумма углов всех $n-2$ сферических треугольников равна сумме Σ_n углов сферического n-угольника, *площадь S_n выпуклого сферического n-угольника равна*

$$S_n = r^2[\Sigma_n - (n-2)\pi], \tag{3}$$

где Σ_n — сумма всех его внутренних углов.

Эта теорема остается справедливой и для невыпуклых сферических многоугольников [1]).

§ 3. Малые окружности

3.1. Окружности и углы на сфере. Как мы видели в § 1, сечение сферы плоскостью, не проходящей через ее центр, является *малой окружностью*. Так как всякие три точки сферы определяют единственную плоскость, то *через всякие три точки сферы, не лежащие на большой окружности, можно провести единственную малую окружность* (рис. 36).

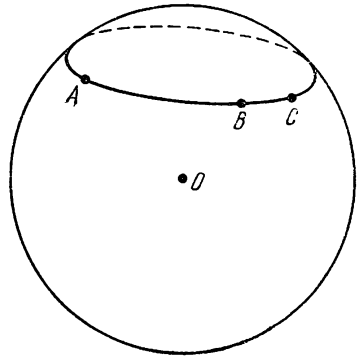


Рис. 36.

Так как плоскость делит пространство на две области, то *малая окружность делит сферу на две области, называющиеся сферическими сегментами.* Та из этих областей, которая не выходит за пределы полусферы, называется *сферическим кругом.*

Так как при повороте вокруг диаметра сферы, перпендикулярного к плоскости, высекающей из сферы малую окружность, эта окружность переходит в себя (ибо этот перпендикуляр является осью рассматриваемой окружности), то сферическое расстояние точек окружности от концов перпендикулярного ей диаметра сферы, постоянно. Обратно, геометрическое место точек сферы, равноотстоящих от одной ее точки, переходит в себя при повороте вокруг диаметра, проходящего через эту точку, т. е. является малой окружностью (высекаемой из сферы плоскостью, перпендикулярной этому диаметру). Таким образом, *малая окружность является геометрическим*

[1]) См. например, книгу Д. И. Перепелкина [2], указанную в конце статьи.

местом точек сферы, равноотстоящих от одной точки сферы; эти точки равноотстоят и от диаметрально противоположной ей точки. Та из этих точек, для которой сферическое расстояние ее от точек малой окружности меньше $\frac{\pi}{2}r$, называется *сферическим центром* малой окружности, а сферическое расстояние точек малой окружности до ее сферического центра называется *сферическим радиусом* малой окружности. Очевидно, что сферический центр малой окружности принадлежит ограничивающему его сферическому кругу. Полюсы больших окружностей можно также рассматривать как сферические центры этих окружностей; сферическим радиусом большой окружности следует считать число $\frac{\pi}{2}r$.

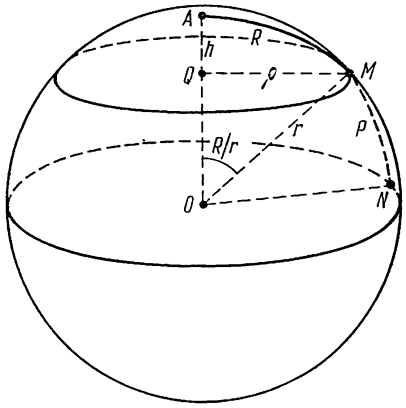


Рис. 37.

Так как большие окружности, проходящие через центр малой окружности, перпендикулярны поляре центра малой окружности, то расстояние от точек малой окружности до этой большой окружности (измеряемое по «сферическому перпендикуляру») равно дополнению сферического радиуса окружности до $\frac{\pi}{2}r$. Обратно, геометрическое место точек сферы, равноотстоящих от одной ее большой окружности и расположенных по одну сторону от нее, является геометрическим местом точек, равноотстоящих от одного ее полюса, т. е. является малой окружностью. Таким образом, *малая окружность является геометрическим местом точек сферы, равноотстоящих от одной большой окружности и расположенных по одну сторону от нее*. Эта большая окружность называется *базой* малой окружности, а расстояние точек малой окружности до базы называется *параметром* малой окружности. Очевидно, что сферический радиус R и параметр P малой окружности составляют в сумме $\frac{\pi}{2}r$. На рис. 37 изображены центр и база малой окружности.

Пусть центр малой окружности в ее плоскости — точка Q, радиус ее — число ϱ, а M — произвольная точка этой окружности (рис. 37), т. е. $OM=r$, $QM=\varrho$, а $\angle MOQ=\frac{R}{r}$. Тогда из прямоугольного треугольника OQM мы найдем, что $\varrho=r\sin\frac{R}{r}$, т. е. *длина окружности сферического радиуса R равна*

$$C=2\pi r\sin\frac{R}{r}. \qquad (4)$$

С другой стороны, так как $\sin\frac{R}{r}=\cos\frac{P}{r}$, то *длина окружности параметра P равна*

$$C=2\pi r\cos\frac{P}{r}. \tag{5}$$

Так как сферический круг, ограничиваемый окружностью сферического радиуса R, представляет собой сферический сегмент высоты $h=r\left(1-\cos\frac{R}{r}\right)=2r\sin\frac{R}{2r}$, а площадь всякого сферического слоя (в частности, сферического сегмента) высоты h равна $2\pi rh$, где r — радиус сферы, то *площадь сферического круга радиуса R равна*

$$S=4\pi r^2\sin^2\frac{R}{2r}. \tag{6}$$

3.2. Геодезическая кривизна малой окружности. Подобно тому как окружности на плоскости характеризуются *кривизной* — величиной, обратной радиусу, которую можно рассматривать как меру отклонения окружности от прямой, на сфере окружности также можно характеризовать некоторым числом, равным нулю для больших окружностей и характеризующим для малых окружностей степень отклонения этой окружности от большой окружности. Так как большие окружности называют геодезическими линиями, то это число, которое мы сейчас определим, называют *геодезической кривизной* малой окружности. Для определения геодезической кривизны будем рассматривать векторы, расположенные в плоскостях и касающиеся сферы в точках данной окружности, причем начало векторов будем считать совпадающим с точкой касания (рис. 38). Для этих векторов следующим образом можно определить *параллельный перенос* вдоль окружности. Касательные плоскости к сфере в точках окружности являются в то же время касательными плоскостями к прямому круговому конусу в случае малой окружности (рис. 39) и к прямому круговому цилиндру в случае большой окружности (рис. 40). Если мы развернем построенный таким образом конус или цилиндр на плоскость то наша окружность развернется на плоскость в виде окружности или прямой. Данный вектор при нашем развертывании совпадет с некоторым вектором на плоскости. Перенесем теперь этот вектор на плоскости параллельно в какую-нибудь другую точку окружности или прямой, полученной нами при развертывании. Вектор, полученный в результате этого переноса, перейдет при обратном накладывании конуса или цилиндра на сферу в некоторый вектор в касательной плоскости к сфере в соответственной точке окружности. Этот последний вектор мы будем называть *вектором, полученным из первоначального вектора с помощью параллельного переноса вдоль окружности*. На рис 39 изображен параллельный перенос вектора вдоль малой окружности.

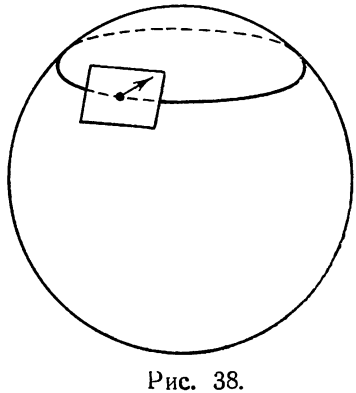


Рис. 38.

Рассмотрим теперь такой параллельный перенос, при котором переносимый вектор, обойдя всю окружность, возвращается в исходную точку. В случае большой окружности, которая при развертывании цилиндра на

плоскость переходит в прямую линию, в результате такого параллельного переноса вектор после возвращения совпадает со своим первоначальным положением (рис. 40). В случае же малой окружности, которая при развертывании конуса на плоскость переходит в окружность, в результате такого параллельного переноса вектор после возвращения уже не совпадает со своим первоначальным положением, а поворачивается на некоторый угол (рис. 41).

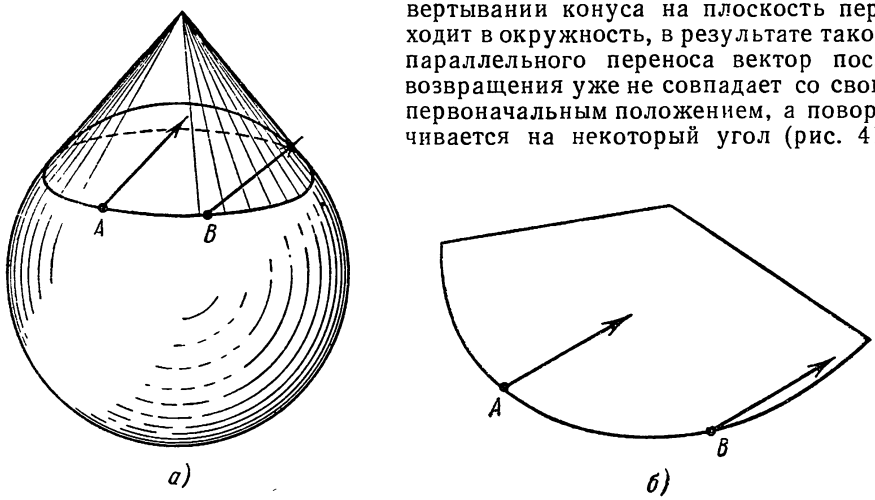


Рис. 39.

Нетрудно видеть, что этот угол будет одним и тем же для любых переносимых векторов. Будем называть *геодезической кривизной* окружности на сфере отношение определенного таким образом угла к длине этой окружности.

Так как в случае большой окружности вектор при переносе совпадает со своим первоначальным положением, то *геодезическая кривизна большой окружности равна нулю.*

В случае малой окружности вектор при переносе поворачивается на угол, равный углу при вершине сектора, в виде которого конус разворачивается на плоскость (рис. 41). Этот угол равен отношению

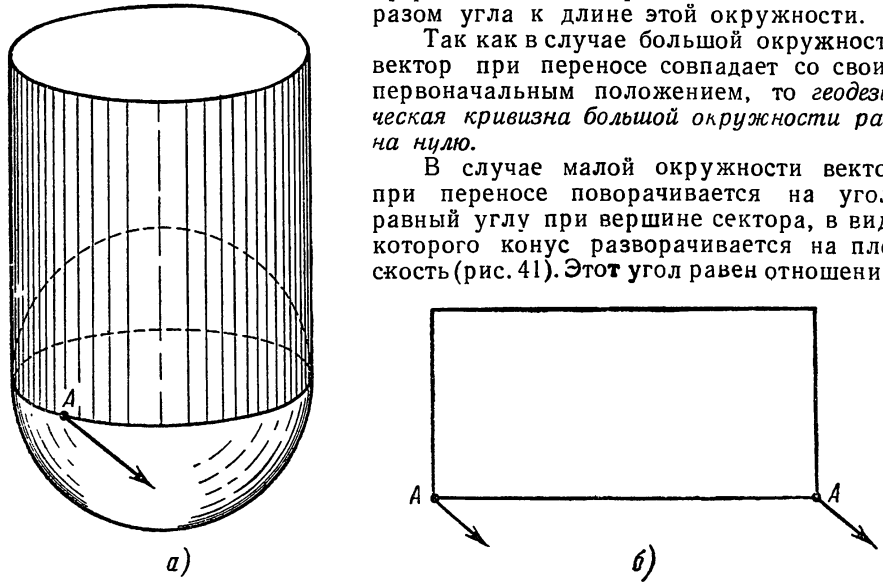


Рис. 40.

длины дуги этого сектора (равной длине окружности основания конуса) к радиусу сектора, равному длине прямолинейной образующей конуса. Так как окружность основания конуса совпадает с данной окружностью, то ее

длина равна $C=2\pi r\sin\frac{R}{r}$. Прямолинейная образующая l конуса является катетом прямоугольного треугольника, второй катет которого равен радиусу r сферы, а противолежащий угол равен отношению $\frac{R}{r}$; отсюда

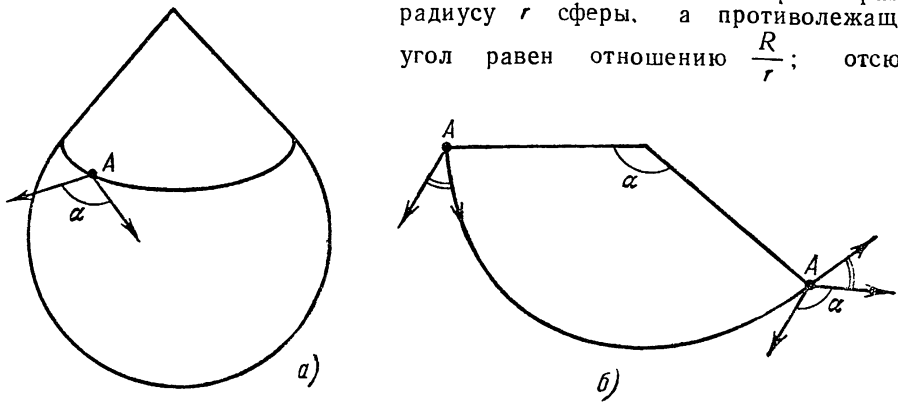


Рис. 41.

видно, что $l=r\operatorname{tg}\frac{R}{r}$. Поэтому угол Δ поворота вектора при параллельном переносе вдоль малой окружности радиуса R равен

$$\Delta=\frac{c}{l}=2\pi\cos\frac{R}{r}, \tag{7}$$

а *геодезическая кривизна малой окружности радиуса R равна*

$$k=\frac{\Delta}{c}=\frac{1}{r}\operatorname{ctg}\frac{R}{r}. \tag{8}$$

Заметим, что в пределе, когда радиус R малой окружности стремится к радиусу $\frac{\pi}{2}r$ большой окружности, геодезическая кривизна k стремится к нулю.

3.3. Формула Гаусса — Бонне. Параллельный перенос вектора можно применить к определению площади сферической фигуры, ограниченной дугами окружностей. Прежде всего рассмотрим параллельный перенос вектора вдоль контура сферического многоугольника. Так как стороны сферического многоугольника являются дугами больших окружностей, то при переносе вектора вдоль стороны сферического многоугольника, он не изменяет угла, составляемого им с касательными векторами к этой стороне. Этот угол изменяется только при переходе через вершину многоугольника. Действительно, если угол в некоторой вершине многоугольника равен α, то угол между касательными векторами к сторонам этого многоугольника, соответствующими определенному направлению обхода многоугольника, равен $\pi-\alpha$ (рис. 42). Следовательно, угол переносимого вектора с касательным вектором к стороне многоугольника при переходе через эту вершину изменяется на то же число $\pi-\alpha$ (рис 43).

Поэтому при переносе вектора вдоль всего контура сферического n-угольника вектор поворачивается после возвращения в исходную точку на угол

$$\Delta_n=n\pi-\Sigma_n. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь перенос вектора вдоль контура выпуклого сферического многоугольника. Так как площадь S_n выпуклого сферического n-угольника связана с суммой Σ_n его внутренних углов соотношением (3), или, иначе, соотношением

$$S_n = r^2 [2\pi - (n\pi - \Sigma_n)],$$

то мы получаем, что угол Δ_n и площадь S_n связаны соотношением

$$S_n = r^2 (2\pi - \Delta_n). \qquad (10)$$

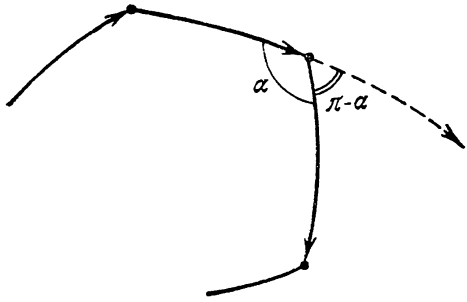


Рис. 42.

Рассмотрим теперь какую-либо выпуклую сферическую фигуру, ограниченную дугами окружностей (не обязательно больших). Если мы впишем в эту фигуру сферические многоугольники и будем стремить число их сторон к бесконечности таким образом, чтобы длина наибольшей стороны многоугольника стремилась к нулю, то площадь S_n вписанного n-угольника будет стремиться к площади S рассматриваемой фигуры, а угол Δ_n будет стремиться к углу Δ, на который поворачивается вектор при параллельном переносе вдоль всего контура этой фигуры после возвращения вектора в исходную точку. Поэтому, переходя в равенстве (10) к пределу, мы получим, что площадь S фигуры и угол Δ связаны соотношением

$$S = r^2 (2\pi - \Delta). \qquad (11)$$

составляющим частный случай знаменитой *формулы Гаусса — Бонне*.

В качестве примера применим формулу (11) к вычислению площади *сферического круга*. В случае сферического круга радиуса R угол Δ равен $2\pi \cos\frac{R}{r}$ (см. формулу (7)). Поэтому в этом случае

$$S = 2\pi r^2 \left(1 - \cos\frac{R}{r}\right) = 4\pi r^2 \sin^2\frac{R}{2r}.$$

т. е. мы снова получили формулу (6).

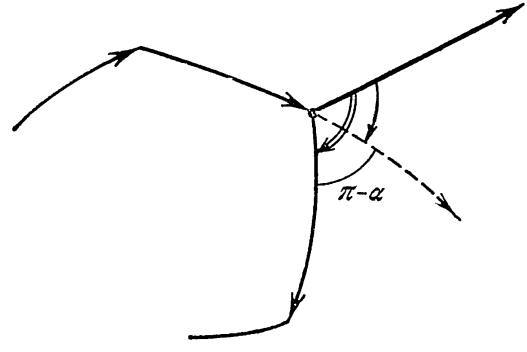


Рис. 43.

В случае сферической фигуры, ограниченной произвольным контуром, состоящим из дуг окружностей, угол Δ представляет собой сумму углов Δ_i, смежных с внутренними углами этой фигуры (как в случае сферического многоугольника) и произведений $k_i s_i$, где s_i — геодезические кривизны дуг, ограничивающих фигуру, а s_i — длины этих дуг, т. е. формулу (11) в этом случае можно переписать в виде

$$S = r^2 (2\pi - \sum_i \Delta_i - \sum_i k_i s_i). \qquad (12)$$

Перенос вектора можно определить и вдоль произвольной гладкой линии: в этом случае касательные плоскости в точках этой линии касаются уже не конуса или цилиндра, а поверхности, образованной

касательными к пространственной линии; такую поверхность, так же как конус или цилиндр, можно «развернуть» на плоскость. В этом случае можно определить *геодезическую кривизну линии* на сфере в каждой ее точке как предел отношения поворота вектора при переносе вдоль дуги линии к длине этой дуги при стягивании этой дуги в данную точку; в общем случае геодезическая кривизна изменяется от точки к точке и является постоянной только для окружностей. Площадь сферической фигуры, ограниченной произвольной гладкой линией, можно определить по той же формуле (11), что и для рассматриваемых нами фигур, причем эту формулу можно также переписать в виде, отличающемся от формулы (12) заменой суммы $\sum_i k_i s_i$ интегралом $\int_C k\,ds$ от геодезической кривизны контура по длине его дуги. Соответствующая формула и является общей формулой Гаусса—Бонне для случая сферической поверхности.

§ 4. Тригонометрические соотношения в сферическом треугольнике [1])

4.1. Сферическая теорема косинусов. Рассмотрим произвольный сферический треугольник ABC (напомним, что каждая его сторона меньше πr).

Прежде всего докажем *сферическую теорему косинусов*, аналогичную теореме косинусов плоской тригонометрии; доказательство сферической теоремы косинусов, как мы увидим, существенно опирается на плоскую теорему косинусов.

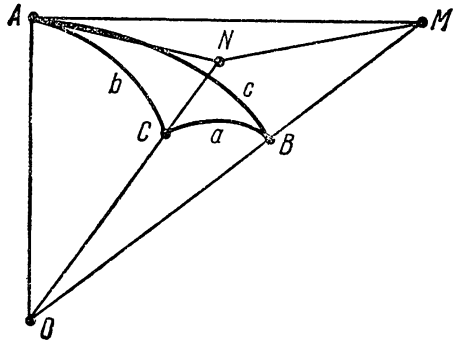


Рис. 44.

Предположим сначала, что каждая из сторон b и c сферического треугольника ABC меньше $\frac{\pi}{2}r$. Проведем из точки A касательные AM и AN к сторонам c и b и найдем точки M и N пересечения этих касательных с продолжениями радиусов OB и OC (рис. 44); эти точки пересечения существуют, так как, по предположению, каждый из углов AOC, AOB меньше $\frac{\pi}{2}$. Тогда угол A равен углу MAN, и для плоского треугольника MAN в силу плоской теоремы косинусов получаем

$$MN^2 = AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM \cos A. \qquad (13)$$

---

[1]) См. также п. 6.2 статьи «Векторы и их применение в геометрии», стр. 368.

С другой стороны, углы BOC, AOC и AOB, являющиеся центральными углами больших окружностей сферы, опирающимися на дуги a, b, c, соответственно равны $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ и $\frac{c}{r}$. Поэтому из треугольника OMN находим

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos \frac{a}{r}. \tag{14}$$

Сравнивая (13) и (14), получаем

$$OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos \frac{a}{r} = AN^2 + AM^2 - 2AN \cdot AM \cos A. \tag{15}$$

Из прямоугольного треугольника OMA находим, что

$$OM^2 - AM^2 = OA^2, \quad \frac{OA}{OM} = \cos \frac{c}{r}, \quad \frac{AM}{OM} = \sin \frac{c}{r}, \tag{16}$$

а из прямоугольного треугольника ONA находим, что

$$ON^2 - AN^2 = OA^2, \quad \frac{OA}{ON} = \cos \frac{b}{r}, \quad \frac{AN}{ON} = \sin \frac{b}{r}. \tag{17}$$

В силу первых формул (16) и (17) равенство (15) можно переписать в виде

$$2OM \cdot ON \cos \frac{a}{r} = 2OA^2 + 2AN \cdot AN \cdot AM \cos A,$$

т. е.

$$OM \cdot ON \cos \frac{a}{r} = OA^2 + AN \cdot AM \cos A. \tag{18}$$

Разделив (18) на произведение $OM \cdot ON$, получим

$$\cos \frac{a}{r} = \frac{OA}{OM} \cdot \frac{OA}{ON} + \frac{AN}{ON} \cdot \frac{AM}{OM} \cos A$$

или, в силу вторых и третьих равенств (16) и (17),

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos A. \tag{19}$$

Если теперь сторона b больше $\frac{\pi}{2} r$, а сторона c меньше $\frac{\pi}{2} r$, то продолжим стороны a и b нашего треугольника до пересечения в точке C', диаметрально противоположной точке C (рис. 45). Тогда в сферическом треугольнике ABC' стороны AC' и AB, соответственно равные $\pi r - b$ и c, меньше $\frac{\pi}{2} r$, а угол BAC, смежный с углом A, равен $\pi - A$. Поэтому в силу формулы (19) для треугольника ABC'

$$\cos \left(\pi - \frac{a}{r}\right) = \cos \left(\pi - \frac{b}{r}\right) \cos \frac{c}{r} + \sin \left(\pi - \frac{b}{r}\right) \sin \frac{c}{r} \cos (\pi - A),$$

т. е.

$$-\cos\frac{a}{r}=-\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}-\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A,$$

откуда получаем формулу (19).

Если, наконец, обе стороны b и c больше $\frac{\pi}{2}r$, то продолжим стороны b и c нашего треугольника до пересечения в точке A', диаметрально противоположной точке A (рис. 46). Тогда в сферическом треугольнике $A'BC$ стороны CA' и BA', соответственно равные $\pi r-b$ и $\pi r-c$, меньше $\frac{\pi}{2}r$, а $\angle BA'C$ равен углу A. Поэтому в силу формулы (19) для треугольника $A'BC$

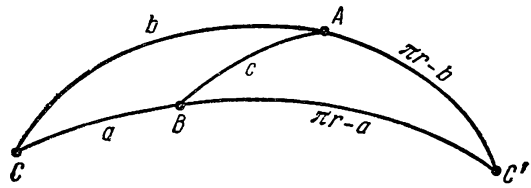


Рис. 45.

$$\cos\frac{a}{r}=\cos\left(\pi-\frac{b}{r}\right)\cos\left(\pi-\frac{c}{r}\right)+\sin\left(\pi-\frac{b}{r}\right)\sin\left(\pi-\frac{c}{r}\right)\cos A,$$

откуда непосредственно получаем формулу (19).

Формула (19) выражает *сферическую теорему косинусов*, которую обычно формулируют в следующем виде (получающемся при $r=1$, т. е. для сферы единичного радиуса): *косинус стороны сферического треугольника равен сумме произведения косинусов двух других сторон и произведения синусов двух других сторон на косинус угла между ними.*

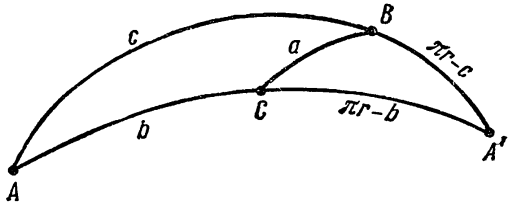


Рис. 46.

Заменяя в формуле (19) обозначения сторон a, b, c и углов A, B, C в круговом порядке, мы получим две аналогичные формулы

$$\cos\frac{b}{r}=\cos\frac{a}{r}\cos\frac{c}{r}+\sin\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}\cos B \qquad (20)$$

и

$$\cos\frac{c}{r}=\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}+\sin\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r}\cos C. \qquad (21)$$

4.2. Сферическая теорема синусов. Докажем теперь *сферическую теорему синусов*, аналогичную теореме синусов плоской тригонометрии. Из формулы (19) вытекает равенство

$$\cos A=\frac{\cos\frac{a}{r}-\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

Применяя это равенство, вычислим отношение

$$\frac{\sin^2\frac{a}{r}}{\sin^2 A}=\frac{\sin^2\frac{a}{r}}{1-\cos^2 A}=\frac{\sin^2\frac{a}{r}}{\left(\frac{\cos\frac{a}{r}-\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{a}{r}\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}{\sin^2\frac{b}{r}\cdot\sin^2\frac{c}{r}-\left(\cos\frac{a}{r}-\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{a}{r}\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}{\left(1-\cos^2\frac{b}{r}\right)\left(1-\cos^2\frac{c}{r}\right)-\left(\cos\frac{a}{r}-\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sin^2\frac{a}{r}\sin^2\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}}{1-\cos^2\frac{a}{r}-\cos^2\frac{b}{r}-\cos^2\frac{c}{r}+2\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}.$$

Так как полученное выражение симметрично относительно сторон a, b, c, то оно равно аналогичным выражениям, полученным из левой части этого равенства заменой сторон a, b, c и углов A, B, C в круговом порядке. Извлекая квадратный корень из этих выражений, мы получим три равные выражения:

$$\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin A}=\frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin B}=\frac{\sin\frac{c}{r}}{\sin C}. \tag{22}$$

Эта формула и выражает *сферическую теорему синусов*, которую обычно формулируют в виде (для $r=1$): *синусы сторон сферического треугольника относятся, как синусы противолежащих углов*. Из формулы (22), в частности, видно, что если в сферическом треугольнике имеет место соотношение $B=\pi-A$, так что $\sin B=\sin A$, то в силу формулы (22) $\sin\frac{b}{r}=\sin\frac{a}{r}$, т. е. либо $a=b$, либо $b=\pi r-a$. Но если $a=b$, то $A=B$ и в соответствии с соотношением $B=\pi-A$ это дает $A=B=\frac{\pi}{2}$. Следовательно, C—полюс стороны AB, и потому $a=b=\frac{\pi}{2}r$. Таким образом, соотношение $b=\pi r-a$ справедливо и в этом случае. Итак, *если* $B=\pi-A$, *то стороны* a *и* b *связаны соотношением* $b=\pi r-a$.

4.3. Формулы пяти элементов. Докажем теперь так называемые *формулы пяти элементов*. Почленно умножая равенство (19) на $\cos\frac{c}{r}$ и складывая с равенством (20), получим

$$\cos\frac{b}{r}+\cos\frac{a}{r}\cos\frac{c}{r}=\cos\frac{a}{r}\cos\frac{c}{r}+\cos\frac{b}{r}\cos^2\frac{c}{r}+$$
$$+\sin\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}\cos B+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\frac{c}{r}\cos A$$

или, после приведения подобных членов,

$$\cos\frac{b}{r}=\cos\frac{b}{r}\cos^2\frac{c}{r}+\sin\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}\cos B+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\frac{c}{r}\cos A,$$

т. е.

$$\cos\frac{b}{r}\left(1-\cos^2\frac{c}{r}\right)=\sin\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}\cos B+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\frac{c}{r}\cos A,$$

или

$$\cos\frac{b}{r}\sin^2\frac{c}{r}=\sin\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}\cos B+\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos\frac{c}{r}\cos A.$$

Сокращая обе части этого равенства на $\sin\frac{c}{r}$, получим

$$\cos\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}=\sin\frac{a}{r}\cos B+\sin\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}\cos A$$

или, окончательно,

$$\sin\frac{a}{r}\cos B=\cos\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}-\sin\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}\cos A. \qquad (23)$$

Мы получили одну из *формул пяти элементов*, которую обычно формулируют в виде: *произведение синуса стороны сферического треугольника на косинус прилежащего угла равно разности произведения косинуса стороны, лежащей против этого угла, на синус третьей стороны и произведения синуса стороны, лежащей против данного угла, на косинус третьей стороны и косинус стороны, лежащей против данного угла.*

Заменяя в формуле (23) обозначения сторон a, b, c и углов A, B, C в круговом порядке, мы получим две аналогичные формулы:

$$\sin\frac{b}{r}\cos C=\cos\frac{c}{r}\sin\frac{a}{r}-\sin\frac{c}{r}\cos\frac{a}{r}\cos B, \qquad (24)$$

$$\sin\frac{c}{r}\cos A=\cos\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r}-\sin\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\cos C. \qquad (25)$$

Меняя в формуле (23) местами стороны a и c и углы A и C, а затем заменяя обозначения сторон a, b, c и углов A, B, C

в круговом порядке, мы получим еще три аналогичные формулы

$$\sin\frac{a}{r}\cos C=\cos\frac{c}{r}\sin\frac{b}{r}-\sin\frac{c}{r}\cos\frac{b}{r}\cos A, \tag{26}$$

$$\sin\frac{b}{r}\cos A=\cos\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}-\sin\frac{a}{r}\cos\frac{c}{r}\cos B, \tag{27}$$

$$\sin\frac{c}{r}\cos B=\cos\frac{b}{r}\sin\frac{a}{r}-\sin\frac{b}{r}\cos\frac{a}{r}\cos C. \tag{28}$$

Эти формулы аналогичны теоремам проекций плоской тригонометрии.

Заменяя в формуле (23) $\sin\frac{a}{r}$, $\sin\frac{b}{r}$ и $\sin\frac{c}{r}$ пропорциональными им величинами $\sin A$, $\sin B$ и $\sin C$, мы получим формулу

$$\sin A\cos B=\cos\frac{b}{r}\sin C-\cos\frac{c}{r}\cos A\sin B,$$

или

$$\cos\frac{b}{r}\sin C=\cos B\sin A+\sin B\cos A\cos\frac{c}{r}. \tag{29}$$

Мы получили *формулу пяти элементов* другого вида, которую обычно формулируют в виде: *произведение косинуса стороны сферического треугольника на синус прилежащего угла равно сумме произведения косинуса угла, лежащего против этой стороны, на синус третьего угла и произведения синуса угла, лежащего против данной стороны, на косинус третьего угла и на косинус стороны, лежащей против данного угла.*

Заменяя в формуле (29) обозначения сторон a, b, c и углов A, B, C в круговом порядке, мы получим еще две аналогичные формулы

$$\cos\frac{c}{r}\sin A=\cos C\sin B+\sin C\cos B\cos\frac{a}{r}, \tag{30}$$

$$\cos\frac{a}{r}\sin B=\cos A\sin C+\sin A\cos C\cos\frac{b}{r}. \tag{31}$$

Меняя в формуле (29) местами стороны a и c и углы A и C, а затем заменяя обозначения сторон a, b, c и углов A, B, C в круговом порядке, мы получим еще три аналогичные формулы:

$$\cos\frac{b}{r}\sin A=\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos\frac{a}{r}, \tag{32}$$

$$\cos\frac{c}{r}\sin B=\cos C\sin A+\sin C\cos A\cos\frac{b}{r}, \tag{33}$$

$$\cos\frac{a}{r}\sin C=\cos A\sin B+\sin A\cos B\cos\frac{c}{r}. \tag{34}$$

Эти формулы не имеют аналогов в плоской тригонометрии.

Формулы пяти элементов (29), (30) (31), (32), (33) и (34) могут быть получены также соответственно из формул (28), (26), (27), (23), (24) и (25), если записать эти формулы для полярного треугольника и использовать соотношения между углами и сторонами двух взаимно полярных треугольников.

4.4. Двойственная теорема косинусов. Докажем теперь *двойственную теорему косинусов*, также не имеющую аналога в плоской тригонометрии. Подставим значение $\cos\frac{b}{r}\cdot\sin A$ из равенства (32) в равенство (31). Получим

$$\cos\frac{a}{r}\sin B=\cos A\sin C+\left(\cos B\sin C+\sin B\cos C\cos\frac{a}{r}\right)\cos C,$$

или

$$\cos\frac{a}{r}\sin B=\cos A\sin C+\cos B\sin C\cos C+\sin B\cos\frac{a}{r}(1-\sin^2 C),$$

т. е.

$$\cos\frac{a}{r}\sin B\sin^2 C=\cos A\sin C+\cos B\sin C\cos C$$

или, после сокращения на $\sin C$,

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\frac{a}{r}. \qquad (35)$$

Формула (35) выражает *двойственную сферическую теорему косинусов*, которую обычно формулируют в виде: *косинус угла сферического треугольника равен произведению синусов двух других углов на косинус стороны между ними без произведения косинусов двух других углов.*

Заменяя в формуле (35) обозначения сторон a, b, c и углов A, B, C в круговом порядке, мы получим две аналогичные формулы:

$$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos\frac{b}{r}, \qquad (36)$$

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos\frac{c}{r}. \qquad (37)$$

Формулы (35), (36) и (37) двойственной теоремы косинусов могут быть получены также соответственно из формул (19), (20) и (21) теоремы косинусов, если записать эти формулы для полярного треугольника и использовать соотношения между углами и сторонами двух взаимно полярных треугольников; этим и объясняется название этой теоремы.

Заметим, что при малых значениях отношений $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ и $\frac{c}{r}$, т. е. при очень малых длинах сторон a, b, c сферического треугольника или при очень большом радиусе сферы r, сферическая геометрия мало отличается от плоской геометрии и тригонометрические соотношения в сферическом

треугольнике можно заменить тригонометрическими соотношениями в плоском треугольнике. И в самом деле при малых значениях переменного x можно пренебречь высшими степенями этого переменного и, следовательно, можно заменить $\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$ на x, а $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ на $1 - \frac{x^2}{2}$ или даже на 1. Но при такой замене, как легко проверить, сферические теоремы косинусов и синусов переходят в одноименные плоские теоремы, первые шесть формул пяти элементов переходят в теоремы проекций плоской тригонометрии, а вторые шесть формул пяти элементов и двойственная теорема косинусов, не имеющие аналогов в плоской тригонометрии, переходят в соотношение $A+B+C=\pi$.

Основные теоремы сферической тригонометрии были открыты учеными средневекового Востока. Соотношения, выражаемые теоремой косинусов, были установлены сирийским математиком и астрономом IX века ал-Баттани, выходцем из семьи звездопоклонников — сабиев, у которых в течение многих веков сохранялись вавилонские астрономические традиции. Сферическая теорема синусов была открыта почти одновременно среднеазиатскими математиками и астрономами X века Ибн Ираком из Хорезма, Абу-л-Вафой из Хорасана и ал-Ходжанди из Ходжента. Соотношения, выражаемые двойственной теоремой косинусов, были установлены (с помощью полярного треугольника) в XIII веке работавшим в Азербайджане Насир-ад-дином ат-Туси, давшим первое полное изложение всей системы сферической тригонометрии.

4.5. Формулы котангенсов. Деля почленно формулу пяти элементов (23) на вытекающее из формулы (22) равенство

$$\sin\frac{a}{r}\sin B = \sin\frac{b}{r}\sin A,$$

мы получим равенство

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\operatorname{ctg}\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r} - \cos\frac{c}{r}\cos A}{\sin A},$$

т. е.

$$\operatorname{ctg} B \sin A = \operatorname{ctg}\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r} - \cos\frac{c}{r}\cos A$$

или

$$\sin\frac{c}{r}\operatorname{ctg}\frac{b}{r} - \sin A \operatorname{ctg} B = \cos\frac{c}{r}\cos A. \qquad (38)$$

Мы получили одну из *формул котангенсов*, которую обычно формулируют в виде: *произведение синуса одной стороны сферического треугольника на котангенс другой без произведения синуса угла, лежащего против третьей стороны, на котангенс угла, лежащего против второй стороны, равно произведению косинуса первой стороны на косинус угла, лежащего против третьей стороны.*

Заменяя в формуле (38) обозначения сторон a, b, c и углов в круговом порядке, мы получим две аналогичные формулы:

$$\sin\frac{a}{r}\operatorname{ctg}\frac{c}{r}-\sin B\operatorname{ctg}C=\cos\frac{a}{r}\cos B, \tag{39}$$

$$\sin\frac{b}{r}\operatorname{ctg}\frac{a}{r}-\sin C\operatorname{ctg}A=\cos\frac{b}{r}\cos C. \tag{40}$$

Меняя в формуле (38) местами стороны a и c и углы A и C, а затем заменяя обозначения сторон a, b, c и углов A, B, C в круговом порядке, мы получим еще три аналогичные формулы:

$$\sin\frac{a}{r}\operatorname{ctg}\frac{b}{r}-\sin C\operatorname{ctg}B=\cos\frac{a}{r}\cos C, \tag{41}$$

$$\sin\frac{b}{r}\operatorname{ctg}\frac{c}{r}-\sin A\operatorname{ctg}C=\cos\frac{b}{r}\cos A, \tag{42}$$

$$\sin\frac{c}{r}\operatorname{ctg}\frac{a}{r}-\sin B\operatorname{ctg}A=\cos\frac{c}{r}\cos B. \tag{43}$$

4.6. Случай прямоугольного сферического треугольника. В случае, когда сферический треугольник ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом A, теорема косинусов (19) принимает вид

$$\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}, \tag{44}$$

т. е. *косинус гипотенузы равен произведению косинусов катетов.* Эта теорема, связывающая гипотенузу и катеты прямоугольного сферического треугольника, является аналогом теоремы Пифагора и называется *сферической теоремой Пифагора* [1]).

В случае прямого угла A теорема синусов (22) принимает вид равенств

$$\sin\frac{b}{r}=\sin\frac{a}{r}\sin B \tag{45}$$

и

$$\sin\frac{c}{r}=\sin\frac{a}{r}\sin C. \tag{46}$$

Формулы (45) и (46) называются *формулами синусов* для прямоугольного сферического треугольника.

В случае прямого угла A формулы пяти элементов (25) и (27) принимают вид

$$\cos\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r}-\sin\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\cos C=0,$$

---

[1]) Записав формулу (44) в виде $1-\frac{a^2}{2r^2}+\ldots=\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+\ldots\right)\left(1-\frac{c^2}{2r^2}+\ldots\right)$ (ср. стр. 552), можно убедиться, что при $r\to\infty$ сферическая теорема Пифагора переходит в плоскую теорему Пифагора: $a^2=b^2+c^2$.

и

$$\cos\frac{a}{r}\sin\frac{c}{r}-\sin\frac{a}{r}\cos\frac{c}{r}\cos B=0,$$

откуда находим формулы

$$\operatorname{tg}\frac{b}{r}=\cos C\operatorname{tg}\frac{a}{r} \tag{47}$$

и

$$\operatorname{tg}\frac{c}{r}=\cos B\operatorname{tg}\frac{a}{r}. \tag{48}$$

Формулы (47) и (48) называются *первыми формулами тангенсов* для прямоугольного сферического треугольника.

В случае прямого угла A формула (35) двойственной теоремы косинусов принимает вид

$$-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos\frac{a}{r}=0,$$

откуда находим формулу

$$\cos\frac{a}{r}=\operatorname{ctg}B\operatorname{ctg}C. \tag{49}$$

Формула (49) называется *формулой котангенсов* для прямоугольного сферического треугольника.

В случае прямого угла A формулы (36) и (37) двойственной теоремы косинусов принимают вид

$$\cos B=\cos C\cos\frac{b}{r} \tag{50}$$

и

$$\cos C=\sin B\cos\frac{c}{r}. \tag{51}$$

Формулы (50) и (51) называются *формулами косинусов* прямоугольного сферического треугольника.

В случае прямого угла A формулы котангенсов (38) и (42) принимают вид

$$\sin\frac{c}{r}\operatorname{ctg}\frac{b}{r}-\operatorname{ctg}B=0$$

и

$$\sin\frac{b}{r}\operatorname{ctg}\frac{a}{r}-\operatorname{ctg}C=0,$$

откуда находим формулы

$$\operatorname{tg}\frac{b}{r}=\sin\frac{c}{r}\operatorname{tg}B, \tag{52}$$

$$\operatorname{tg}\frac{c}{r}=\sin\frac{b}{r}\operatorname{tg}C. \tag{53}$$

Формулы (52) и (53) называются *вторыми формулами тангенсов* прямоугольного сферического треугольника.

Сферическая теорема Пифагора, две формулы синусов, две первые формулы тангенсов, формула котангенсов, две формулы косинусов и две вторые формулы тангенсов составляют десять формул прямоугольного сферического треугольника.

4.7. Решение сферических треугольников. Выведенные нами тригонометрические соотношения позволяют «решить сферический треугольник» по любым трем из его элементов (сторон и углов). Если нам даны три стороны сферического треугольника, то по формуле (19) теоремы косинусов находим

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

и аналогично по формулам (20) и (21) находим $\cos B$ и $\cos C$.

Если нам даны две стороны сферического треугольника и угол между ними, например стороны b, c и угол A, то сторону a найдем по формуле (19) теоремы косинусов. Зная все три стороны сферического треугольника, найдем его остальные углы, как указано выше.

Если нам даны две стороны сферического треугольника и угол, лежащий против одной из них [1]), например стороны a, b и угол A, то по формуле (22) теоремы синусов находим

$$\sin B = \frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin\frac{a}{r}}\sin A.$$

Заметим, что эта формула дает для B два значения, дополняющих друг друга до π; это соответствует тому, что в общем случае два сферических треугольника с двумя соответственно равными сторонами и равными углами, лежащими против одной из этих сторон, не обязательно равны, а возможен случай, когда углы этих треугольников, лежащих против другой стороны, дополняют друг друга до π, как мы это видели, рассматривая IV признак равенства сферических треугольников.

Для определения стороны c и угла C проведем через вершину C дугу большой окружности, перпендикулярную большой окруж-

---

[1]) Предполагается, что хотя бы одна из данных сторон отлична от $\frac{\pi}{2}r$.

ности AB [1]). Если эти большие окружности пересекаются в точке D, то рассмотрим прямоугольные сферические треугольники ACD и BCD (рис. 47). В этих треугольниках известны гипотенузы b и a и углы при вершинах A и B. Второй катет каждого из этих треугольников определяется по первым формулам тангенсов (47) или (48), а угол при вершине C определится по формуле котангенсов (49). Сторона c и угол C сферического треугольника ABC являются суммами найденных нами сторон или углов прямоугольных треугольников, если точка D лежит на стороне AB, и разностями этих сторон или углов, если точка D лежит на продолжении стороны AB. Именно, если оба угла A, B в исходном треугольнике ABC являются острыми или оба тупыми, то перпендикулярная к AB окружность, проходящая через точку C, пересекает окружность AB в двух точках, одна из которых лежит на дуге AB; эту точку и следует принять за D в рассматриваемом случае (рис. 47). Таким образом, углы при вершинах A и B в прямоугольных треугольниках ACD и BCD совпадают с углами A и B исходного треугольника ABC, а сторона c и угол C треугольника ABC являются суммами найденных нами сторон или углов прямоугольных треугольников ACD и BCD. Если же в треугольнике ABC один из углов A, B острый, а второй — тупой, то перпендикулярная к AB окружность, проходящая через точку C, пересекает окружность AB в двух точках, ни одна из которых не лежит на дуге AB. В этом случае за D можно принять любую из этих точек, например ту, которая лежит на продолжении стороны AB за точку B (рис. 48). Таким образом, угол при вершине A в треугольнике ACD равен углу A треугольника ABC, а угол при вершине B в треугольнике BCD равен $\pi - B$. При этом сторона c и угол C треугольника ABC являются разностями сторон AD, BD или углов при вершине C треугольников ACD и BCD. Наконец, если один из углов A, B (например, A) прямой, то треугольник ABC

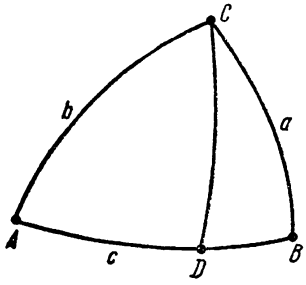


Рис. 47.

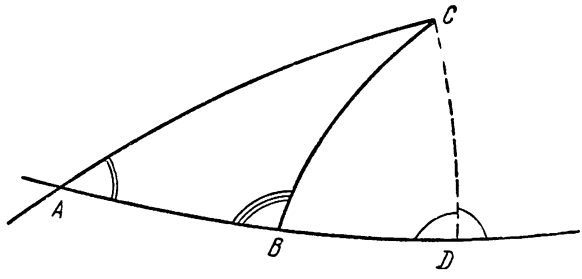


Рис. 48.

[1]) Так как, по предположению, хотя бы одна из сторон a, b отлична от $\frac{\pi}{2}r$, то точка C не является полюсом окружности AB, и потому через C проходит единственный перпендикуляр к AB.

прямоугольный, и для нахождения стороны c и угла C можно в этом случае воспользоваться формулами (44), (47).

Если нам даны три угла сферического треугольника, то по формуле (35) двойственной теоремы косинусов находим

$$\cos\frac{a}{r}=\frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C}$$

и аналогично по формулам (36) и (37) находим $\cos\frac{b}{r}$ и $\cos\frac{c}{r}$.

Если нам даны два угла сферического треугольника и сторона между ними, например сторона a и углы B и C, то угол A найдем по формуле (35) двойственной теоремы косинусов. Зная все три угла сферического треугольника, найдем его остальные стороны, как указано выше.

Если, наконец, нам даны два угла сферического треугольника [1]) и сторона, лежащая против одного из них, например углы A и B и сторона a, то по формуле (22) теоремы синусов находим

$$\sin\frac{b}{r}=\frac{\sin B}{\sin A}\sin\frac{a}{r}.$$

Заметим, что эта формула дает для b два значения, дополняющих друг друга до πr; это соответствует тому, что в общем случае два сферических треугольника с двумя соответственно равными углами и равными сторонами, лежащими против одного из этих углов, не обязательно равны, а возможен случай, когда стороны этих треугольников, лежащие против другого угла, дополняют друг друга до πr, как мы это видели, рассматривая V признак равенства сферических треугольников. Сторону c и угол C по углам A, B и сторонам a, b мы найдем, как указано выше.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Адамар, Элементарная геометрия, перев. с франц., ч. 2, М., Учпедгиз, 1958.

Обширный курс стереометрии; гл. VI и VII пятой книги посвящены основным понятиям сферической геометрии, а I и II дополнения ко второй части — некоторым дополнительным вопросам сферической геометрии, в частности определению площадей сферических треугольников и многоугольников. Книга содержит много задач.

[2] Д. И. Перепелкин, Курс элементарной геометрии, т. II, М.—Л., Гостехиздат, 1949.

Сферической геометрии посвящена гл. XVI этого обстоятельного курса стереометрии.

[3] Н. Н. Степанов, Сферическая тригонометрия, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

[1]) Предполагается, что хотя бы один из данных углов отличен от $\frac{\pi}{2}$.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абу-л-Вафа (Абӯ-л-Вафа̄ Мухаммед ибн Мухаммед ал-Бузджанӣ) (940—998) — среднеазиатский математик 552

Адлер (Adler) Август (1863—1923) — австрийский математик 169, 175

ал-Баттани (Абӯ Абдалла Мухаммед ибн Джабир ал-Баттанӣ) (850—929)—сирийский математик 552

ал-Ходжанди (Абӯ Мухаммед Хамид ибн ал-Хидр ал-Ходжандӣ) (ум. ок. 1000) — среднеазиатский математик 552

Александров Александр Данилович (р. 1912) — советский математик 412, 420

Аристотель (Ἀριστοτέλης) (384—322 до н. э.) — древнегреческий философ 13, 16, 31, 182

Архимед (Ἀρχιμήδης) (ок. 287—212 до н. э.) — древнегреческий математик и механик 16

Бельтрами (Beltrami) Эудженио (1835—1900) — итальянский геометр 29, 45

Витрувий (Markus Vitruvius Pollio) (2-я половина 1 в. до н. э.) — римский архитектор и инженер 276

Галуа (Galois) Эварист (1811—1832) — французский математик 206

Гаусс (Gauss) Карл Фридрих (1777—1855)— немецкий математик 47, 206, 226

Гильберт (Hilbert) Давид (1862—1943) — немецкий математик 41

Гиппократ Хиосский (Ἱπποκράτης) (2-я половина 5 в. до н. э.) — древнегреческий геометр 13

Дедекинд (Dedekind) Юлиус Вильгельм Рихард (1831—1916) — немецкий математик 31, 38, 40

Декарт (Descartes) Рене (1596—1650) — французский философ, физик, математик 18

Демокрит (Δημόκριτος) (ок. 460—370 до н. э.) — древнегреческий философ 13, 14, 16, 17, 47

Евклид (Εὐκλειδης) (начало 3 в. до н э.) — древнегреческий математик 13, 16, 17, 18, 35, 43, 46, 177, 412

Ибн Ирак (Абӯ Наср Мансӯр ибн' Алӣ ибн' Ира̄к) — (10—11 вв.) — среднеазиатский математик 552

Каган Вениамин Федорович (1869—1953)— советский математик 41

Клейн (Klein) Феликс (1849—1925) — немецкий математик 29, 45, 102

Коши (Cauchy) Огюстен Луи (1789—1857)— французский математик 412

Лагерр (Laguerre) Эдмонд (1834—1886) — французский математик 449

Ли (Lie) Софус (1842—1899) — норвежский математик 449

Лобачевский Николай Иванович (1792—1856) — русский математик 10, 18, 47

Маскерони (Mascheroni) Лоренцо (1750—1800) — итальянский геометр 169

Мебиус (Möbius) Август Фердинанд (1790—1868) — немецкий математик 449

Менелай (Μενέλαος) (1 в.) — древнегреческий астроном и математик 519

Монж (Monge) Гаспар (1746—1818) — французский геометр 276

Мор (Mohr) Георг (1640—1697) — датский математик 169

Насир-ад-дин ат-Туси (Абӯ Джа'фар Мухаммед ибн Мухаммед Насир ад-Дин ат-Тусӣ) (1201—1274) — азербайджанский математик 552

Паш (Pasch) Мориц (1843—1930) — немецкий математик 34

Пифагор (Πυθαγόρας) (ок. 580—500 до н. э.) — древнегреческий математик и философ 13, 14, 16, 17

Платон (Πλάτων) (427—348 до н. э.) — древнегреческий философ 13

Погорелов Алексей Васильевич (р. 1919) — советский математик 420

Польке (Pohlke) Карл (1810—1876) — немецкий геометр 249

Понселе (Poncelet) Жан Виктор (1788—1867) — французский математик и инженер 171

Птолемей Клавдий (Κλαύδιος Πτολεμαῖος) (2 в.) — древнегреческий астроном 519

Пуанкаре (Poincaré) Анри (1854—1912) — французский математик 45

Риман (Riemann) Георг Фридрих Бернхард (1826—1866) — немецкий математик 47, 102

Фалес (Θαλῆς) (конец 7 — начало 6 вв. до н. э.) — древнегреческий философ 11, 17

Шварц (Schwarz) Герман Амандус (1843—1921) — немецкий математик 250

Штейнер (Steiner) Якоб (1796—1863) — швейцарский математик 171

Штейниц (Steinitz) Эрнст (1871—1928) — немецкий математик 403

Шур (Schur) Иссаи (1875—1941) — немецкий математик 41

Эйлер (Euler) Леонард (1707—1783) — математик, механик, физик 190, 390

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абрис 260
Абстрактный многогранник 401—403, 407
Абсцисс ось 321
Автополярный треугольник 531
Аксиома 20, 21
— Архимеда 37, 45
— движения 36—37, 41
— Дедекинда 40
— Кантора 37, 41, 46
— непрерывности 31, 37
— параллельности 40
— Паша 34
— полноты 41
— поля 30
— порядка 31, 34
— принадлежности 32
Аксиоматика 20, 369
— векторного пространства 369—375
— группы 27, 45
—, независимость 44
—, непротиворечивость 28
—, полнота 30
— поля действительных чисел 30, 31
— элементарной геометрии 375—377
Аксиоматический метод 20
Аксонометризация чертежа 266
Аксонометрическое изображение 259—266
Аксонометрия 257, 258
— параллельная 257
—, показатели (коэффициенты) искажения 272
— центральная 257, 286, 287
Алгебра Ли 380
Аналагматическая геометрия 104
— — круговая 139
— — точечная 139
Антипризма 433, 437
Апликат ось 322
Аполлония задача 513
Арифметика рациональных чисел 29
Архимеда аксиома 37, 45
— спираль 177
Архимедов многогранник 436, 438
Ассоциативности закон 85
Аффинная геометрия 103, 104, 378
— — линейчатая 139
— — точечная 139
— сетка 244
— система координат 243, 248
Аффинное отображение 236
— преобразование 62, 76, 93, 103, 104, 122, 138, 243, 298
— пространство 378
Аффинный репер 243
— — пространственный 248
Аффинор 298
Аэрофотограмметрия 287

База (малой окружности) 540
Базис ортонормированный 372
Бесконечно удаленная прямая 113
— — точка 24, 57, 112, 477
Бесконечномерное векторное пространство 377
Бипирамида 408
Бирациональное преобразование 79, 119, 121
Большая окружность 520, 529, 534—536
Большой додекаэдр 443
— звездчатый додекаэдр 443
— икосаэдр 445
— круг 520
Брианшона теорема 502

Вектор 293, 376
—, длина 294
—, координаты 312—314, 373
— нулевой 301
—, определение 294, 296, 297
—, откладывание от точки 294—296
— параллельного переноса 295
— свободный 295
— связанный 295
Векторное произведение 354
— — двойное 360, 361
— —, единственность 364—366
— —, свойства 355—360
— пространство 370, 377
— —, аксиоматическое определение 369—375
— —, арифметическая модель 370, 371
— — бесконечномерное 377
— — евклидово 370
— — — n-мерное 377, 378
Векторы, векторное произведение 354
—, вычитание 304, 305
—, двойное векторное произведение 360, 361
—, косое произведение 338, 341—343, 345, 380
— линейно зависимые 314
— — независимые 314
— противоположные 300
— равные 296
—, скалярное произведение 328—331, 342, 350, 369
—, сложение 298—303, 369
—, смешанное произведение 355
—, тройное произведение 351, 352
—, умножение на число 305—308, 369
Вертикальные углы (на сфере) 528
Вершина двуугольника 530
Вершина многогранника 384
— многоугольника 382
— сферического треугольника 530
Взаимные многогранники 427

Внутренняя геометрия поверхностей 419
— метрика 419
Воображаемые построения 202
Вращение 52, 54, 60, 83, 86, 87, 89, 90 91, 92, 190
Вставка 176
Вторичная проекция 255
Вторые формулы тангенсов 555
Выпуклый многогранник 386, 407, 418
— многоугольник 384
Вырожденная инверсия 468, 469
— осевая инверсия 496
Вычитание векторов 304, 305

Галилея преобразования 108—110
— принцип относительности 108, 109
Гаусса теорема 219
Гаусса—Бонне формула 544
Гексаэдр 423
— правильный 426, 442
Геодезическая кривизна 541—543, 545
— линия 536
Геометрические построения в пространстве 200—203
— — на плоскости, общая схема решения 184
— —, система постулатов 200
Геометрическое место точек 16, 17, 182
— отображение 51
Геометрия 10, 98—107, 138, 155, 518
— аналагматическая 104
— аффинная 103, 104, 139, 378
— Евклида 18, 19, 21, 22, 41, 45, 47, 98, 103, 140, 156
— конформная 104
— круговая 104, 139, 478
— — осевая 507
— Лагерра 507
— линейная 139
— Лобачевского 18, 19, 45, 47, 103, 110
— начертательная 234
— неевклидова 103
— окружностей 139
— — касательная 515
— проективная 105, 110, 117
— прямых линий 139
— риманова 47
— сферическая 518, 524
— элементарная 13, 375—377
Герона формула 346
Гиперболическая инверсия 59, 73, 75, 79, 96, 119—121 146
— —, ось 59
— —, степень 59
— связка 467
— сеть окружностей 493
Гиперболический пучок 462
— ряд окружностей 492
Гомология 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117 121, 122
—, область значений 112
—, — определения 112
—, ось 110
—, центр 110
Гомотетия 55, 60, 61, 63, 64, 65, 73, 76, 92, 93, 96 97 114 122 138, 180, 192, 307
— коэффициент 55
—, ось 93
—, центр 55, 93
Горизонталь 233
Горизонтальная плоскость 275
— проекция 275
Грань 384
Группа 27, 370
—, аксиоматика 27, 45
— коммутативная 369
— преобразований 102—110, 138

Движение 17, 36, 41, 60, 62, 88, 89, 92, 99, 103, 139, 376
— сферы 522—524
Движения аксиома 36, 37, 41
Двойное векторное произведение 360, 361
Двойственная сферическая теорема косинусов 551
Двойственности принцип 130, 409
Двойственные многогранники 407
— правильные многогранники 426, 427
Двуугольник 530
—, площадь 537
Дедекинда аксиома 40
— теорема 38
Дедуктивный метод 10
Дезарга теорема 130—132
— — обратная 132
Дезаргова конфигурация 283, 284
— — прямоугольная равнобедренная 283
— прямая 285
Действительное число 18
Декартова прямоугольная система координат 251
Дескриптивное определение 21
Диагональная точка 278
Диметрическое изображение 273
Диметрия ортогональная 262
Дирихле функция 50
Дискретное пространство 47
Додекаэдр 423
— большой 443
— — звездчатый 443
— звездчатый 443
— плосконосый 437
— правильный 426 442
— усеченный 437
Додекаэдрододекаэдр 446
Додекаэдроикосаэдр 446
Дробно-линейная функция 78
Дробно-линейное преобразование 79, 121
Дуга на сфере 395

Евклида геометрия 18, 19, 21, 22, 41, 45, 47, 98, 103, 140, 156
— —, модель 41, 156
— пространство 32, 41, 46, 47
— —, размерность 46
Евклидова геометрия — см Евклида геометрия
— плоскость 41
— —, арифметическая модель 43
— —, модель (интерпретация) 21—27
Евклидово пространство n-мерное 377, 378

Жордана теорема 397

Звезда вершины 429
— грани 429
Звездчатый додекаэдр 443
— многогранник 441

Изображение 229
— аксонометрическое 259—266
— диметрическое 273
— жесткое 239
— изометрическое 273

Изображение комбинированное 275
— плоских фигур 240—247
— полное 253, 254, 256
— —, базис 254
— свободное 240
— гриметрическое 273
— условное 258
Изображения метод 229
— —, основные требования 231—233
— — проекционный 233
— плоскость 229
Изометрическое изображение 273
Изометричные многогранники 419
Изометрия ортогональная 274
Изоморфизм 30
Икосаэдр 423
— большой 445
— правильный 426, 442
— усеченный 437
Икососдодекаэдр 437
— усеченный 437
Инверсии окружность 469
Инверсия 26, 56—58, 62, 68, 73, 74, 78, 79, 96, 119, 120, 121, 124, 143, 468 471, 472, 474, 478
— вырожденная 468, 469
— гиперболическая 59, 73, 75, 79, 96, 119—121, 146
—, коэффициент 56
— невырожденная 469
— обыкновенная (общая) 469
— осевая 496—502, 505
— — вырожденная 496
— — направляющая окружность 499
— — невырожденная 499—502
— — общая (обыкновенная) 496, 498, 505
— — особая 496—500, 505
— —, ось 496
— —, степень 496
— особая 468, 469
—, степень 469
— точечная 468
—, центр 56, 469
Инволютивное преобразование 97, 137
Инволюция 97
Индуктивный метод 10
Интерпретация геометрической системы 21
Инцидентность 401
Искажения показатели (коэффициенты) 272

Кантора аксиома 37 41, 46
Касание 453
Касательная геометрия окружностей 515
Касательное преобразование 136, 511
— — круговое 125, 138, 139, 511, 512
— расстояние 485
Квадратичное преобразование 119, 120
Квадратные числа 14
Квадратура 16
— круга 226, 227
Комбинаторный (топологический) тип многогранников 400
Комбинированное изображение 275
Коммутативная группа 369
Коммутативности закон 85
Коммутатор 380
Комплексная координата 78
Комплексный чертеж 275
Конгруэнтность 41, 297
Конечное пространство 46
Конкурирующие точки 235
Конус 11
— круговой, аксонометрическое изображение 260
Конфигурация дезаргова 283—285
Конформная геометрия 104
Координаты вектора 312—314, 373
Координограф 161
Косинусов теорема 331
— — сферическая 368, 545—547
— — — двойственная 551
— формулы 554
Косое произведение 338, 341—343, 345, 380
— —, единственность 349, 350
— —, свойства 343—345
Косоугольная проекция 239
Котангенсов формулы 552—554
Коши теорема 413, 416, 420
Коэффициент гомотетии 55
— инверсии 56
— подобия 61
— сжатия 56
Кривизна 541
— геодезическая 541—543, 545
Круг сферический 539
— —, площадь 541, 544
Круговая аналагматическая геометрия 139
— геометрия 104, 139, 478
— плоскость 24, 57, 58, 76, 79, 121, 477
— —, модель 58
Круговое преобразование 62, 79, 93, 104, 124, 125, 138, 139, 478
— — касательное 125, 138, 139, 511, 512
— — Ли 511
— — осевое 125, 138, 139, 504, 505, 512
— — точечное 512
Куб 11, 426, 442
— плосконосый 437
— усеченный 437
Кубатура 16
Кубические числа 14
Кубическое преобразование 119, 121
Кубоктаэдр 437
— усеченный 437

Лагерра геометрия 507
— преобразование 504
Ли алгебра 380
— круговое преобразование 511
Линейка 161, 167
— ограниченной длины 178
Линейная геометрия 139
— зависимость векторов 314, 315
— функция 73
Линейное отображение 76
— преобразование 76, 77, 79, 119, 121
Линейный элемент 136, 509
Линейчатая аффинная геометрия 139
Линия 11, 14
— геодезическая 536
— связи 275
— схода 282
— центров 463, 492
— — ряда окружностей 492
Лобачевского геометрия 18, 19, 45, 47, 103, 110
Лоренца преобразования 110
Луч 35

Малая окружность 520, 539—545
— —, база 540
— —, геодезическая кривизна 543
— —, параметр 540
— —, сферический радиус 540
— —, — центр 540
Мебиуса преобразование 478
Медиана 316, 317
Менелая теорема 347

Метаматематика 205
Метрически правильный многогранник 424, 426
— — многоугольник 424
— равногранно полуправильный многогранник 440
— равноугольно полуправильный многогранник 436
Многогранник 384, 386
— абстрактный 401—403, 407
— архимедов 436, 438
—, вершина 384
— выпуклый 386, 407, 418
—, грань 384
— звездчатый 441
—, комбинаторные (топологические) свойства 400
— метрически правильный 424, 426
— — равногранно полуправильный 440
— — равноугольно полуправильный 436
—, метрические свойства 400
— нулевого рода 390, 408, 429
— — —, топологический тип 420, 423
— платонов 424
— полуправильный 429, 436, 440
— правильный 424
— — самопересекающийся (звездчатый) 441
— простой 385, 424
— пространственный 402
— Пуансо 441
—, развертка 410
—, ребро 384
—, род 391
— самопересекающийся 441
— топологически правильный 420
— — равногранно полуправильный 438
— — равноугольно полуправильный 429
—, топологические (комбинаторные) свойства 400
Многогранники взаимные 427
— двойственные 407, 426
— изометричные 419
— изоморфные 400
—, комбинаторный (топологический) тип 400
Многогранный угол правильный 424
Многомерное векторное пространство 377
Многоугольник 382, 383
—, вершина 382
—, выпуклый 384
— метрически правильный 424
— правильный 424
— простой 383, 424
— распадающийся 441
— самопересекающийся 383
—, смежные вершины 382
—, — стороны 382
—, сторона 382
— сферический 538, 543
—, ядро 441
Многоугольные числа 14
Модель 21, 29
Монжа метод 232, 275, 276
Мора—Маскерони построения 169—171
— — теорема 168

Направление проектирования 234
Направленная окружность 480
Направленный отрезок 450
— угол 450
«Начала» Евклида 13
Начертательная геометрия 234
Неархимедова геометрия 45
Невырожденная инверсия 469
— осевая инверсия 499—502
Недоступные прямые 179
— точки 179
— элементы 179
Неевклидова геометрия 103
Некантерова геометрия 46
Неоднородные проективные координаты 280
Непрерывное преобразование 60
Непрерывности аксиома 31, 37
Неприводимый многочлен 217
Непротиворечивая система аксиом 28
Несобственная связка 234
— точка 57, 112, 113
Неточечное преобразование 121
Нулевой вектор 301

Область действия 53
— значений 51, 112
— определения 50, 51, 112
Образ 51
Обратная функция 96
Обратное отображение 97, 137
— преобразование 97, 137
Общая инверсия 469
— осевая инверсия 496, 498, 505
«Общее понятие» 13, 15
Обыкновенная инверсия 469
— осевая инверсия 496, 498, 505
Однородные координаты 118
— проективные координаты 280
Окружности, ось подобия 490
— перпендикулярные 453, 528, 529
—, ряд 490
—, сеть 492
—, центр подобия 489
Окружность большая 520, 529, 534—536
— девяти точек 65
—, изображение 246
— инверсии 469
— малая 520, 539—545
— направленная 480
—, определение 451, 452, 479, 480, 510
—, ось 522
—, радиус 451, 510
—, центр 451
— Эйлера 65
Октаэдр 423
— правильный 426, 442
— усеченный 437
Ординат ось 322
Оригинал 229
Ориентированная плоскость 350
Ортогональная диметрия 262
— изометрия 274
— проекция 239
Ортонормированный базис 372
Осевая инверсия 496—502, 505
— —, направляющая окружность 499
— круговая геометрия 507
— симметрия 292
Осевое круговое преобразование 125, 138, 139, 504, 505, 512
— преобразование 496, 504
Основание пирамиды 385
— призмы 385
Особая инверсия 468, 469
— осевая инверсия 496—500, 505
Ось 319
— абсцисс 321
— апликат 322
— гиперболической инверсии 59
— гомологии 110
— гомотетии 93
— окружности 522
— ординат 322

Ось осевой инверсии 496
— подобия 96
— — окружностей 490
— радикальная 455, 457, 458, 462
— сети окружностей 492
— сжатия 56
— симметрии 66
Относительности принцип Галилея 108, 109
— — Эйнштейна 110
Отображение (геометрическое, точечное) 51
— аффинное 236
— взаимно однозначное 53
— линейное 76
—, область значений 51
—, — определения 51
— обратное 97, 137
— полярное 128—133, 137, 146—148, 150, 156
Отрезок 34
— направленный 450

Пантограф 161
Паппа задача 186
Параболическая связка 467
— сеть окружностей 493
Параболический пучок 462
— ряд окружностей 492
Параллелограмм сил 302
Параллелограмма правило 302
Параллельная аксонометрия 257
— проекция 232, 234—247
Параллельное проектирование, инвариант 236
Параллельности аксиома 40
Параллельные прямые 14, 40
Параллельный перенос 54, 60, 63, 73, 76, 81, 83, 86, 88, 89, 93, 97, 105—107, 114, 191, 292, 295, 298, 541, 543
Параметр (малой окружности) 540
Паскаля теорема 475
— улитка 134
Паша аксиома 34
Первые формулы тангенсов 554
Переместительности закон 85
Перенесения принцип 140, 156, 157
— —, отвечающий инверсии 143—146
— —, — полярному отображению 146—156
— —, — сжатию к прямой 140—143
Переориентация 496
Перпендикулярные пучки окружностей 465
Пирамида 11, 385
—, основание 385
— четырехугольная, аксонометрическое изображение 259
Пирамидальные числа 14
Пифагора теорема сферическая 553
Платонов многогранник 424
Плоский многоугольник 382
Плосконосый додекаэдр 437
— куб 437
Плоскость 14, 58, 376
— горизонтальная 275
— евклидова 41
— изображения 229
— круговая 24, 57, 58, 76, 79, 121, 477
— проекций 277
— проективная 113, 117
— профильная 276
— расширенная 24, 57, 78
— фронтальная 275
Поверхность 14
Поворот сферы 523, 524
Подерное преобразование 134—137
Подобие — см. Преобразование подобия
Поле 28
Поле действительных чисел 28
— — —, аксиоматика 30, 31
—, допустимое конечное расширение 215
—, квадратичное расширение 215
Полная система аксиом 30
Полное изображение 253, 254, 256
Полноты аксиома 41
Полный четырехвершинник 249
— четырехугольник 249
Полуплоскость 36
Полуправильный многогранник 429, 436, 440
Полупространство 36
Полусфера 520
Польке—Шварца теорема 249, 284
Полюс 521
Поля аксиома 30
Поляра 522
Полярное отображение 128—133, 137, 146—148, 150, 156
Полярный сферический треугольник 531
Понселе—Штейнера построения 171—175
— — теорема 171
Порядка аксиома 31, 34
Построения в пространстве 200—203
— — —, система постулатов 201, 202
— воображаемые 202
— Мора—Маскерони 169—171
—, общая схема решения 184
— Понселе—Штейнера 171—175
— приближенные 193—200
— —, графоаналитический метод 197
— —, метод последовательных приближений 197
—, разрешимость задач 209
—, система постулатов 200
— циркулем и линейкой 208, 209
Постулат 13, 15, 18, 40, 44
Правильный гексаэдр 426, 442
— додекаэдр 426, 442
— икосаэдр 426, 442
— многогранник 424
— — самопересекающийся (звездчатый) 441
— многогранный угол 424
— многоугольник 424
— —, построение 225, 226
— октаэдр 426, 442
— тетраэдр 426, 442
Предельные точки пучка 464
Преобразование 53, 121
— аффинное 62, 76, 93, 103, 104, 122, 138, 243, 298
— бирациональное 79, 119, 121
— Галилея 108—110
—, группа 102—110, 138
— дробно-линейное 79, 121
— инволютивное 97, 137
— касательное 136, 511
— — круговое 125, 138, 139, 511, 512
— квадратичное 119, 120
— круговое 62, 79, 93, 104, 124, 125, 138, 139, 478
— кубическое 119, 121
— Лагерра 504
— линейное 76, 77, 79, 119, 121
— Лоренца 110
— Мебиуса 478
— непрерывное 60
— неточечное 121
—, область действия 53
— обратное 97 137
— осевое 496, 504
— — круговое 125, 138, 139, 504, 505, 512
— подерное 134—137

Преобразование подобия 61, 62, 92, 100, 103, 180, 296, 478, 505
— проективное 110, 117, 119
— тождественное 85
— точечное круговое 512
— унимодулярно-аффинное 284
— центрально-аффинное 55
Призма 11, 385
— основание 385
— правильная 437
Принадлежности аксиома 32
Проективная геометрия 105, 110, 117
— плоскость 113, 117
— —, бирациональные преобразования 119
— —, линейные отображения 118
— система координат 279
Проективное преобразование 110, 117, 119
Проективные координаты 280
Проектирующая прямая 234
Проекций формула 324
Проекция вектора 320
— вторичная 255
— горизонтальная 275
— косоугольная 239
— на ось 320, 321
— — —, связь с координатами 321, 322
— ортогональная 239
— отрезка 320
— параллельная 232, 234—247
— пр фильная 276
— прямоугольная 239
— с числовыми отметками 233
— стереографическая 22, 57
— фронтальная 275
— центральная 232, 277
Прообраз 97
Простой многогранник 385, 424
— многоугольник 383, 424
Пространственный многогранник 402
Пространство 376
— аффинное 378
— векторное 370, 377
— дискретное 47
— Евклида 32, 41, 46, 47
— конечное 46
— многомерное 377
— реальное 47
— физическое 47
Противоположные векторы 300
Профильная плоскость 276
— проекция 276
Прямая линия 14, 376
— Симпсона 151
— Эйлера 65
Прямоугольная проекция 239
Прямоугольные числа 14
Псевдоскалярное произведение 341
Птолемея теорема 146
Пуансо многогранник 441
Пучки окружностей перпендикулярные (сопряженные) 465
Пучок окружностей 461, 462, 466, 467
— —, предельные точки 464
— прямых 461
Пяти элементов формулы 549—551

Радикальная ось окружностей 455, 457, 458
— — пучка 462
Радикальный центр окружностей 460, 461
— — связки 466
Радиус 451
— сферический 540
Развертка 410
Разрешимые задачи на построение 209
Распадающийся многоугольник 441
Расстояние касательное 485
— сферическое 536
Растяжение 55
Расширение 125—128, 137, 138, 157, 497
Расширенная плоскость 24, 57, 78
Реальное пространство 47
Ребро 384
Реконструкция тетраэдра 257
Репер 36
— аффинный 243
— — пространственный 248
Рефлексивность 102, 296
Римановa геометрия 47
Род многогранника 391
Ромб 11
Ромбоикосододекаэдр 437
Ромбокубоктаэдр 437
Ряд окружностей 490
— —, линия центров 492
— —, центр 492

Самопересекающийся многогранник 441
— многоугольник 383
Свободный вектор 295
Связанный вектор 295
Связи линия 275
Связка 234
— окружностей 466, 467
— —, радикальный центр 466
Сегмент сферический 539
Сетка аффинная 244
— на сфере 395
Сеть окружностей 492
— —, ось 492
— —, степень 493
Сжатие к прямой 55, 62, 68, 73, 76, 93, 96, 97, 114, 122, 141, 298
— — —, коэффициент 56
— — —, ось 56
— к точке 55, 76
Симметричность 102, 296
Симметрия 66, 97, 292
— осевая 292
—, ось 66
— относительно окружности 56, 471
— — пары параллельных прямых 59
— — плоскости 292
— — прямой 55, 56, 60, 73, 76, 85, 89, 190, 469
— — точки 54, 55, 60, 63, 73, 76, 81, 83, 85, 91, 106, 107
— порядка k 66
— скользящая 89
— сферы 524
— центральная 292
Симпсона прямая 151
Синусов теорема 331
— — сферическая 368, 547, 548
— формулы 553
Система аксиом 20
— —, независимость 44
— —, непротиворечивость 28
— —, полнота 30
— координат 43, 321
— — аффинная 243, 248
— — декартова прямоугольная 251
— — проективная 278
Скалярное произведение 328—331, 342, 350, 369
— —, единственность 336—338
Скалярный квадрат 328
Скользящая симметрия 89

Сложение векторов 298—303, 369
Сложная функция 80
Сложное отношение 278
Смежные вершины 382
— стороны 382
— углы (на сфере) 528
Смешанное произведение 355
Собственная связка 234
Сопряженные пучки окружностей 465
Сочетательности закон 85
Спираль Архимеда 117
Средства построения 160
Степень гиперболической инверсии 59
— инверсии 469
— осевой инверсии 496
— прямой относительно окружности 486
— сети окружностей 493
— точки относительно окружности 455
Стереографическая проекция 22, 57
Сторона многоугольника 382
— сферического треугольника 530
Сумма векторов 298, 299, 300, 369
— —, свойства 301—303
— отображений 80
Сфера 11
Сферическая геометрия 518, 524
— теорема косинусов 368, 545—547
— — — двойственная 551
— — Пифагора 553
— — синусов 368, 547, 548
Сферический круг 539
— —, площадь 541, 544
— многоугольник 538, 543
— — выпуклый 539
— радиус 540
— сегмент 539
— треугольник 366, 367, 530—539
— —, вершина 530
— —, площадь 538
— — полярный 531
— —, решение 555—557
— —, сторона 530
— —, угловой избыток 538
— —, угол 530
— центр 540
Сферическое расстояние 536
Схода линия 282

Тангенсов формулы вторые 555
— — первые 554
Телесные числа 14
Теорема 21
Тетраэдр 385, 423
— правильный 426, 442
— усеченный 437
Тождественное преобразование 85
Топологически правильный многогранник 420
— равногранно полуправильный многогранник 440
— равноугольно полуправильный многогранник 429
Топологические типы многогранников 420, 423
Топологический (комбинаторный) тип многогранников 400
Точечная аналагматическая геометрия 139
— аффинная геометрия 139
— геометрия окружностей 139
— инверсия 468
— круговая геометрия 478
Точечное круговое преобразование 512
— отображение 51
Точка 10, 13, 376
Точка диагональная 278
Транзитивность 102, 296
Транспортир 168
Трапеция 11
Треугольник 383
— автополярный 531
—, изображение 245
—, медиана 316
— сферический 366, 367, 530—539
—, центр тяжести 317
Треугольные числа 14
Триметрическое изображение 273
Трисекция угла 176, 221—223
Тройное произведение 351, 352
— —, единственность 364—366
— —, свойства 355—360
— —, связь с векторным произведением 353

Угловой избыток 538
Углы вертикальные (на сфере) 528
— смежные (на сфере) 528
Угол 40, 144, 527
— на сфере 527
— направленный 450
— сферического треугольника 530
Удвоение куба 220, 221
Улитка Паскаля 134
Умножение вектора на число 305—308, 369
Унимодулярно-аффинное преобразование 284

Федорова метод 230, 233
Фигурные числа 14
Физическое пространство 47
Фронтальная плоскость 275
— проекция 275
Функционал 51
Функциональный анализ 50
— оператор 51
Функция 50
— Дирихле 50
— дробно-линейная 78
— линейная 73
—, область определения 50
— обратная 96
— сложная 80

Центр 11
— гомологии 110
— гомотетии 55, 93
— инверсии 56, 469
— окружности 451
— подерного преобразования 134
— подобия окружностей 489
— проекций 277
— радикальный 460, 461, 466
— ряда окружностей 492
— симметрии 66
— — k-го порядка 66
— сферический 540
Центральная аксонометрия 257, 286, 287
— проекция 232, 277
— симметрия 292
Центрально-подобное пресбразование 55
Центров линия 463, 492
Цикл 480
Циклография 229, 233
Цилиндр 11
Циркуль 167

Чевы теорема 349
Чертеж комплексный 275
Чертежная машина 160

Чертежный треугольник 161, 168
Четырехвершинник 278, 279, 281, 283, 284
— полный 249
Четырехугольник 383
—, изображение 245, 246
— полный 249
Числовая отметка 233

Шаг построения 208
Шар, аксонометрическое изображение 260
Штейница теорема 403

Эйлера окружность 65
— прямая 65
Эйлера теорема 390, 394, 409
Эйлерова характеристика 391, 395
Эйнштейна принцип относительности 110
Эквиаффинное преобразование 284
Эквивалентность 296
Элементарная геометрия 13, 375—377
Эллипсограф 161
Эллиптическая связка 467
Эллиптическая сеть окружностей 493
Эллиптический пучок 462
— ряд окружностей 492
Эрлангенская программа 102

Ядро многоугольника 441
Якоби тождество 357

ЭНЦИКЛОПЕДИЯ
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ,
КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ — ГЕОМЕТРИЯ

М., Физматгиз, 1963 г., 568 стр. с илл.

Редактор *С. А. Широкова.*
Техн. редактор *Н. Я. Мурашова.*
Корректор *О. А. Сигал.*

Сдано в набор 25/III 1963 г. Подписано к печати 19/XII 1963 г. Бумага 60 × 90¹/₁₆. Физ. печ. л. 35,5. Условн. печ. л. 35,5. Уч.-изд. л. 37,21 Тираж 20 000 экз. Т-08843. Цена книги 1 р. 32 к. Заказ № 2921.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Гос. типография «Пяргале», Вильнюс, ул. Латако, 6.